$$\lim_{x \to c} f(x) = L \Leftrightarrow: \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ / \ 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

…"tal que"…

El límite de **f**, cuando **x** tiende a **c** es el número **L**

"si y solo si" = "equivale a decir" = "es lo mismo que"

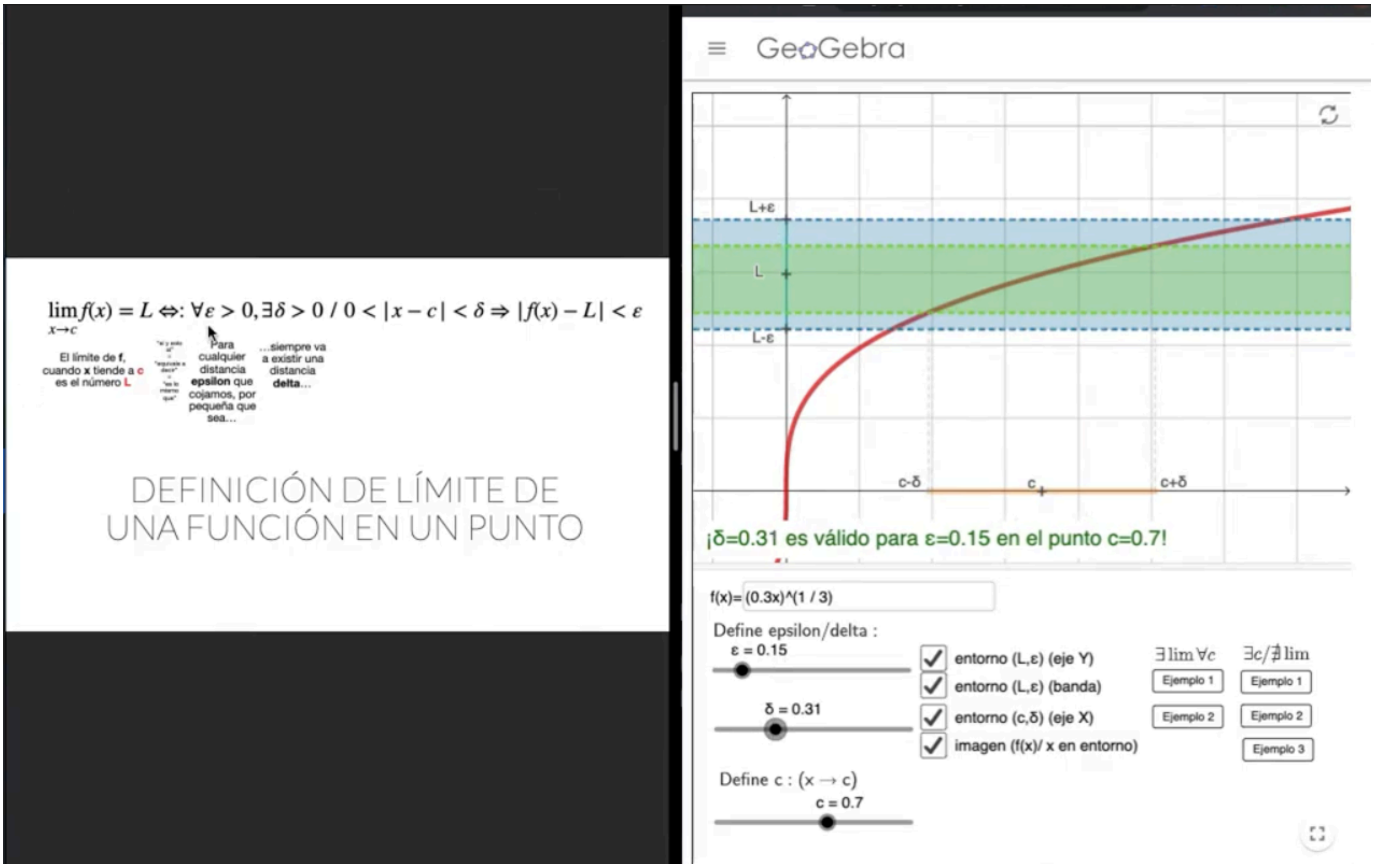
Para cualquier distancia **epsilon** que cojamos, por pequeña que sea…

…siempre va a existir una distancia **delta**…

…si consideramos valores de **x** próximos a **c**… (a distancia menor que esa delta)

…los valores que toma la función también son próximos al valor del límite, **L**

DEFINICIÓN DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO



Cálculo de límites de funciones

$x \to +\infty$ **==> IGUAL QUE EN SUCESIONES + REGLA DE L´HOPITAL (ver después)**

Ejemplos: (repaso de cociente de polinomios, ver más tipos en L´Hopital)

- $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+x-1}{4x^2-3} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2}{4x^2} = \dfrac{1}{2}$ (= grado, cociente de coeficientes de mayor grado)

- $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+x-1}{4x^3-3} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2}{4x^3} = 0$ grado num. < grado den. => 0

- $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3+x-1}{4x^2-3} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3}{4x^2} = +\infty$ grado num. > grado den. => +-infinito

$x \to -\infty$ **=> si cuesta verlo, CAMBIAMOS LAS x POR –x Y SE CONVIERTE EN** $x \to +\infty$

Ejemplos:

- $\lim_{x\to-\infty} 2^x = \lim_{x\to+\infty} 2^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2^x} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$

$x \to a$ **=> SUSTITUIMOS x POR a Y OBTENEMOS RESULTADO SALVO INDETERMINACIÓN:**

Ejemplos:

- $\lim_{x\to1} \dfrac{\ln x - x^2}{x^4+x^3} = \dfrac{\ln 1 - 1^2}{1^4+1^3} = \dfrac{-1}{2}$

- $\lim_{x\to1^+} \dfrac{x}{x^2-1} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$ (nos acercamos a cero por los positivos (1’001 - 1 > 0)

INDETERMINACIONES:

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \frac{0}{0}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty$$

I. $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \frac{0}{0}$ **==> L´HOPITAL :** $\lim_{x\to} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ **(**derivar num. y den.)

(*u otros recursos vistos como comparar infinitos / dividir polinomios / simplificar expresiones*)

Ejemplos:

- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x^2 - x} = \left(\frac{e^0 - 1}{0 - 0} = \frac{0}{0}\right) = L'Hopital = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2x - 1} = \frac{1}{-1} = -1$

II. $\infty - \infty$ **=> OPERAR Y SIMPLIFICAR O COMPARACIÓN DE INFINITOS**

COMPARACIÓN DE INFINITOS:

- $\lim_{x\to+\infty} (x^2 - 4x) = (\infty - \infty) = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ ("manda" el de mayor grado)
- $\lim_{x\to+\infty} (4x^5 - 2^x) = (\infty - \infty) = \lim_{x\to+\infty} -2^x = -\infty$ ("puede más" la exponencial)

ALGUNOS MÉTODOS: operar fracciones algebraicas (1° trimestre)

- $\lim_{x\to+\infty} (\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2+1}{x-2}) = (\infty - \infty) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2(x-2) - (x^2+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)}\right) =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3 - 2x^2 - x^3 + x^2 - x + 1}{x^2 - 3x + 2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{-x^2 - x + 1}{x^2 - 3x + 2}\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = -1$$

ALGUNOS MÉTODOS: multiplicar y dividir por conjugado (1° trimestre)

- $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2-2} - \sqrt{x^2+x}) = (\infty - \infty) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2-2} - \sqrt{x^2+x}) \cdot (\sqrt{x^2-2} + \sqrt{x^2+x})}{\sqrt{x^2-2} + \sqrt{x^2+x}} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2-2} - \sqrt{x^2+x}) \cdot (\sqrt{x^2-2} + \sqrt{x^2+x})}{\sqrt{x^2-2} + \sqrt{x^2+x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2-2) - (x^2+x)}{\sqrt{x^2-2} + \sqrt{x^2+x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2 - x}{\sqrt{x^2-2} + \sqrt{x^2+x}} = \frac{-1}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = -\frac{1}{2}$$

III. $0 \cdot \infty$ **=> OPERAR Y CONVERTIR EN** $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}, \dfrac{0}{0}$

Ejemplos:

- $$\lim_{x\to 0} \sin x \cdot \frac{1}{x} = (0 \cdot +\infty) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = L'Hopital = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

- $$\lim_{x\to +\infty} (x+7) \cdot \sqrt{\frac{1}{4x^2+3}} = (0 \cdot +\infty) = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{(x+7)^2}{4x^2+3}} = (\frac{\infty}{\infty}) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2}{4x^2}} = \frac{1}{2}$$

