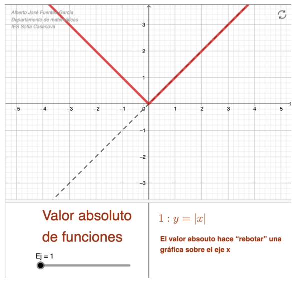
DEFINICIÓN

La función valor absoluto, se escribe $f(x) = |x|$, y se define como:



$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & si\ \ x < 0 \\ x & si\ \ x \geq 0 \end{cases}$$

Gráficamente, siempre es positivo, ya que cambia el signo de de su contenido cuando este es negativo. Por lo tanto se interpreta como rebotes sobre el eje X, como se aprecia en la gráfica:

USOS

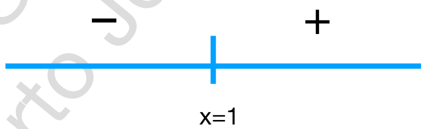
Cuando encontremos expresiones con valor absoluto, para poder trabajar con ellas, **tenemos que convertirlas en funciones a trozos**. Así podremos realizar estudios de continuidad, derivabilidad, cálculos en los que intervenga la derivada y otras situaciones.

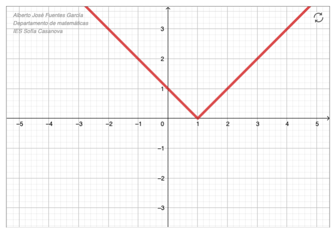
Tenemos que **localizar dónde se producen los cambios de signo** del contenido del valor absoluto (los rebotes), y eso ocurre justo **cuando el contenido toma el valor cero**, o donde se rompe la continuidad. En **los intervalos negativos, se le cambia el signo**.

Veamos algunos ejemplos:

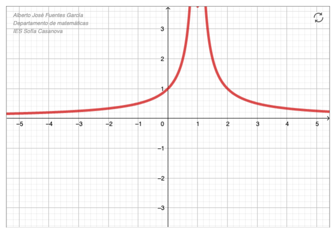
1) $f(x) = |x - 1|$. Comprobamos $x - 1 = 0 \implies \mathbf{x = 1}$ (el cambio de signo se produce en 1)

Comprobamos los signos en la recta real (en este caso es fácil verlo directamente)

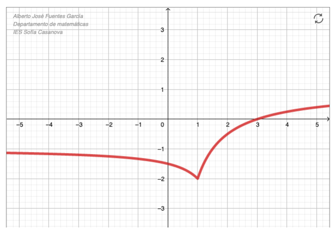




Y escribimos la función a trozos: $f(x) = |x - 1| = \begin{cases} -x + 1 & si\ \ x < 1 \\ x - 1 & si\ \ x \geq 1 \end{cases}$



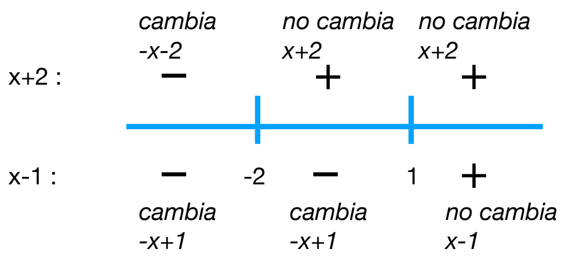
2) $f(x) = \dfrac{1}{|x - 1|} = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - x} & si\ \ x < 1 \\ \dfrac{1}{x - 1} & si\ \ x \geq 1 \end{cases}$, razonado de igual forma que el anterior.



3) $f(x) = \dfrac{x - a}{1 + |x - 1|} = \begin{cases} \dfrac{x - a}{1 - x + 1} = \dfrac{x - a}{2 - x} & si\ \ x < 1 \\ \dfrac{x - a}{1 + x - 1} = \dfrac{x - a}{x} & si\ \ x \geq 1 \end{cases}$, razonado de igual forma que el anterior.

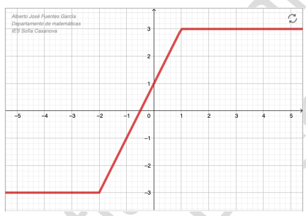
4) Si aparecen varias expresiones con valor absoluto:

$f(x) = |x+2| - |x-1|$. Los cortes se producen en $\mathbf{x = -2}$ y $\mathbf{x = 1}$ respectivamente. Ponemos todos los valores en una recta real y comprobamos los cambios de signo de cada valor absoluto.



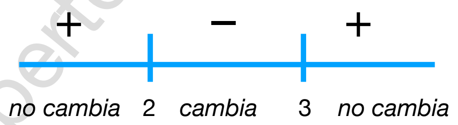
Y escribimos la función a trozos cambiando los signos de cada valor absoluto cuando procede:

$$f(x) = |x+2| - |x-1| = \begin{cases} -x-2-(-x+1) & si \quad x < -2 \\ x+2-(-x+1) & si \quad -2 \le x < 1 \\ x+2-(x-1) & si \quad 1 \le x \end{cases} = \begin{cases} -3 & si \quad x < -2 \\ 2x+1 & si \quad -2 \le x < 1 \\ 3 & si \quad 1 \le x \end{cases}$$



4) Si aparecen expresiones más complejas dentro del valor absoluto:

$f(x) = |x^2 - 5x + 6|$ se procede igual. Resolvemos la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$ y comprobamos signos en los intervalos sobre la recta real. $\mathbf{x = 2}$ y $\mathbf{x = 3}$



$$f(x) = |x^2 - 5x + 6| = \begin{cases} x^2 - 5x + 6 & si \quad x < 2 \\ -x^2 + 5x - 6 & si \quad 2 \le x < 3 \\ x^2 - 5x + 6 & si \quad 3 \le x \end{cases}$$