CONTINUIDAD

Definición: continuidad en un punto

$$f \text{ es continua en un punto } x = x_0 \iff \begin{cases} (1)\ \exists f(x_0) \\ (2)\ \exists \lim_{x\to x_0} f(x) \\ (3)\ \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \end{cases}$$

NOTA: De forma resumida a veces se escriben, por comodidad, las tres condiciones juntas, como $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, *pero es mejor evitarlo si nos preguntan la definición.*

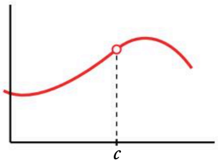
Tipos de discontinuidad[1]**:**

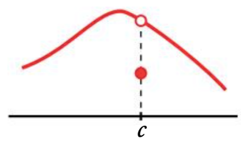
Discontinuidad evitable:

Se produce cuando existe el límite de la función en el punto, pero la función no está definida en ese punto[1] o toma un valor que no coincide con el límite.

Se evita redefiniendo la función en ese punto para que coincida con el valor del límite.

$\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ pero (1) $\nexists f(x_0)$ ó (2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$



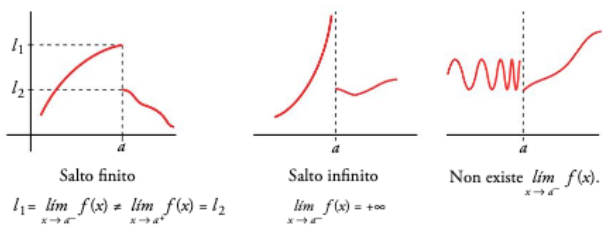


Discontinuidad inevitable:

- de salto finito: los límites laterales en el punto existen pero su valor no coincide.

- de salto infinito: al menos uno de los límites laterales es infinito.

- **no existe algún límite lateral**.



[1] *NOTA: en nivel universitario, con más rigor, se suele hablar de continuidad solo en el dominio, por lo que no se habla de discontinuidad si no está definida la función en el punto.*

Definición: continuidad en un intervalo

Se dice que una función f es continua en un intervalo de $\mathbb{R}$ si es continua en cada punto de ese intervalo.

Teorema de Bolzano

Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$.

Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo, entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$

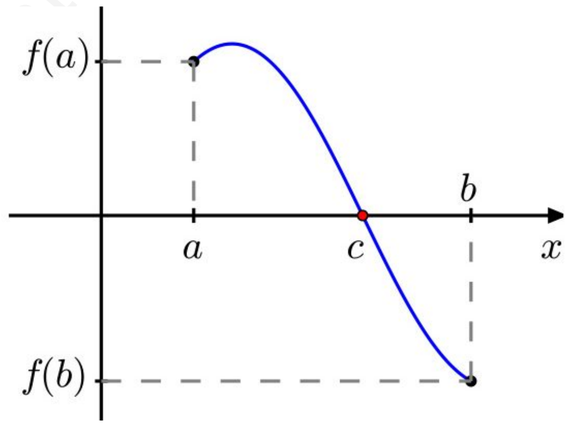
Enunciado reducido:

Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$.

Si $f(a) \cdot f(b) < 0 \implies \exists c \in (a, b) \ / \ f(c) = 0$

Interpretación gráfica:

Si f es continua en un intervalo, se puede dibujar con un solo trazo. Si f toma valores de signo distinto en los extremos de ese intervalo, ese trazo, necesariamente, corta al eje de abscisas.



Teorema de Weierstrass

Si es f una función continua en un intervalo $[a, b]$, entonces tiene un máximo y un mínimo absolutos en ese intervalo.

NOTA: Estos contenidos teóricos se han preguntado en pruebas de las ABAU de Galicia en los últimos años. Además, en el documento de orientaciones para esta materia y en la página de la CIUG podemos leer como objetivos en análisis:
"1. Saber aplicar os conceptos de límite dunha función nun punto e de límites laterais para estudar a continuidade dunha función. Se é descontinua, clasificar a descontinuidade.
2. Continuidade nun intervalo. Teorema de Bolzano.
4. Coñecer a relación entre continuidade e derivabilidade dunha función nun punto. Saber estudar a continuidade e a derivabilidade dunha función definida a anacos."