IV. $0^0, \infty^0$ **- Propiedades logaritmo + exponencial + L´Hopital (más en 2º BACH)**

$$L = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = (\infty^0) \xrightarrow{tomamos\ \ln} \ln L = \ln \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \ln x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \ln x = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Por tanto, $\ln L = 0 \implies L = 1$ (último límite por L´Hopital o comparación de infinitos)

V. 1^∞ **- Número e:**

Opción 1: procedimiento +1-1, invertir, cambiar exponente para usar

$$e = \lim_{f(x)\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}$$

- $$\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}} = (1^{+\infty}) = \lim_{x\to 1^+} \left(1 + \frac{2x+1}{x+2} - 1\right)^{\frac{1}{x-1}} = \text{(+1-1)=}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \left(1 + \frac{2x+1-x-2}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1^+} \left(1 + \frac{x-1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}} = \text{(invertir)=}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \left(1 + \frac{1}{\frac{x+2}{x-1}}\right)^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1^+} \left(1 + \frac{1}{\frac{x+2}{x-1}}\right)^{\frac{x+2}{x-1}\frac{x-1}{x+2}\frac{1}{x-1}} = \text{(arreglar exponente)=}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x+2}{x-1}}\right)^{\frac{x+2}{x-1}}\right]^{\frac{x-1}{x+2}\frac{1}{x-1}} = e^{\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x+2}} = e^{\frac{1}{3}}$$

Opción 2: fórmula (propiedades logartimo + exponencial):

$$\lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{h(x)} = e^{\lim_{x\to a} h(x)\cdot\left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right)}$$ (salen mismas cuentas casi)

CONTINUIDAD

Definición: continuidad en un punto

$$f \text{ es continua en un punto } x = x_0 \iff \begin{cases} (1)\ \exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \\ (2)\ \exists f(x_0) \\ (3)\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \end{cases}$$

NOTA: De forma resumida a veces se escriben, por comodidad, las tres condiciones juntas, como $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$*, pero es mejor evitarlo si nos preguntan la definición.*

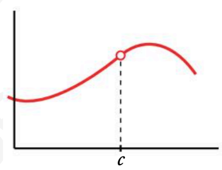
Tipos de discontinuidad:

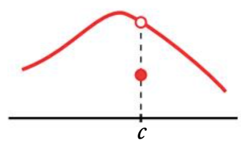
Discontinuidad evitable:

Se produce cuando existe el límite de la función en el punto, pero la función no está definida en ese punto o toma un valor que no coincide con el límite.

Se evita redefiniendo la función en ese punto para que coincida con el valor del límite.

$\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ pero (1) $\nexists f(x_0)$ ó (2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$



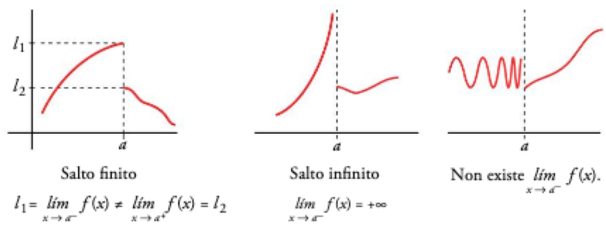


Discontinuidad inevitable:

- de salto finito: los límites laterales en el punto existen pero su valor no coincide.

- de salto infinito: al menos uno de los límites laterales es infinito.

- **non existe algún límite lateral**.



Definición: continuidad en un intervalo

Se dice que una función f es continua en un intervalo de $\mathbb{R}$ si es continua en cada punto de ese intervalo.

CONTINUIDAD: Calcula el valor de n para que la función f sea continua en todo R:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 1, & x \le 4 \\ 2x + n, & x > 4 \end{cases}$$

f es una función a trozos donde: $f_1(x) = x^2 - 5x + 1$ y $f_2(x) = 2x + n$

- $\underline{Si\ \ x \neq 4:}$
  - Si x < 4, f es continua ($f_1(x)$ función cuadrática)
  - Si x > 4, f es continua ($f_2(x)$ función lineal)

Entonces $f\ continua\ en\ \mathbb{R} - \{4\}$ **(1)**

- $\underline{Si\ \ x = 4:}$

$$f\ continua\ en\ x = 4 \Longleftrightarrow \exists \lim_{x \to 4} f(x) = f(4)$$

- Calculamos el valor de la función en 4 y los límites laterales e igualamos:

$$\left.\begin{array}{l} \cdot f(4) = f_1(4) = 4^2 - 5 \cdot 4 + 1 = 16 - 20 + 1 = -3 \\ \\ \cdot \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} f_1(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} x^2 - 5x + 1 = -3 \\ \\ \cdot \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} f_2(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} 2x + n = 8 + n \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{r} -3 = 8 + n \\ n = -11 \end{array}$$

Entonces $si\ \ n = -11,\ f\ es\ continua\ en\ x = 4$ **(2)**

- Si combinamos las conclusiones **(1)** y **(2)**:

$$\left.\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}\right\} \Longrightarrow si\ n = -11\ f\ es\ continua\ en\ todo\ \mathbb{R}$$

DERIVABILIDAD

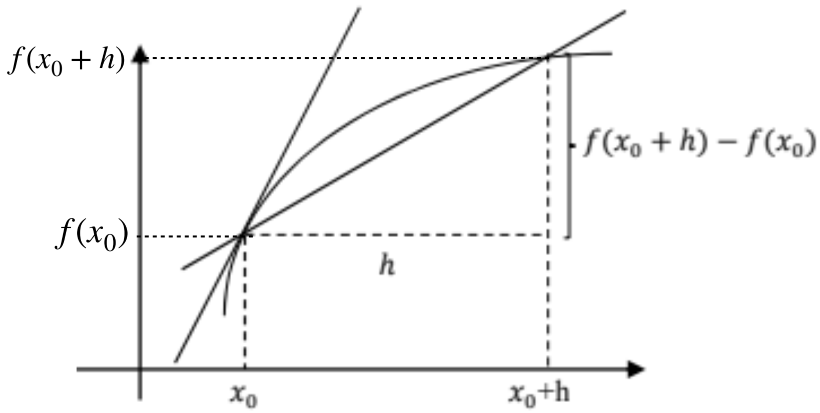
Definición: definición de derivada de una función en un punto

f es derivable en un punto $x = x_0 \iff \exists \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

El valor finito de ese límite se representa como $f'(x_0)$ y se llama derivada de f en x_0

NOTA: f es derivable en un intervalo (a, b) si lo es en cada punto de (a, b).

Interpretación gráfica: derivada como límite de las secantes.



La secante que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0+h, f(x_0+h))$ tiene como pendiente $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (TVM en el intervalo (x_0, x_0+h)).

Cuando reducimos el tamaño del intervalo ($h \to 0$), esa secante se va aproximando a la tangente a la curva en el punto $(x_0, f(x_0))$, hasta, llevado al límite, convertirse en dicha tangente.

Por lo tanto, la derivada de la función en el punto x_0 es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $(x_0, f(x_0))$. Por tanto:

$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} =$ pte. de la recta tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$

DERIVACIÓN: PROPIEDADES, REGLA Y TABLA DE DERIVADAS

Linealidad de la derivada

La derivada es un operador lineal, "funciona bien" con sumas y restas:

- La derivada de una suma/resta es la suma/resta de las derivadas.
- La derivada de un coeficiente por una función es el coeficiente por la derivada de la función.

$$(m \cdot f + n \cdot g)' = m \cdot f' + n \cdot g'$$

Derivada del producto

La derivada del producto es la derivada del primero por el segundo sin derivar, más la derivada del segundo por el primero sin derivar.

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Derivada del cociente

La derivada del cociente es la derivada del numerador por el denominador sin derivar, menos la derivada del denominador por el numerador sin derivar, partido del denominador al cuadrado.

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Regla de la cadena

La derivada de f compuesto con g (f está dentro de g) es la derivada de g (con f dentro) por la derivada de f (derivada de lo que g tiene dentro). Se deriva primero la función más externa, la última en aplicar, y se va multiplicando por las derivadas de lo que hay dentro.

