## INTEGRALES INMEDIATAS (SIN REVISAR ERRATAS Y ERRORES)

- **POTENCIALES (y caso logaritmo):**

Si $n \neq -1 \implies \displaystyle\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$

Si $n = -1 \implies \displaystyle\int \frac{1}{x} \, dx = \int x^{-1} \, dx = \ln|x| + C.$ (OJO CON LA LOGARÍTMICA)

- **POTENCIALES + LINEALIDAD => POLINÓNIMCAS**

(Ejemplo con polinomio genérico de grado 3):

$$\int (ax^3 + bx^2 + cx + d)\, dx = a\int x^3\, dx + b\int x^2\, dx + c\int x\, dx + d\int dx =$$
$$= \frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2} + dx + C$$

- **CONVERTIBLES A POTENCIALES (ejemplos):**

a) $\displaystyle\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C$

b) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{\sqrt[3]{5x}}\, dx = \frac{3}{\sqrt[3]{5}} \int x^{2-\frac{1}{3}}\, dx = \frac{3}{\sqrt[3]{5}} \int x^{\frac{5}{3}}\, dx = \frac{3x^{\frac{8}{3}}}{\sqrt[3]{5}\,\frac{8}{3}} + C = \frac{9\sqrt[3]{x^8}}{8\sqrt[3]{5}} + C$

c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^5}}\, dx = \int \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^5}} + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^5}} \right) dx = \int \left( \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{5}{2}}} + \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{5}{2}}} \right) dx =$

$\displaystyle= \int x^{-2}\, dx + \int x^{-\frac{11}{6}}\, dx = \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{-\frac{5}{6}}}{-\frac{5}{6}} + C = -\frac{1}{x} - \frac{6}{5\sqrt[6]{x^5}} + C$

- **RACIONALES SENCILLAS (sin método de descomposición)**

Si grado numerador $\geq$ grado denominador, simplificamos (caso muy simple) o efectuamos la división de polinomios:

a) $\displaystyle\int \frac{5x^3 + 2x^2 - \sqrt{2}x + \sqrt{3}}{x}\, dx = \int \left( 5x^2 + 2x - \sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{x} \right) dx =$

$\displaystyle= \frac{5x^3}{3} + \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} - \sqrt{2}x + \sqrt{3}\ln|x| + C$

b) $\displaystyle\int \frac{2x^4 - 6x^3 + 5x}{x+2}\, dx =$ * descomponemos: $\displaystyle\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ * =

$$= \int \left(2x^3 - 10x^2 + 20x - 35 + \frac{70}{x+2}\right) dx =$$

$$= \frac{2x^4}{4} - \frac{10x^3}{3} + \frac{20x^2}{2} - 35x + 70 \ln|x+2| + C$$

(Faltaría simplificar esas fracciones, no lo hago para no extender más este resumen)

- **AJUSTE DE CONSTANTES EN POTENCIALES (regla de la cadena)**

Expresiones potenciales sencillas requieren ajustes de constantes (en rojo):

a) $\displaystyle\int \frac{3}{(2x-1)^2}\, dx = 3\int (2x-1)^{-2}\, dx = \frac{3}{2}\int 2(2x-1)^{-2}\, dx =$

$$= \frac{3}{2}\frac{(2x-1)^{-1}}{-1} + C = -\frac{3}{2(2x-1)} + C$$ (la derivada de (2x-1) es 2)

b) $\displaystyle\int (\sqrt{5}x - 3)^4\, dx = \frac{(\sqrt{5}x-3)^5}{5\sqrt{5}} + C$ (en menos pasos que el anterior)

- **OTRAS INTEGRALES INMEDIATAS**

TRIGONOMÉTRICAS:

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\, dx = \sin x + C$$

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = \int \frac{-(\cos x)'}{\cos x}\, dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + C \qquad \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arccos x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x + C$$