DERIVABILIDAD

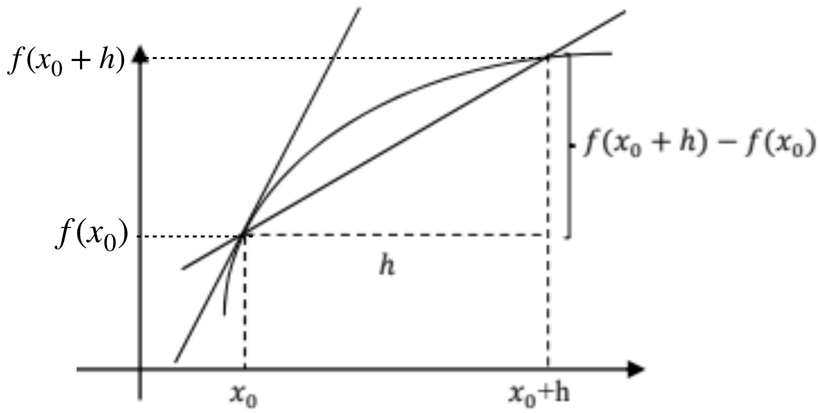
Definición: definición de derivada de una función en un punto

f es derivable en un punto $x = x_0 \iff \exists \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

El valor finito de ese límite se representa como $f'(x_0)$ y se llama derivada de f en x_0

NOTA: f es derivable en un intervalo (a,b) si lo es en cada punto de (a,b).

Interpretación gráfica: derivada como límite de las secantes.



La secante que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0+h, f(x_0+h))$ tiene como pendiente $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (TVM en el intervalo (x_0, x_0+h)).

Cuando reducimos el tamaño del intervalo ($h \to 0$), esa secante se va aproximando a la tangente a la curva en el punto $(x_0, f(x_0))$, hasta, llevado al límite, convertirse en dicha tangente.

Por lo tanto, la derivada de la función en el punto x_0 es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $(x_0, f(x_0))$. Por tanto:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \text{ pte. de la recta tangente en el punto } (x_0, f(x_0))$$

Teorema de Rolle

Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$ y derivable en (a, b).

Si $f(a) = f(b)$, entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$

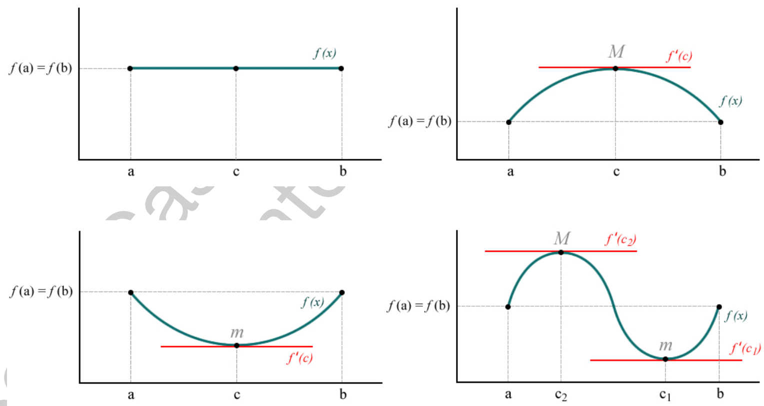
Enunciado reducido:

Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$ y derivable en (a, b).

Si $f(a) = f(b) \implies \exists c \in (a, b)$ / $f'(c) = 0$

Interpretación gráfica:

Cualquier curva dibujada de un solo trazo (continua) y no angulosa (derivable) que tome los mismos valores en los extremos de un intervalo, necesariamente tendrá tangente horizontal en algún punto interior del intervalo.



.

DEMOSTRACIÓN:

Es una consecuencia inmediata del *Teorema de Weierstrass* visto en continuidad: por ser f continua en $[a, b]$, alcanza un máximo y un mínimo absolutos en el intervalo.

Si alcanza el máximo en un extremo y el mínimo en otro, es una función constante, y todos los puntos c del intervalo (a, b) cumplen $f'(c) = 0$.

Si alcanza el máximo o el mínimo absoluto en un punto c del interior del intervalo, $f'(c) = 0$ **C.Q.D.**

Teorema del valor medio del cálculo diferencial (Lagrange)

Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$ y derivable en (a, b).