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Ejemplo:

$f(x) = \sin(x) \qquad g(x) = x^2$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sin^2 x$
$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = (2 \sin x) \cdot (\sin x)' = 2 \sin x \cos x$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sin x^2$
$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = (\cos x^2) \cdot (x^2)' = 2x \cdot \cos x^2$

Composición de funciones

f compuesto con g
(se aplica primero f, después g)

$$g \circ f : \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f(x) \longrightarrow g(f(x))$$

Ejemplo:

$$f(x) = \sin(x) \qquad g(x) = x^2$$

f compuesto con g
(se aplica primero f, después g)

$$g \circ f : \mathbb{R} \xrightarrow{\sin} \mathbb{R} \xrightarrow{[]^2} \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \sin x \longrightarrow \sin^2 x$$

entonces
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sin^2 x$$

g compuesto con f
(se aplica primero g, después f)

$$f \circ g : \mathbb{R} \xrightarrow{[]^2} \mathbb{R} \xrightarrow{\sin} \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow x^2 \longrightarrow \sin(x^2)$$

entonces
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sin(x^2)$$

Composición de funciones

Ejemplo:

$$f(x) = \ln x \qquad g(x) = e^x$$

f compuesto con g
(se aplica primero f, después g)

$$g \circ f : \mathbb{R} \xrightarrow{\ln} \mathbb{R} \xrightarrow{e^{[]}} \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \ln x \longrightarrow e^{\ln x} = x$$

entonces
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$$

g compuesto con f
(se aplica primero g, después f)

$$f \circ g : \mathbb{R} \xrightarrow{e^{[]}} \mathbb{R} \xrightarrow{\ln} \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow e^x \longrightarrow \ln e^x = x$$

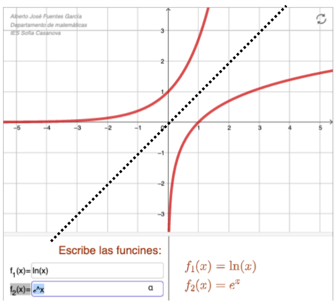
entonces
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x$$

¡FUNCIONES INVERSAS!

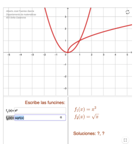
$$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

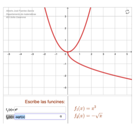
Composición de funciones

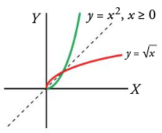
GRÁFICA DE FUNCIONES INVERSAS
Simetría respecto y=x

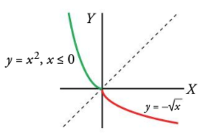


TIENEN QUE SER INYECTIVAS, SI NO, SEPARARLAS









$$y = f(x) = x^2 \begin{cases} y = f_1(x) = x^2, \ x \geq 0 \rightarrow f_1^{-1}(x) = \sqrt{x} \\ y = f_2(x) = x^2, \ x \leq 0 \rightarrow f_2^{-1}(x) = -\sqrt{x} \end{cases}$$

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES			
Simple		Compuesta	
Función	**Derivada**	**Función**	**Derivada**
$y = k$	$y' = 0$		
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	$y = f(x)^n$	$y' = nf(x)^{n-1} \cdot f'(x)$
$y = \frac{1}{x}$	$y' = \frac{-1}{x^2}$	$y = \frac{1}{f(x)}$	$y' = \frac{-f'(x)}{f(x)^2}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{f(x)}$	$y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y = \sqrt[n]{f(x)}$	$y' = \frac{f'(x)}{n \cdot \sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^{f(x)}$	$y' = f'(x) \cdot e^{f(x)}$
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$	$y = a^{f(x)}$	$y' = f'(x) \cdot a^{f(x)} \cdot \ln a$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \ln f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$	$y = \log_a f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x) \ln a}$
$y = sen x$	$y' = \cos x$	$y = sen(f(x))$	$y' = f'(x) \cdot \cos(f(x))$
$y = \cos x$	$y' = -sen x$	$y = \cos(f(x))$	$y' = -f'(x) \cdot sen(f(x))$
$y = tg\, x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x = \sec^2 x$	$y = tg(f(x))$	$y' = \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))} = f'(x) \cdot (1 + tg^2(f(x))) = f'(x) \sec^2(f(x))$
$y = cotg\, x$	$y' = \frac{-1}{sen^2 x} = -(1 + cotg^2 x) = -cosec^2 x$	$y = cotg(f(x))$	$y' = \frac{-f'(x)}{sen^2(f(x))} = -f'(x) \cdot (1 + cotg^2(f(x))) = -f'(x) cosec^2(f(x))$
$y = \sec x$	$y' = \frac{sen x}{\cos^2 x}$	$y = \sec(f(x))$	$y' = \frac{sen(f(x))}{\cos^2(f(x))} f'(x)$
$y = cosec\, x$	$y' = \frac{-\cos x}{sen^2 x}$	$y = cosec(f(x))$	$y' = \frac{-\cos(f(x))}{sen^2(f(x))} f'(x)$
$y = arcsen\, x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$y = arcsen(f(x))$	$y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}}$
$y = \arccos x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$y = \arccos(f(x))$	$y' = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}}$
$y = arctg\, x$	$y' = \frac{1}{1 + x^2}$	$y = arctg(f(x))$	$y' = \frac{f'(x)}{1 + f(x)^2}$

EJEMPLOS DERIVADAS

a) $f(x) = \arctan \dfrac{1+x}{x}$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{x}\right)^2} \cdot \frac{x-(1+x)}{x^2} = \frac{1}{\frac{x^2+(1+x)^2}{x^2}} \cdot \frac{\cancel{x}-1-\cancel{x}}{x^2} =$$

$$= \frac{\cancel{x^2}}{x^2+1+2x+x^2} \cdot \frac{-1}{\cancel{x^2}} = \frac{-1}{2x^2+2x+1}$$

b) $f(x) = \ln(\cos(\dfrac{1}{x^2}))$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos(\frac{1}{x^2})} \cdot (-\sin(\frac{1}{x^2})) \cdot \left(\frac{-2}{x^3}\right) = \frac{2\tan\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^3}$$

c) $f(x) = \dfrac{4e^x}{\sqrt{x}}$

$$f'(x) = \frac{4e^x\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 4e^x}{(\sqrt{x})^2} = \frac{4e^x\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 4e^x}{x} = \frac{4e^x\left(\frac{2\sqrt{x}\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}}\right)}{x} = \frac{2e^x\,(2x-1)}{x\sqrt{x}}$$

d) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+1}}$

(se puede hacer derivando la raíz o sacando 1/2 por prop. logaritmos, el resultado es idéntico)

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}} \cdot \frac{2x(x^2+1)-2x(x^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{\cancel{2}(\cancel{x^3}+x-\cancel{x^3})}{\cancel{2}\frac{x^2}{\cancel{x^2+1}}(x^2+1)^{\cancel{2}}} = \frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}(x^2+1)} =$$

$$= \frac{1}{x(x^2+1)}$$

DERIVADA POTENCIAL-EXPONENCIAL

Cuando tenemos x en la base y en el exponente de una función, ¿usamos la derivada de una potencia $y = x^n$ o usamos una exponencial $y = a^x$

Para solucionarlo, existe un procedimiento, y una fórmula asociada:

El **procedimiento** permite llegar a la fórmula. **Tomamos logaritmos y derivamos**:

$$y = \left(f(x)^{g(x)}\right)' \implies \ln y = \ln f(x)^{g(x)} \implies \ln y = g(x)\cdot \ln f(x) \implies \text{derivamos} \implies$$

$$\implies \frac{y'}{y} = g'(x)\cdot \ln f(x) \; + \; \frac{g(x)}{f(x)} f'(x) \implies$$

$$\implies y' = g'(x)\cdot \ln f(x)\cdot y \; + \; \frac{g(x)}{f(x)} f'(x)\cdot y \implies$$

$$\text{sustituyendo } y = \left(f(x)^{g(x)}\right) \implies y' = g'(x)\cdot \ln f(x)\cdot f(x)^{g(x)} \; + \; \frac{g(x)}{f(x)} f'(x)\cdot f(x)^{g(x)} \implies$$

$$\text{reordenando y simplificando} \implies \left(f(x)^{g(x)}\right)' = g(x)\cdot f(x)^{g(x)-1}\cdot f'(x) \; + \; f(x)^{g(x)}\cdot \ln f(x)\cdot g'(x)$$

Así nos queda una fórmula que aparentemente combina **potencial** y **exponencial**:

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = \underbrace{g(x)\cdot f(x)^{g(x)-1}\cdot f'(x)}_{\text{Potencial}} \; + \; \underbrace{f(x)^{g(x)}\cdot \ln f(x)\cdot g'(x)}_{\text{Exponencial}}$$

Ejemplos:

Fórmula:

$$f(x) = x^{\sin x} \implies f'(x) = \sin x \cdot x^{\sin x - 1}\cdot 1 \; + \; x^{\sin x}\cdot \ln x \cdot \cos x =$$
$$= x^{\sin x - 1}\sin x + x^{\sin x}\cos x \cdot \ln x$$