EXPONENCIALES (las logarítmicas se hacen por partes):

$$\int e^x\, dx = e^x + C \qquad \int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Ejemplo:

$$\int \left(5\cos x + 3^x\right) dx = 5\sin x + \frac{3^x}{\ln 3} + C$$

- **MÁS AJUSTES DE CONSTANTES:**

Igual que con las potenciales, en expresiones similares a las integrales anteriores requieren ajustes de constantes:

Ejemplo con arcoseno: (ajuste de constante en rojo)

$$\int \frac{1}{\sqrt{16-9x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{16\left(1-\frac{9x^2}{16}\right)}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{16}}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3x}{4}\right)^2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\cancel{4}}\,\frac{\cancel{4}}{3}\int \frac{3}{4}\,\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3x}{4}\right)^2}}\,dx = \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{3x}{4}\right) + C$$

- **REGLA DE LA CADENA Y CAMBIO DE VARIABLE:**

Teniendo en cuenta la regla de la cadena, podemos intentar identificar a simple vista si en una integral aparece. Si no la logramos ver, o por comodidad, podemos hacer un cambio de variable:

a1) $\displaystyle\int \sin^4 x \cos x\,dx = \int \sin^4 x(\sin x)'\,dx = \frac{\sin^5 x}{5} + C$

(directamente vemos que ese coseno es la derivada del seno, y se puede usar $\displaystyle\int f^4 \cdot f'\,dx = \frac{f^5}{5} + C$ (potenciación con regla de la cadena))

a2) Si no lo vemos directamente, hacemos el cambio: $\begin{cases} u = \sin x \\ du = \cos x\,dx \end{cases}$ y queda:

$$\int \sin^4 x \cos x\,dx = \int u^4\,du = \frac{u^5}{5} + C = \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

b) Otro ejemplo de mayor complejidad:

$$\int e^{\sqrt{x^2-2x}} \cdot \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}\,dx = \int e^u\,du = e^u + C = e^{\sqrt{x^2-1}} + C$$

Vemos que el exponente de la exponencial aparece también en la fracción, e intentamos el cambio: $\begin{cases} u = \sqrt{x^2-2x} \\ du = \dfrac{\cancel{2}x-\cancel{2}^{1}}{\cancel{2}\sqrt{x^2-2x}}\,dx \end{cases}$

**CAMBIO PARA ELIMINAR RAÍCES QUE ESTORBAN**. Si en una integral hay raíces que no se resuelven de forma potencial, ni con arcoseno, ni vemos a simple vista regla de la cadena u otra sustitución clara, tratamos de eliminarlas con cambios del siguiente tipo:

a) $$\int x\sqrt{x-5}\,dx = \begin{pmatrix} u^2 = x-5 \\ 2u\,du = dx \end{pmatrix} = \int (u^2+5)\sqrt{u^2}\cdot 2u\,du = 2\int (u^4+5u^2)\,du =$$

$$= \frac{2u^5}{5} + \frac{10u^3}{3} + C = \frac{2\sqrt{(x-5)^5}}{5} + \frac{10\sqrt{(x-5)^3}}{3} + C$$

b) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \begin{pmatrix} x = u^6 \\ dx = 6u^5\,du \end{pmatrix} = \int \frac{6u^5du}{\sqrt{u^6}+\sqrt[3]{u^6}} = 6\int \frac{u^5du}{u^3+u^2} = \text{(1)}$$

$$= 6\int \frac{u^3du}{u+1} = (2) = 6\int \left(u^2 - u + 1 - \frac{1}{u+1}\right) du =$$

$$= \frac{6u^3}{3} - \frac{6u^2}{2} + 6u - \ln|u+1| + C = \text{ ((3) deshacemos el cambio } \left(u = \sqrt[6]{x}\right))$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - \ln|\sqrt[6]{x}+1| + C$$

Para este ejercicio, tuvimos que aplicar varios recursos usados anteriormente:

El cambio para eliminar las raíces elevando u al MCM de los índices.
(1) Antes de proceder con cualquier método, simplificamos la expresión
(2) Aparece una integral racional, descomponemos dividiendo polinomios
(3) Deshacemos el cambio despejando u
En la expresión final simplificamos fracciones y raíces/potencias.