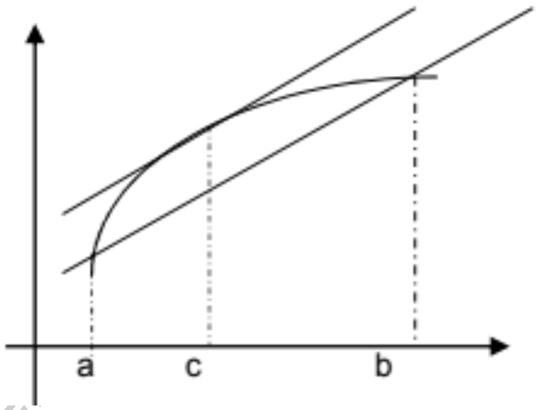
Entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Enunciado reducido:

$$f \text{ continua en } [a, b] \text{ y derivable en } (a, b) \Longrightarrow \exists c \in (a, b) \; / \; f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Interpretación gráfica:

En las hipóteses del teorema, existe algún punto interior al intervalo (a, b) en el que la tangente a la curva es paralela a la cuerda que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.



NOTA: Se demuestra como consecuencia del Teorema de Rolle, a través de una función relacionada con la de partida que cumple sus hipótesis.

Regla de L´Hôpital

Sean f y g funciones continuas en un intervalo $[a, b]$ y derivables en (a, b).

Sea $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = g(x_0) = 0$ y $g'(x) \neq 0$ si $x \neq x_0$.

$$\text{Si } \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \text{ entonces } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Este resultado se puede generalizar para indeterminaciones $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ y para límites infinitos.

NOTA: Estos contenidos teóricos se han preguntado en pruebas de las ABAU de Galicia en los últimos años. Además, en el documento de orientaciones para esta materia y en la página de la CIUG podemos leer como objetivos en análisis:
"3. Determinar as ecuacións da recta tanxente e da normal á gráfica dunha función nun punto.
6. Función derivada. Teoremas de Rolle e do valor medio. Aplicar a regra de L´Hôpital para resolver indeterminacións no cálculo de límites.
7. Aplicar os conceptos de límite e de derivada á resolución de problemas, así como os teoremas relacionados."

CÁLCULO INTEGRAL

Definición: definición de función primitiva

Se dice que una función F es primitiva de otra función f si la derivada de F es f:

$$F \text{ primitiva de } f \Longleftrightarrow F'(x) = f(x)$$

Definición: definición de integral indefinida

Se llama integral indefinida de una función f al conjunto de todas sus primitivas, y se representa como:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$$

donde $f(x)\,dx$ es el integrando, $F(x)$ una primitiva y C la constante de integración.

Propiedades de la integral indefinida:

LINEALIDAD

- La integral de una suma de funciones es igual a la suma de las integrales de esas funciones:

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

- La integral del producto de una constante por una función es igual al producto de la constante por la integral de la función.

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

- En una sola expresión se puede escribir como:

$$\int (kf(x) + lg(x))\,dx = k\int f(x)\,dx + l\int g(x)\,dx$$

Regla de Barrow

Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$ y F una primitiva.

Entonces $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Propiedades de la integral definida:

ADITIVIDAD: Si f es una función continua en un intervalo $[a, b]$, para todo punto $c \in [a, b]$ se cumple que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Teorema fundamental del cálculo integral

Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$. Entonces la función

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

es derivable y su derivada es $F'(x) = f(x), \forall x \in (a, b)$

Teorema del valor medio del cálculo integral

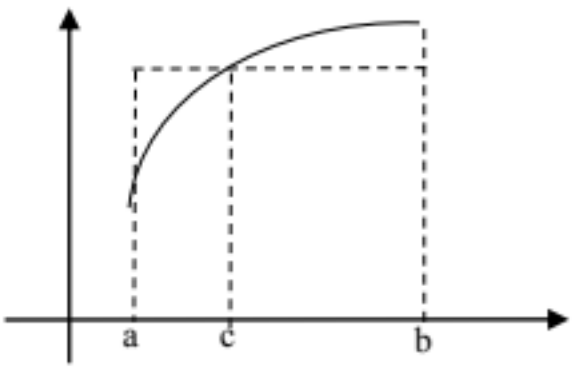
Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$,
entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

Interpretación gráfica:

El área encerrada por la gráfica de una función continua en $[a, b]$, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$, coincide con el área de un rectángulo de base $b - a$ y altura $f(c)$ para al menos un punto c entre a y b.

.



NOTA: Estos contenidos teóricos se han preguntado en pruebas de las ABAU de Galicia en los últimos años. Además, en el documento de orientaciones para esta materia y en la página de la CIUG podemos leer como objetivos en análisis:
"11. Coñecer a propiedade de linealidade da integral definida con respecto ao integrando e a propiedade de aditividade con respecto ao intervalo de integración.
12. Teoremas do valor medio do cálculo integral, teorema fundamental do cálculo integral. Regra de Barrow. Aplicacións."