Procedimiento:

$$f(x) = x^{\sin x} \implies \ln f(x) = \ln x^{\sin x} \implies \ln f(x) = \sin x \cdot \ln x \implies$$
$$\implies (\ln f(x))' = (\sin x \cdot \ln x)' \implies$$
$$\implies \frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \cdot \ln x \; + \; \frac{\sin x}{x} \implies$$
$$\implies f'(x) = f(x)\cdot \left(\cos x \cdot \ln x \; + \; \frac{\sin x}{x}\right) \implies$$
$$\implies f'(x) = x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x \; + \; \frac{\sin x}{x}\right) \implies$$
$$\implies f'(x) = x^{\sin x - 1}\sin x + x^{\sin x}\cos x \cdot \ln x$$

DERIVADA POTENCIAL-EXPONENCIAL

Fórmula: $f(x) = x^{x+1} \implies f'(x) = (x+1)\cdot x^x + x^{x+1}\ln x = x^x \cdot (x+1+x\ln x)$

Procedimiento:

$$
\begin{aligned}
f(x) = x^{x+1} \implies \ln f(x) = \ln x^{x+1} \implies \ln f(x) = (x+1)\cdot \ln x \quad &\implies \\
\implies (\ln f(x))' = ((x+1)\cdot \ln x)' \quad &\implies \\
\implies \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + \frac{x+1}{x} \quad &\implies \\
\implies f'(x) = f(x)\cdot\left(\ln x + \frac{x+1}{x}\right) \quad &\implies \\
\implies f'(x) = x^{x+1}\left(\ln x + \frac{x+1}{x}\right) \quad &\implies \\
\implies f'(x) = x^x \cdot (x+1+x\ln x) &
\end{aligned}
$$

CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD: Obtén los valores de a y b para que f sea continua y derivable en todos los números reales:

$$a)\ f(x)=\begin{cases}2x^2-x & si\ \ x<1\\ ax+b & si\ \ x\geq 1\end{cases}$$

f es una función a trozos donde: $f_1(x) = 2x^2 - x$ y $f_2(x) = ax + b$

- <u>$Si\ \ x \neq 1$: **CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD**</u>
  - Si x < 1, f es continua y derivable ($f_1(x)$ función cuadrática)
  - Si x > 1, f es continua y derivable ($f_2(x)$ función lineal)

Entonces $f\ continua\ y\ derivable\ en\ \mathbb{R} - \{1\}$ **(1)**

- <u>$Si\ \ x = 1$:</u>
  - **CONTINUIDAD:**

$$f\ continua\ en\ \ x = 1 \iff \exists \lim_{x\to 4} f(x) = f(1)$$

  - Calculamos el valor de la función en 1 y los límites laterales e igualamos:

$$\left.\begin{array}{l}
\cdot \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f_1(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 2x^2 - x = 2 - 1 = 1 \\[2ex]
\cdot \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f_2(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} ax + b = a + b \\[2ex]
\cdot f(1) = f_1(1) = ax + b = a + b
\end{array}\right\} \Longrightarrow a + b = 1$$

Entonces $si\ \ a + b = 1,\ f\ es\ continua\ en\ \ x = 1$ **(2a)**

- **DERIVABILIDAD:**

$$f \ derivable \ en \ x = 1 \Longleftrightarrow f^{'-}(1) = f^{'+}(1) \Longleftrightarrow f_1'(1) = f_2'(1)$$

- Derivamos la función (derivamos cada uno de sus trozos):

$$f'(x) = \begin{cases} f_1'(x) = (2x^2 - x)' = 4x - 1 & si \ x < 1 \\ f_2'(x) = (ax + b)' = a & si \ x > 1 \end{cases}$$

- Calculamos en x=1 el valor de las derivadas por ambos lados e igualamos:

$$\left. \begin{array}{l} \cdot f^{'-}(1) = f_1'(1) = 4 \cdot 1 - 1 = 3 \\ \\ \cdot f^{'+}(1) = f_2'(1) = a \end{array} \right\} \Longrightarrow \ a = 3$$

Entonces $si \ a = 3, \ f \ es \ derivable \ en \ x = 1$ **(2b)**

- Para que sea continua y derivable en x=1, deben cumplirse **(2a)** y **(2b)**, y queda un sistema de ecuaciones a resolver:

$$\left. \begin{array}{l} (2a) \\ (2b) \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{r} a + b = 1 \\ a = 3 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow a = 3 \ y \ b = -2$$ **(2)**

- **Para finalizar, si combinamos las conclusiones (1) y (2):**

$$\left. \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \right\} \Longrightarrow \ si \ a = 3 \ y \ b = -2, \ f \ es \ continua \ y \ derivable \ en \ todo \ \mathbb{R}$$

APLICACIÓN DERIVADAS: TANGENTE A UNA CURVA

1 *Hallar las rectas tangentes a la curva $y = \dfrac{x^3 - 3x^2}{9}$ que sean paralelas a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.*

1º. Nos piden tangente a la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

La pendiente de esa bisectriz (y=x) es m=1.

2º. Derivamos la función $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2}{9} \implies f'(x) = \dfrac{3x^2 - 6x}{9}$

3º. La derivada en cada punto nos indica el valor de la pendiente de la curva en ese punto.

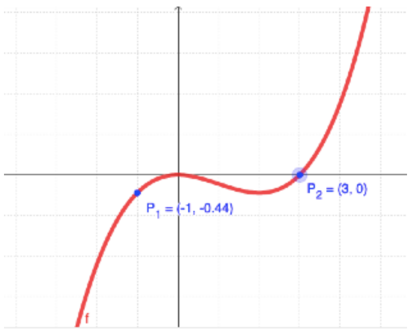
Buscamos los puntos donde la derivada vale 1 igualando la derivada f' a 1:

$$f'(x) = 1 \iff \frac{3x^2 - 6x}{9} = 1 \iff 3x^2 - 6x = 9 \iff x^2 - 2x + 3 = 0 \iff \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

4º. Obtenemos la ordenada de la función en los puntos de abscisa x= –1 y x=3, sustituyendo esos valores en f(x)

$$f(-1) = \frac{(-1)^3 - 3\cdot(-1)^2}{9} \implies f(1) = -\frac{4}{9}$$

$$f(3) = \frac{3^3 - 3\cdot 3^2}{9} \implies f(3) = 0$$



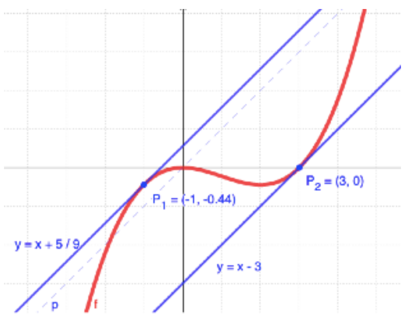
Los puntos de tangencia son (–1, –4/9) y (3, 0):

5º. Obtenemos las rectas que pasan por esos puntos con pendiente 1 (ecuación punto pendiente $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$

Tangente por (–1, –4/9):

$$y - \frac{-4}{9} = 1\cdot(x - (-1)) \implies y = x + \frac{5}{9}$$

Tangente por (3, 0): $y - 0 = 1\cdot(x - 3) \implies y = x - 3$



El ejercicio, presentado sin las explicaciones detalladas, quedaría como sigue (así un ejemplo sobre cómo se podría presentar en el examen):

1 *Hallar las rectas tangentes a la curva* $y = \dfrac{x^3 - 3x^2}{9}$ *que sean paralelas a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.*

La bisectriz del primer y tercer cuadrante tiene pendiente m=1. Buscamos los puntos donde la función tiene pendiente 1 a través de la derivada:

$$\text{Derivamos: } f(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{9} \Longrightarrow f'(x) = \frac{3x^2 - 6x}{9}$$

$$f'(x) = 1 \Longleftrightarrow \frac{3x^2 - 6x}{9} = 1 \Longleftrightarrow 3x^2 - 6x = 9 \Longleftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

son las abscisas de los puntos de tangencia.

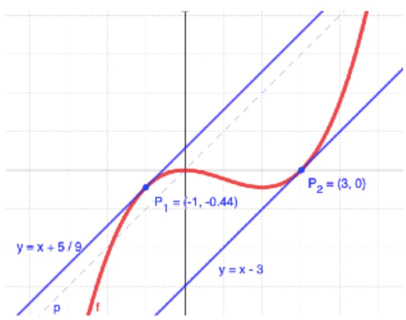
Las ordenadas para las abscisas –1 y 3 son: $\begin{cases} f(-1) = \frac{(-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2}{9} \Longrightarrow f(1) = -\frac{4}{9}, \\ f(3) = \frac{3^3 - 3 \cdot 3^2}{9} \Longrightarrow f(3) = 0 \end{cases}$

Así, los puntos de tangencia buscados son $(-1, \ -\frac{4}{9})$ y $(3, \ 0)$.