---

* algunas integrales del libro requieren cambios usando identidades trigonométricas. No nos centraremos mucho, pero para que reconozcáis el tipo:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \begin{pmatrix} x = \sin u \\ dx = \cos u\,du \end{pmatrix} = \int \sqrt{1-\sin^2 u}\cos u\,du = \int \sqrt{\cos^2 u}\cos u\,du = \int \cos^2 u\,du =$$

*aquí usamos fórmula del ángulo mitad:* $\cos^2 u = \dfrac{1+\cos 2u}{2}$

$$= \int \frac{1+\cos 2u}{2}\,du = \int \frac{1}{2}\,du + \frac{1}{2}\int \frac{\cos 2u}{2}\,du = \frac{u}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin 2u}{2} + C = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{\sin 2\arcsin x}{4} + C$$

***NOTA****: Estos apuntes resumen las ideas trabajadas en clase para resolver integrales inmediatas y algunos cambios de variable. Son solo una referencia de apoyo. La única forma de dominar la integración es practicando mucho, por eso lo recomendable es hacer el mayor número de ejercicios posible.*

*En el Aula virtual tenéis el solucionario del libro (recomiendo hacer todas las integrales de los pies de página de las páginas tratadas, y también las del final del tema). También recomiendo practicar las integrales de los boletines del Aula virtual, por ejemplo, el que contiene las 200 integrales (las 81 primeras son inmediatas o con cambio de variable)*

***NOTA 2****: Los apuntes son de muy reciente creación, y no ha dado tiempo a depurarlos adecuadamente. Es posible que contengan alguna errata.*

**INTEGRALES POR PARTES (SIN REVISAR ERRATAS Y ERRORES)**

$$\boxed{\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du}$$

- **POTENCIAL * EXPONENCIAL (u = potencial)**

$$\int x^n e^x\,dx \Longrightarrow \begin{cases} u = x^n & \Longrightarrow \quad du = n x^{n-1}\,dx \\ dv = e^x\,dx & \Longrightarrow \quad v = e^x \end{cases}$$

- **POTENCIAL * SENO o COSENO (u = potencial)**

$$\int x^n \sin x\,dx \Longrightarrow \begin{cases} u = x^n & \Longrightarrow \quad du = n x^{n-1}\,dx \\ dv = \sin x\,dx & \Longrightarrow \quad v = -\cos x \end{cases}$$

- **POTENCIAL * LOGARITMO (o solo log) (OJO, AQUÍ LLAMAMOS u AL LOGARTIMO)**

Si $n \neq -1 \Longrightarrow$ $$\int x^n \ln x\,dx \Longrightarrow \begin{cases} u = \ln x & \Longrightarrow \quad du = \frac{1}{x}\,dx \\ dv = x^n\,dx & \Longrightarrow \quad v = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}$$

OJO: Si $n = -1$ es inmediata $(\ln x)' = \frac{1}{x} \Longrightarrow \boxed{\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{\ln^2 x}{2} + C}$

SI NO SE VE HACER CAMBIO u=ln(x)

- **FUNCIONES ARCO (u = función arco)**

$$\int \arcsin x\,dx \Longrightarrow \begin{cases} u = \arcsin x & \Longrightarrow \quad du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ dv = dx & \Longrightarrow \quad v = x \end{cases}$$

$$\int \arctan x\,dx \Longrightarrow \begin{cases} u = \arctan x & \Longrightarrow \quad du = \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ dv = dx & \Longrightarrow \quad v = x \end{cases}$$

- RECURSIVAS/CÍCLICAS **EXPONENCIAL * SEN O COS || SEN^2 O COS^2** RECURSIVAS/CÍCLICAS

La integral vuelve a aparecer en algún momento al aplicar la fórmula sucesivamente. Lo vemos con un ejemplo:

$$I = \int e^x \sin x \, dx = \begin{pmatrix} \sin x = u & \Longrightarrow & \cos x \, dx = du \\ e^x \, dx = dv & \Longrightarrow & e^x = v \end{pmatrix}$$

$$I = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx = \begin{pmatrix} \cos x = u & \Longrightarrow & -\sin x \, dx = du \\ e^x \, dx = dv & \Longrightarrow & e^x = v \end{pmatrix} =$$

$$I = e^x \sin x - \left( e^x \cos x + \boxed{\int e^x \sin x \, dx} \right) = e^x \sin x - \left( e^x \cos x + \boxed{I} \right) + C$$

(¡APARECE INTEGRAL ORIGINAL $I = \int e^x \sin x \, dx$!)

Despejamos I pasando al mismo lado en en :

$$I = e^x \sin x - e^x \cos x - I + C \implies 2I = e^x \sin x - e^x \cos x + C \implies$$

$$\implies \mathbf{I} = \frac{\mathbf{e^x \sin x - e^x \cos x}}{\mathbf{2}} + \mathbf{C}$$

También se pueden resolver así $\int \sin^2 x \, dx$ y $\int \cos^2 x \, dx$, haciendo, por ejemplo, en el segundo caso $\begin{pmatrix} \cos x = u \\ dv = \cos x \, dx \end{pmatrix}$ y luego $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ (hecho en el libro)

EJEMPLOS EN CLASE Y EN EL LIBRO DE TEXTO

***NOTA**: Estos apuntes resumen los métodos de integración por partes más comunes. Son solo una referencia de apoyo. La única forma de dominar la integración es practicando mucho, por eso lo recomendable es hacer el mayor número de ejercicios posible.*

*En el Aula virtual tenéis el solucionario del libro (recomiendo hacer todas las integrales de los pies de página de las páginas tratadas, y también las del final del tema)*

*También recomiendo practicar las integrales de los boletines del Aula virtual, por ejemplo, el que contiene las 200 integrales (después de la 81 hay integrales por partes)*

***NOTA 2**: Los apuntes son de muy reciente creación, y no ha dado tiempo a depurarlos adecuadamente. Es posible que contengan alguna errata.*

En general, siempre se intenta comprobar si la expresión inicial se puede simplificar. Los demás métodos permiten obtener integrales fáciles de resolver como potencial/logaritmo/arcotangente.

**CASOS SENCILLOS (SIMPLIFICABLES Y DENOMINADOR GRADO 1)**

Ya vistos en inmediatas (fracciones simplificables o denominador de grado 1 => polinomio (potencial+logaritmo)

a) SIMPLIFICABLE: $\displaystyle\int \frac{5x^3+2x^2-\sqrt{2}x+\sqrt{3}}{x}\,dx = \int\left(5x^2+2x-\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{x}\right)dx =$

$$= \frac{5x^3}{3}+\frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}}-\sqrt{2}x+\sqrt{3}\ln|x|+C$$

b) GRADO Q(x)=1: $\displaystyle\int \frac{2x^4-6x^3+5x}{x+2}\,dx =$ * descomponemos: $\displaystyle\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$ * =

$$= \int\left(2x^3-10x^2+20x-35+\frac{70}{x+2}\right)dx =$$

$$= \frac{2x^4}{4}-\frac{10x^3}{3}+\frac{20x^2}{2}-35x+70\ln|x+2|+C$$

(Faltaría simplificar esas fracciones, no lo hago para no extender más este resumen)

***Veremos a continuación cómo hacer integrales con raíces simples en el denominador e integrales con raíces múltiples, por separado. Si hay ambas, se combinan los métodos:***

**RAÍCES REALES SIMPLES EN DENOMINADOR**

Una vez que tengamos grado(P(x))<grado(Q(x)) (en caso contrario, división de polinomios) descomponemos el denominador: $Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_k)$ siendo $a_n$ las raíces.