Obtenemos ahora las tangentes pedidas:

- Tangente por (–1, –4/9): $y - \dfrac{-4}{9} = 1 \cdot (x - (-1)) \Longrightarrow \boxed{y = x + \dfrac{5}{9}}$
- Tangente por (3, 0): $y - 0 = 1 \cdot (x - 3) \Longrightarrow \boxed{y = x - 3}$

Representación gráfica:

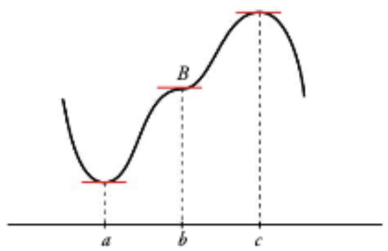


APLICACIÓN DERIVADAS: MONOTONÍA (crecimiento y decrecimiento) Y PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Una de las primeras y principales aplicaciones de la derivación es la **obtención de máximos y mínimos** de funciones (**optimización**).

Si la derivada nos proporciona la pendiente de la tangente a una curva en cada punto, **en los puntos donde hay máximos o mínimos la pendiente tendrá que ser 0.** Pero existen puntos de pendiente 0 que no son máximos o mínimos.

Así, los puntos x donde f'(x)=0 se llaman **puntos singulares**, y pueden ser **máximos relativos** (cambia de creciente a decreciente), **mínimos relativos** (cambia de decreciente a creciente) o **puntos de inflexión** (no cambia el crecimiento, sino la curvatura cóncava a convexa o viceversa).



El punto *B* es singular, pero no es máximo ni mínimo relativo. A estos puntos se les llama "**puntos de inflexión**".

Obtención de los puntos singulares de una función

Esta es una aplicación directa del caso anterior: la obtención de los puntos de derivada cero.

Se llaman **puntos singulares** de una función a los puntos de tangente horizontal, es decir, a los puntos en los que **la derivada es cero.** Entre ellos están los máximos y mínimos relativos, pero puede haber otros.

Las abscisas de los puntos singulares son las soluciones de $f'(x) = 0$.

La identificación de los puntos singulares es crucial para la **representación de la gráfica de la función,** como veremos más adelante. Con ellos podemos, además, determinar los intervalos en los que la curva crece o decrece.

Empezamos calculando máximos y mínimos de funciones sin contexto real. De paso estudiaremos **crecimiento** y **decrecimiento** (**estudio de la monotonía**). Si la derivada es positiva en un punto (f'(x)>0), la pendiente positiva significa que estamos creciendo. Si la derivada es negativa (f'(x)<0, estaremos decreciendo.

Vamos con ejemplos para entenderlo mejor:

Ejemplo 1 explicado: *Estudiar la monotonía de* $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$.

El dominio de una función polinómica es todo R.

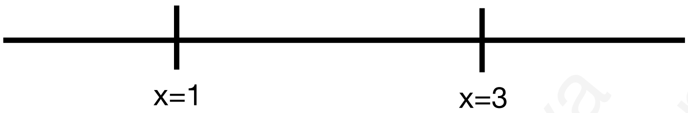
1. Calcular puntos singulares (f'(x)=0)

1.a. Derivar la función: $y' = 3x^2 - 12x + 9$

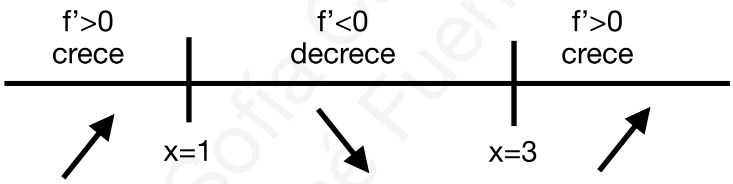
1.b. Igualar la derivada a cero:

$$y' = 0 \iff 3x^2 - 12x + 9 = 0 \iff x^2 - 4x + 3 = 0 \iff \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Estudiamos los intervalos de crecimiento y el decrecimiento con el signo de la derivada, señalamos puntos críticos, y, si los hubiere, puntos de discontinuidad como asíntotas verticales (no los hay en una polinómica):



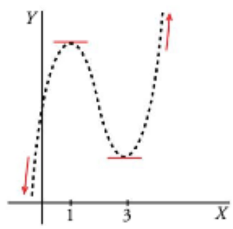
Damos valores en los casos $\begin{cases} si\ \ x < 1 & \implies f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 + 9 = 9 > 0 \implies f\ crece \\ si\ \ 1 < x < 3 & \implies f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = -3 < 0 \implies f\ decrece \\ si\ \ 3 < x & \implies f'(4) = 3 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 9 = 9 > 0 \implies f\ crece \end{cases}$



Concluimos que en x=1 hay un máximo relativo y en x=3 hay un mínimo relativo, e indicamos los intervalos de monotonía tal y como hacíamos en el boletín de repaso de 4º:

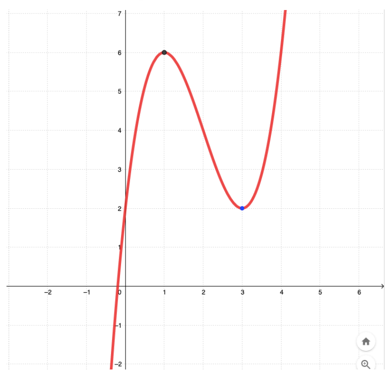
Intervalos de monotonía:

- Crecimiento: $(-\infty,1) \cup (3, +\infty)$
- Decrecimiento: $(1,\ 3)$



Extremos:

- Máximos: relativos en x = 1 ($y = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + 2 = 6$)
- Mínimos: relativos en x = 3 ($y = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 + 2 = 2$).



(el estudio de la monotonía, prácticamente permite representar gráficamente la función, lo veremos con detalle más adelante, pero dejo la gráfica para que entendáis lo sencillo que es representar aproximadamente una polinómica solo con esto)

Escribo el ejemplo sin las explicaciones detalladas:

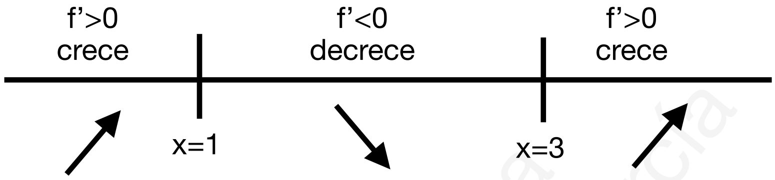
Ejemplo 1 resuelto: *Estudiar la monotonía de* $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$.

El dominio de una función polinómica es todo R.

Derivamos la función: $y' = 3x^2 - 12x + 9$ y calculamos los puntos singulares (f'(x)=0):

$$y' = 0 \iff 3x^2 - 12x + 9 = 0 \iff x^2 - 4x + 3 = 0 \iff \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Estudiamos los intervalos de monotonía de la función teniendo en cuenta los puntos singulares:



$$\text{valores dados:} \begin{cases} si\ \ x < 1 & \Longrightarrow f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 + 9 = 9 > 0 \Longrightarrow f\ crece \\ si\ \ 1 < x < 3 & \Longrightarrow f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = -3 < 0 \Longrightarrow f\ decrece \\ si\ \ 3 < x & \Longrightarrow f'(4) = 3 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 9 = 9 > 0 \Longrightarrow f\ crece \end{cases}$$

Intervalos de monotonía:

- Crecimiento: $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$
- Decrecimiento: $(1,\ 3)$

Extremos:

- Máximos: relativos en x = 1 ($y = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + 2 = 6$)
- Mínimos: relativos en x = 3 ($y = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 + 2 = 2$).

Ejemplo 2: *Estudiar la monotonía de* $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-2x}$.

Estudiamos el dominio de la función. Hay asíntotas verticales donde se anula el denominador: x = 0 y x = 2.

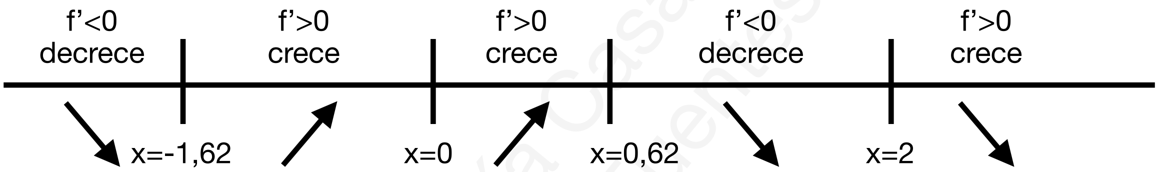
<u>Derivamos la función</u>:

$$y' = \frac{2x(x^2-2x)-(2x-2)(x^2+1)}{(x(x-2))^2} = \frac{2x^3-4x^2-2x^3-2x+2x^2+2}{x^2(x-2)^2} = \frac{-2x^2-2x+2}{x^2(x-2)^2} = \frac{2(x^2-x+2)}{x^2(x-2)^2}$$

y <u>calculamos los puntos singulares</u> (f'(x)=0):

$$y' = 0 \Longleftrightarrow \frac{2(x^2-x+2)}{x^2(x-2)^2} = 0 \Longleftrightarrow x^2-x+2=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1{,}62 \\ x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}62 \end{cases}$$

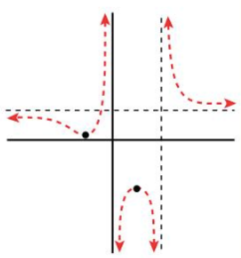
Estudiamos los <u>intervalos de monotonía de la función teniendo en cuenta los puntos singulares y las asíntotas</u>, dando valores intermedios:

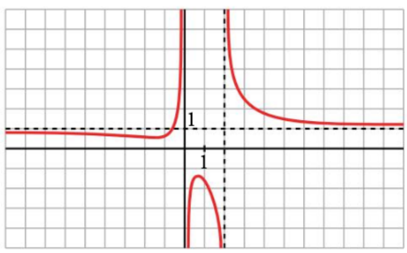


Intervalos de monotonía:
- Crecimiento: $(-1{,}62,\ 0) \cup (0,\ 0{,}62)$
- Decrecimiento: $(-\infty, -1{,}62) \cup (0{,}62,\ 2) \cup (2, +\infty)$

Extremos:
- Máximos: relativos en x = 0,62 ($y = -1{,}62$)
- Mínimos: relativos en x = –1,62 ($y = 0{,}62$) (*valores de y obtenidos con calculadora*)

Señalar, para finalizar, que con esta información ya podemos esbozar bastante bien la gráfica completa de esta función (convendría completar con el estudio de las asíntotas verticales y horizontales (los límites)).





PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Comenzamos ya con ejemplos de ejercicios de optimización consistentes en encontrar los valores máximos y mínimos para diferentes situaciones en las que existe un modelo matemático.

Son problemas muy útiles, permiten minimizar costes de producción y ahorrar materiales y energía, maximizar beneficios, identificar los picos en distintas situaciones, y solucionar muchos otros problemas. Los pasos para enfrentarse a estos problemas son:

PASOS PARA RESOLVERLOS:

1º. Lo primero es **leer el enunciado e interpretarlo correctamente.**

2º. **Encontrar la función a optimizar.** Unas veces vendrá dada directamente o casi directamente, otras veces exigirá un razonamiento o aplicar fórmulas de geometría o de economía sencillas. Para algunas personas es la parte que más cuesta, por falta de entrenamiento en resolución de problemas.

3º. **Calcular los máximos o los mínimos pedidos** igualando la derivada a 0 y estudiando los intervalos de crecimiento o la curvatura en el punto (C”).

4º. **Responder a lo que se pregunta interpretando adecuadamente la solución matemática.**

Ejemplo 3: Problema de números.

Encontrar dos números que sumen 20 y cuyo producto sea máximo.

<u>Solución detallada:</u>

Llamamos x e y a los dos números. Sabemos que $x + y = 20$ (1)

Tenemos que maximizar su producto. Sería la función:

- $$P(x, y) = x \cdot y \quad (2)$$

(se escribe P(x,y) porque de momento usa dos variables, tenemos que conseguir que sea una sola, ya que solo sabemos derivar funciones con una sola variable)

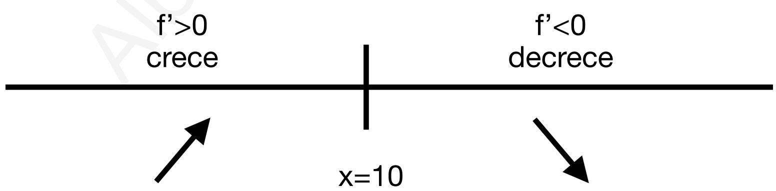
Usando (1), despejamos y: $y = 20 - x$. Sustituimos en (2) y obtenemos la función objetivo: $P(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$, quedando:

- $$P(x) = 20x - x^2$$
  (función a optimizar)

Por lo que sabemos de funciones elementales, se trata de una parábola cóncava que tiene que tener un solo máximo absoluto. Lo **calculamos** a través de la **derivada**:

$$P'(x) = 20 - 2x \qquad P'(x) = 0 \iff 20 - 2x = 0 \iff x = 10$$

Aunque sabemos que es un máximo por ser parábola cóncava, en general necesitaremos verlo con los intervalos de crecimiento o decrecimiento (o con f”).



- Por lo tanto, <u>hay un máximo en x=10</u>. Calculamos y: $y = 20 - 10 = 10$

Y finalizamos respondiendo que **los dos número buscados son 10 y 10, ambos suman 20 y el producto máximo es 10·10=100.**

Ejemplo 4: Problema donde ya nos dan la función objetivo.

El nivel de concentración de un fármaco en sangre viene dado por la función $C(t) = 2^{-t+2} - 2^{-2t+2}$*, siendo t el tiempo en horas. Es necesario saber en qué momento se produce la concentración máxima para diseñar adecuadamente la posología del fármaco y evitar concentraciones excesivas en el organismo. Calcula cuánto tiempo pasa hasta que la concentración del fármaco alcanza su nivel máximo en la sangre del paciente.*

<u>Solución:</u>

En este caso ya nos dan la **función objetivo**:

$$C(t) = 2^{-t+2} - 2^{-2t+2}$$

(es irrelevante que la variable sea t y no x, podríamos usar x en vez de t si quisiéramos y no cambiaría nada, pero prefiero acostumbraros a manejar otras letras como variables)

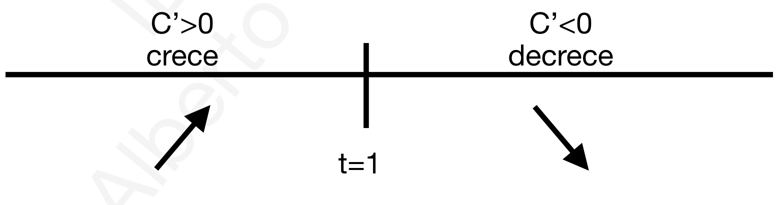
Derivamos y obtenemos puntos singulares:

$$C'(t) = 2^{-t+2} \cdot \ln 2 \cdot (-1) - 2^{-2t+2} \cdot \ln 2 \cdot (-2) =$$
$$= -2^{-t+2} \cdot \ln 2 + 2 \cdot 2^{-2t+2} \cdot \ln 2$$

Igualamos a cero y resolvemos (es una ecuación exponencial, conviene hacer un cambio $s = 2^{-t}$) hasta llegar a que $C'(t) = 0 \iff t = 1$

(*) (se resuelve en la página siguiente)

Estudiamos los intervalos de monotonía alrededor del punto singular:



Por lo tanto, hay un máximo en t=1.

Concluimos respondiendo que **el fármaco alcanza su nivel de concentración máximo en sangre transcurrida una hora desde la inoculación de la dosis**.