Transformamos la integral:

$$\int\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)dx = \int\left(\frac{P(x)}{(x-a_1)\ldots(x-a_k)}\right)dx = \int\left(\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_k}{x-a_k}\right)dx$$

Efectuamos esa suma de fracciones: $\displaystyle\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_k}{x-a_k} =$

$$= \frac{A_1(x-a_2)\ldots(x-a_k)+\ldots+A_k(x-a_1)\ldots(x-a_{k-1})}{(x-a_1)\ldots(x-a_k)} = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Igualamos numeradores: $A_1(x-a_2)\ldots(x-a_k)+\ldots+A_k(x-a_1)\ldots(x-a_{k-1}) = P(x)$

Calculamos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ dando valores a x (conviene dar los valores $a_1, a_2, \ldots, a_k$).

Lo vemos con un ejemplo en la página siguiente:

a) $I = \int \dfrac{x^3 + 4x^2 - 10x + 7}{x^3 - 7x - 6}\, dx =$ * descomponemos: $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$ * =

$$= \int \left( 1 + \frac{4x^2 - 3x + 13}{x^3 - 7x - 6} \right) dx$$

Factorizamos el denominador: $x^3 - 7x - 6 = (x + 1)(x + 2)(x - 3)$

Descomponemos la fracción:

$$\frac{4x^2 - 3x + 13}{(x + 1)(x + 2)(x - 3)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{x - 3} =$$
$$= \frac{A(x + 2)(x - 3) + B(x + 1)(x - 3) + C(x + 1)(x + 2)}{(x + 1)(x + 2)(x - 3)}$$

Igualamos numeradores:

$$4x^2 - 3x + 13 = A(x + 2)(x - 3) + B(x + 1)(x - 3) + C(x + 1)(x + 2)$$

Ahora damos los valores -1, -2 y 3 (raíces de Q(x)) a x para calcular A, B y C:

$$x = -1 \implies 4(-1)^2 - 3(-1) + 13 = A(-1 + 2)(-1 - 3) + B \cdot 0 + C \cdot 0 \implies$$
$$\implies 20 = -4A \implies \mathbf{A = -5}$$

$$x = -2 \implies 4(-2)^2 - 3(-2) + 13 = A \cdot 0 + B(-2 + 1)(-2 - 3) + C \cdot 0 \implies$$
$$\implies 35 = 5B \implies \mathbf{B = 7}$$

$$x = 3 \implies 4 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 13 = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C(3 + 1)(3 + 2) \implies$$
$$\implies 40 = 20C \implies \mathbf{C = 2}$$

La integral queda: $\displaystyle\int \left( 1 + \frac{-5}{x + 1} + \frac{7}{x + 2} + \frac{2}{x - 3} \right) dx =$

$$= \mathbf{x - 5 \ln|x + 1| + 7 \ln|x + 2| + 2 \ln|x - 3| + C}$$

***NOTA***: *Estos apuntes resumen los métodos de integración de funciones racionales más comunes. Son solo una referencia de apoyo. La única forma de dominar la integración es practicando mucho, por eso lo recomendable es hacer el mayor número de ejercicios posible.*

*En el Aula virtual tenéis el solucionario del libro (recomiendo hacer todas las integrales de los pies de página de las páginas tratadas, y también las del final del tema). También recomiendo practicar las integrales de los boletines del Aula virtual.*

## RAÍCES REALES MÚLTIPLES EN DENOMINADOR

Una vez que tengamos grado(P(x))<grado(Q(x)) (en caso contrario, división de polinomios) descomponemos el denominador: $Q(x) = (x-a)^n$ siendo $a$ la raíz.