(*) Resolución de $C'(t) = 0$:

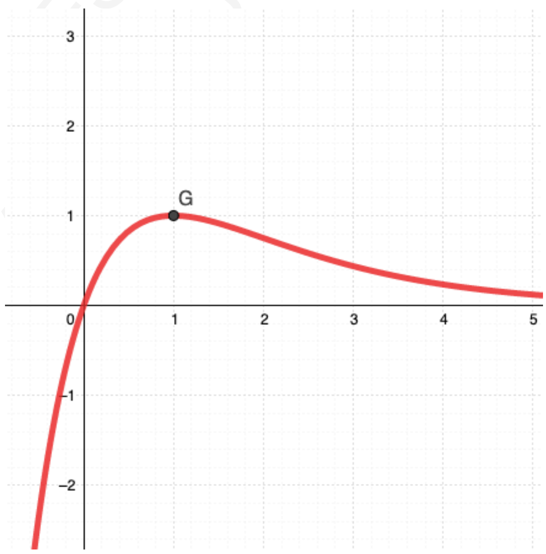
OPCIÓN 1: Agrupando exponentes e igualando potencias de 2:

$$
\begin{aligned}
& -2^{-t+2} \cdot \ln 2 + 2 \cdot 2^{-2t+2} \cdot \ln 2 = 0 && \Longleftrightarrow \text{(simplificar } \ln 2\text{)} \\
\Longleftrightarrow\ & -2^{-t} \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^{-2t+2} = 0 && \Longleftrightarrow \text{(prop. potencias)} \\
\Longleftrightarrow\ & 2^{-2t+2} = 2^{-t+2} && \Longleftrightarrow \text{(inyectividad)} \\
\Longleftrightarrow\ & -2t + 3 = -t + 2 && \Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow\ & t = 1
\end{aligned}
$$

OPCIÓN 2: Separando exponentes y con cambio de variable

$$
\begin{aligned}
& -2^{-t+2} \cdot \ln 2 + 2 \cdot 2^{-2t+2} \cdot \ln 2 = 0 && \Longleftrightarrow \text{(simplificar } \ln 2\text{)} \\
\Longleftrightarrow\ & -2^{-t} \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^{-2t+2} = 0 && \Longleftrightarrow \text{(prop. potencias)} \\
\Longleftrightarrow\ & -4 \cdot 2^{-t} + 2 \cdot 2^2 \cdot (2^{-t})^2 = 0 && \Longleftrightarrow \text{(cambio } s = 2^{-t}\text{)} \\
\Longleftrightarrow\ & -4s + 8s^2 = 0 \Longleftrightarrow s(-4 + 8s) = 0 && \Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow\ & \begin{cases} s = 0 \text{ imposible solución pues } 2^{-t} \neq 0 \ \forall t \\ s = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow 2^{-t} = \frac{1}{2} \implies t = 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

(**) Representación gráfica de la función estudiada:



Ejemplo 5: Problema economía (Beneficio = Ingresos - Costes).

Una cadena de montaje está especializada en la producción de un modelo de motocicleta. Los costes de producción en euros, C(x), se relacionan con el número de motocicletas fabricadas, x mediante la expresión: $C(x) = 10x^2 + 2000x + 250\ 000$

Si el precio de venta de cada motocicleta es de 8000 euros y se venden todas las fabricadas, se pide:
a) Define la función de ingresos que obtiene la cadena de montaje en función de las unidades vendidas.
b) ¿Qué función expresa los beneficios de la cadena?
c) ¿Cuántas motocicletas debe fabricar para maximizar beneficios? ¿A cuánto ascenderán los mismos?

Solución:

Como se venden todas las motocicletas fabricadas, *x* es el número de motocicletas fabricadas y vendidas.

a) La función de ingresos vendrá dada por la expresión: $I(x) = 8000x$

b) En estos ejercicios siempre hay que tener en cuenta la relación Beneficio = Ingresos - Costes, de modo que la **función beneficios** será:

$$B(x) = I(x) - C(x) = -10x^2 + 6000x - 250\ 000$$

c) Calculamos el máximo mediante la **derivada de B(x)**:

$$B'(x) = -20x + 6000$$

Resolvemos $B'(x) = 0 \implies -20x + 6000 = 0 \implies x = 300$

Sabemos que B(x) es una función cuadrática con a<0, parábola cóncava, así que el punto singular es un máximo absoluto. Se puede asegurar con los intervalos de crecimiento, **o también con la segunda derivada que nos indica la curvatura**: $B''(x) = -20 \implies B''(300) = -20 < 0 \implies$ cóncava, el extremo es máximo (<u>un extremo en región cóncava es necesariamente un máximo, en región convexa necesariamente un mínimo</u>)

$$B(300) = -10 \cdot 300^2 + 6000 \cdot 300 - 250\ 000 = 650\ 000 \text{ €}$$

Se maximizan beneficios fabricando 300 unidades. Los beneficios ascienden a 650 000 €.

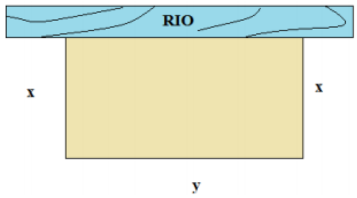
Ejemplo 6: Problema planteamiento geométrico (aplicado).

Un granjero desea vallar un terreno rectangular de pasto adyacente a un río. El pastizal debe tener 180.000 m2 para producir suficiente forraje para su ganado. ¿Qué dimensiones tendrá el terreno rectangular de forma que utilice la mínima cantidad de valla, si el lado que da al río no necesita ser vallado?

<u>Solución:</u>

Siempre conviene dibujar la situación para analizarla:

y: lado paralelo al río *x: lados que llegan al río*



Sabemos que el área tiene que ser 180 000 m^2, luego $x \cdot y = 180\ 000$. (1)

Queremos minimizar la cantidad de valla (perímetro): $V(x) = 2x + y$ (2)

Sustituimos (1) en (2) para obtener la **función objetivo**:

$$V(x) = 2x + \frac{180\ 000}{x}$$

Derivamos: $V'(x) = 2 - \dfrac{180\ 000}{x^2}$ y **calculamos** x en $V'(x) = 0$.

$$0 = 2 - \frac{180\ 000}{x^2} \implies x^2 = 90\ 000 \implies x = \pm 300$$

No tiene sentido la solución negativa, así que queda

$$x = 300,\ y = \frac{180\ 000}{300} = 600$$

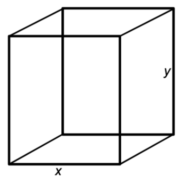
El terreno tendrá que tener unas dimensiones de 600 m en el lado paralelo al río y 300 m en los lados que llegan al río, y se usarán 1200 m de valla.

Ejemplo 7: Problema planteamiento geométrico (aplicado a costes)

ABAU Xuño 2017. Deséxase construír unha caixa de base cadrada, con tapa e cunha capacidade de 80 dm3. Para a tapa e a superficie lateral quérese utilizar un material que custa 2 €/dm2 e para a base outro que custa 3 €/dm2. Calcula as dimensións da caixa para que o seu custo sexa mínimo

Solución:

Dibujamos la caja: x: lado de la base y: altura.



El volumen $80\ dm^3$ es la multiplicación de las tres dimensiones de la caja: $80 = x^2 \cdot y$

Despejamos y: $y = \dfrac{80}{x^2}$ (*)

Tenemos que calcular el coste mínimo. Para ello analizamos el problema:

$$\cdot\, 2\ €/dm^2 \left\{ \begin{array}{l} \text{Superficie lateral: } 4 \cdot xy \\ \text{Superficie tapa: } x^2 \end{array} \right\} \implies \text{cuesta: } 2 \cdot (4xy + x^2) = 8xy + 2x^2$$

$$\cdot\, 3\ €/dm^2 \ \left\{ \text{Superficie base: } x^2 \right\} \implies \text{cuesta: } 3x^2$$

La función coste será, sumando ambas: $C(x, y) = 5x^2 + 8xy$ (**)

Sustituyendo (*) en. (**) obtenemos la **función objetivo:**

$$C(x) = 5x^2 + 8x\frac{80}{x^2} \implies C(x) = 5x^2 + \frac{640}{x}$$

Derivamos: $C'(x) = 10x - \dfrac{640}{x^2}$ y **resolvemos** $C'(x) = 0$

Obtenemos $x = \sqrt[3]{64} = 4$ y comprobamos que se trata de un mínimo con los intervalos de monotonía o con la segunda derivada:

$C''(x) = 10 + \dfrac{1280}{x^3} \implies C''(4) > 0 \implies$ convexa en 4, es un mínimo

Por lo tanto, las dimensiones para coste mínimo son 4 dm de base y 5 dm de altura.

Funciones reales de variable real.

ASPECTOS A ESTUDIAR:

1. Dominio - dónde está definida la función (valores de x sobre los que hay gráfica)

El dominio de una función son los valores de x para los que está definida esa función. El dominio se puede restringir:

- Indicándolo en un enunciado,
- Por el contexto real de un modelo matemático
- **Por expresiones matemáticas en las que x no pueda tomar algún valor (dividir por cero, raíz par de expresiones negativas, o logaritmos de expresiones que puedan dar cero o negativo)**. En los demás casos, $\mathbf{Dom(f)} = \mathbb{R}$

Ejemplos:

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2-6x+5} \implies \mathbf{Dom(f)} = \mathbb{R} - \{\mathbf{1,5}\}$$

$$f_2(x) = \sqrt{2x-6} \implies 2x-6 \geq 0 \implies 2x \geq 6 \implies x \geq 3 \implies \mathbf{Dom(f)} = [\mathbf{3}, +\infty)$$

$$f_3(x) = \log_5(2x+4) \implies 2x+4 > 0 \implies x > -2 \implies \mathbf{Dom(f)} = (-\mathbf{2}, +\infty)$$

$$f_4(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-9} \implies \mathbf{Dom(f)} = (\mathbf{1}, +\infty) - \{-\mathbf{3}, \mathbf{3}\} = (\mathbf{1}, \mathbf{3}) \cup (\mathbf{3}, +\infty)$$

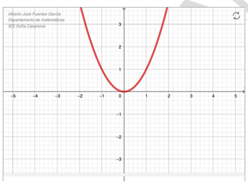
2. Simetrías - cambiamos todas las x por -x y comprobamos.