Transformamos la integral:

$$\int \left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right) dx = \int \left(\frac{P(x)}{(x-a)^n}\right) dx = \int \left(\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-a)^n}\right) dx$$

Efectuamos esa suma de fracciones: $\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-a)^n} =$

$$= \frac{A_1(x-a)^{n-1} + \ldots + A_{n-1}(x-a) + A_n}{(x-a)^n} = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Igualamos numeradores: $A_1(x-a)^{n-1} + \ldots + A_{n-1}(x-a) + A_n = P(x)$

Calculamos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ dando valores a x. Lo vemos con un ejemplo:

a) Factorizamos denominador:

$$I = \int \frac{2x}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} dx = \int \frac{2x}{(x-1)^3} dx$$

Descomponemos la fracción:

$$\frac{2x}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} = \frac{A(x-1)^2 + B(x-1) + C}{(x-1)^3}$$

Igualamos numeradores:

$$2x = A(x-1)^2 + B(x-1) + C$$

Ahora damos valores a x para calcular A, B y C:

$$x = 1 \implies 2 = C \implies \mathbf{C = 2}$$

$$x = 0 \implies 0 = A - B + C \implies \mathbf{A - B = -2}$$

$$x = 2 \implies 4 = A + B + C \implies \mathbf{A + B = 2}$$

Resolviendo el sistema, queda **A=0, B=2, C=2**. La integral queda:

$$I = \int \frac{2x}{(x-1)^3} dx = \int \left(\frac{0}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3}\right) dx$$

$$= 2\int (x-1)^{-2} dx + 2\int (x-1)^{-3} dx = -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{x-1}} - \frac{\cancel{2}\mathbf{1}}{\cancel{2}\mathbf{(x-1)^2}} + \mathbf{C}$$

---

**NOTA 2**: Los apuntes son de muy reciente creación, y no ha dado tiempo a depurarlos adecuadamente. Es posible que contengan alguna errata.

## RAÍCES COMPLEJAS EN DENOMINADOR (CASO ARCOTANGENTE)

Veremos solo las raíces reales complejas en el denominador cuando se puedan obtener a través de la arcotangente, como integral inmediata ajustando constantes o completando cuadrados. Queda sin ver el último caso general (último tipo de integrales explicado en el libro).

### ARCOTANGENTE AJUSTANDO CONSTANTES

Cuando tenemos una integral racional donde el denominador es de grado 2 sin término en x y no tiene raíces reales, aplicamos la integral arcotangente ajustando constantes si es necesario:

a) $$\int \frac{1}{3x^2+3}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{3}\arctan x + C$$

b) $$\int \frac{1}{9x^2+3}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(\sqrt{3}x)^2+1} = \quad \text{(AJUSTE DE CONSTANTE)}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{3}}\int \frac{\sqrt{3}dx}{(\sqrt{3}x)^2+1} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}x) + C$$

c) $$\int \frac{1}{7x^2+11}\,dx = \frac{1}{11}\int \frac{dx}{(\sqrt{\frac{7}{11}}x)^2+1} = \text{(AJUSTE DE CONSTANTE)}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{\frac{7}{11}}}\int \frac{\sqrt{\frac{7}{11}}dx}{(\sqrt{3}x)^2+1} = \frac{\sqrt{11}}{11\sqrt{7}}\arctan(\sqrt{\frac{7}{11}}x) + C$$

### ARCOTANGENTE COMPLETANDO CUADRADOS

Si el denominador es polinómico de grado 2 completo y no tiene raíces reales, tratamos de obtener la integral arcotangente completando cuadrados. Vemos solo un ejemplo sencillo:

d) $$\int \frac{1}{x^2-4x+5}\,dx = \int \frac{dx}{(x^2-4x+4)-4+5} = \text{(COMPLETAMOS CUADRADOS)}$$

$$= \int \frac{1}{(x-2)^2+1}\,dx = \arctan(x-2) + C$$

e) $$\int \frac{1}{x^2-4x+10}\,dx = \int \frac{dx}{(x^2-4x+4)-4+10} = \text{(COMPLETAMOS CUADRADOS)}$$

$$= \int \frac{1}{(x-2)^2+6}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{\sqrt{6}}\right)^2+1}\,dx = \quad \text{(AJUSTAMOS CONSTANTES)}$$

$$= \frac{1}{6}\frac{\sqrt{6}}{1}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{6}}}{\left(\frac{x-2}{\sqrt{6}}\right)^2+1}\,dx = \frac{\sqrt{6}}{6}\arctan\left(\frac{x-2}{\sqrt{6}}\right) + C$$