Estudiar la simetría nos permite conocer mucho sobre la gráfica de la función, y detectar errores si los demás cálculos no cuadran con la simetría estudiada (dominio, asíntotas, máx/mín…)

$f(-x) = f(x)$	Simetría PAR - EJE OY
$f(-x) = -f(x)$	Simetría IMPAR - Origen (0,0)
$f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$	NO SIMÉTRICA

Ejemplos:

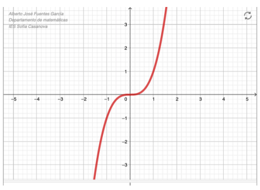
$f(x) = x^2$



$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

PAR - EJE OY

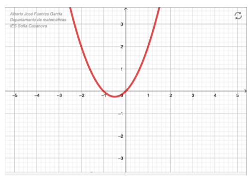
$f(x) = x^3$



$f(-x) = (-x)^3 = -x^2 = -f(x)$

IMPAR - ORIGEN

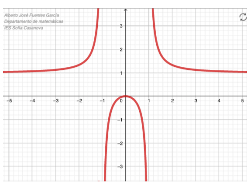
$f(x) = x^2 + x$



$f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$

NO SIMÉTRICA

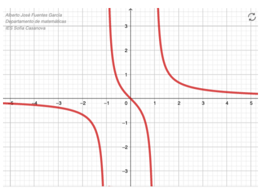
$f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$



$f(-x) = f(x)$

PAR - EJE OY

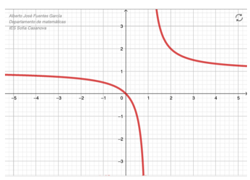
$f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$



$f(-x) = -f(x)$

IMPAR - ORIGEN

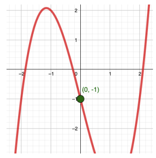
$f(x) = \dfrac{x^2+x}{x^2-1}$



$f(-x) \neq f(x)$ Y $f(-x) \neq -f(x)$

NO SIMÉTRICA

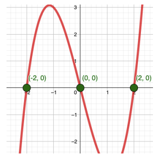
3. Corte con los ejes



EJE OY: Hacemos x=0 y obtenemos f(0). Punto de corte con el eje OY es (0, f(0))

Ejemplo:
$f(x) = x^3 - 4x - 1 \implies f(0) = -1 \implies$ CORTE EN $(0, -1)$

EJE OX: Hacemos y=f(x)=0 y resolvemos la ecuación para saber los valores de x $(x_0, 0), (x_1, 1)\ldots$
Si es simétrica, comprobamos que la simetría cuadra con lo calculado.



Ejemplo:
$f(x) = x^3 - 4x \implies f(x) = 0 \implies$
$\implies 0 = x^3 - 4x = x(x+2)(x-2) \implies$
$\implies x_0 = -2,\ x_1 = 0,\ x_2 = 2 \implies (-2, 0), (0, 0), (2, 0)$ CORTES

4. Asíntotas (verticales, horizontales, oblícuas)

Haya o no, su estudio nos da información sobre como se comporta la función para poder dibujarla (ya casi permiten dibujar la gráfica en muchos casos).
Tiene que ser coherente con la simetría estudiada.

HORIZONTALES: Calculamos $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
Si es un valor concreto L, la función tendrá una asíntota horizontal en y=L.
Si es infinito, sabemos como se comporta la función cuando x se aleja.

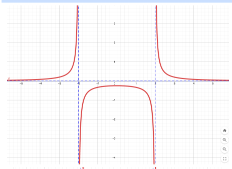
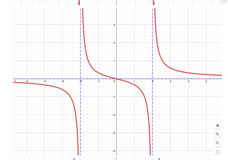
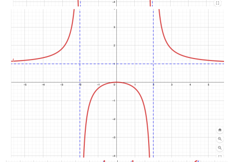
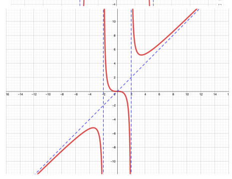
VERTICALES: Calculamos **límites laterales** $\lim_{x \to a^-} f(x)$ y $\lim_{x \to a^+} f(x)$
en puntos $x = a$ donde falla el dominio.
El resultado, en general, $-\infty$ o $+\infty$, aunque podría dar un valor concreto.

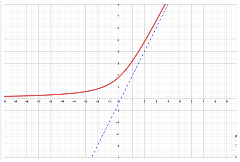
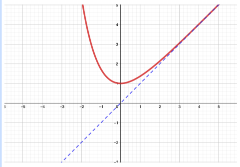
¡CUIDADO CON LOS SIGNOS!

OBLICUAS: Recta $y = mx + n$ donde

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$ (si no es un número, ya no existe asíntota oblicua)

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx)$$

Función	Dominio	A.H.	A.V	A.O.	Gráfica
$f(x) = \frac{1}{x^2-4}$	$\mathbb{R} - \{-2,2\}$	$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ $y = 0$	$x=-2\begin{cases}\lim_{x\to-2^-} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x\to-2^+} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty\end{cases}$ $x=2\begin{cases}\lim_{x\to2^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x\to2^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty\end{cases}$	NO (horizonal por ambos lados)	
$f(x) = \frac{x}{x^2-4}$	$\mathbb{R} - \{-2,2\}$	$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ $y = 0$	$x=-2\begin{cases}\lim_{x\to-2^-} f(x) = \frac{-2}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x\to-2^+} f(x) = \frac{-2}{0^-} = +\infty\end{cases}$ $x=2\begin{cases}\lim_{x\to2^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x\to2^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty\end{cases}$	NO (horizonal por ambos lados)	
$f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$	$\mathbb{R} - \{-2,2\}$	$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$ $y = 1$	$x=-2\begin{cases}\lim_{x\to-2^-} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x\to-2^+} f(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty\end{cases}$ $x=2\begin{cases}\lim_{x\to2^-} f(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x\to2^+} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty\end{cases}$	NO (horizonal por ambos lados)	
$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$	$\mathbb{R} - \{-2,2\}$	$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ NO HAY	$x=-2\begin{cases}\lim_{x\to-2^-} f(x) = \frac{-8}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x\to-2^+} f(x) = \frac{-8}{0^-} = +\infty\end{cases}$ $x=2\begin{cases}\lim_{x\to2^-} f(x) = \frac{8}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x\to2^+} f(x) = \frac{8}{0^+} = +\infty\end{cases}$	$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ $n = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx = 0$ $y = x$	

Función	Dominio	A.H.	A.V	A.O.	Gráfica
$f(x) = x + \sqrt{x^2+4}$	$\mathbb{R}$	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $y = 0$ (solo $-\infty$)	NO	$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ (en -inf da 0, no hay) $n = \lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = 0$ $y = 2x$	
$f(x) = x + e^{-x}$	$\mathbb{R}$	$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$	NO	$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ (en -inf da +inf, no hay) $n = \lim_{x\to+\infty} f(x) - x$ $y = x$	

5. Intervalos de crecimiento y decrecimiento (monotonía) 6. Máximos y mínimos relativos

IGUAL QUE OPTIMIZACIÓN. Derivamos la función e igualamos a cero para obtener los puntos críticos. Sobre la recta real, marcamos los puntos donde falla el dominio y los puntos críticos recién obtenidos y comprobamos el signo de la derivada, igual que en problemas de optimización, para conocer los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Así ya quedan también definidos los máximos y mínimos.

7. Intervalos de concavidad y convexidad (curvatura) 8. Puntos de inflexión

Igual que los intervalos de crecimiento y decrecimiento, pero con la segunda derivada.
Un punto de inflexión es aquel en el que hay cambio de cóncava a convexa o de convexa a cóncava (candidatos aquellos en los que $f'' = 0$)

Recordamos:
$y = x^2 \implies y'' = 2 > 0$ CONVEXA si $f'' > 0$
$y = -x^2 \implies y'' = -2 < 0$ CÓNCAVA si $f'' < 0$

9* Periodicidad (solo en funciones trigonométricas)
Seno o coseno periódicas de periodo $T = 2\pi$, tangente de período $T = \pi$, y otras trigonométricas.