

Bloque I: Álgebra Lineal

Unidade 1. Matrices.

NOTAS PREVIAS: Esta unidade serve de introducción do bloque de álgebra. Non hai moito que memorizar, son definicións básicas para saber do que imos falar nas próximas 4 unidades.

Contidos importantes de cara ás PAU son os tipos de matrices, e ter claras as operacións con elas coas súas propiedades, aínda que esto será fácil de dominar coa cantidade de exercicios que faremos no curso.

TEORÍA: Aínda que os últimos anos a teoría céntrase no bloque de análise, apareceron como preguntas teóricas no 2001 as propiedades do produto de matrices, no 2002 a definición do produto, e cuestións teórico-prácticas sobre as dimensións nun produto de matrices.

1.1 Definición de matriz de orde $m \times n$. Igualdade de matrices.

Unha **matriz de orde (ou dimensión) $m \times n$** é unha disposición de números agrupados en m filas e n columnas. Denótase como $A_{m \times n}$.

Exemplo 1.1.1: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & \frac{2}{3} \\ -3 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \rightarrow$ Esta matriz ten 3 filas e 2 columnas (diremos que é de **orde 3×2**).

En xeral unha matriz $m \times n$ denótase da seguinte forma:

$$A_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

No exemplo 1.1.1, os elementos serían $a_{11} = 3$, $a_{21} = 1$, $a_{31} = -3$, $a_{12} = 2$, $a_{22} = \frac{2}{3}$, $a_{32} = -\frac{1}{3}$

Dúas matrices son iguais se teñen a mesma orde e os mesmos elementos ($a_{ij} = b_{ij}$, $\forall i, j$).

Exemplo 1.1.2: Calcula x e y para que as matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & x \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & y & 4 \end{pmatrix}$ sexan iguais.

SOL: Igualando termo a termo obtemos $x = 0$ e $y = 3$

1.2 Tipos de matrices: fila, columna, rectangular, cadrada, diagonal, triangular, nula, identidade ou unidade, trasposta, simétrica e antisimétrica.

Matriz fila: A que só ten unha fila, $A_{1 \times n}$.

Exemplo 1.2.1: $A = (-2 \ 0 \ 3)$

Matriz columna: Formada só por unha columna $A_{m \times 1}$.

Exemplo 1.2.2: $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Matriz cadrada: ten tantas filas coma columnas ($A_{n \times n}$ sería matriz cadrada de orde n).

Exemplo 1.2.3: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ é *cadrada de orde 3*

Matriz rectangular: a que non é cadrada.

Exemplo 1.2.4: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & \frac{2}{3} \\ -3 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ é *rectangular*

Para matrices cadradas:

Diagonal da matriz: Son os elementos a_{ii} , (o a_{11} , a_{22} , ...).

Exemplo 1.2.5: en $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, a diagonal é 2, -1, 4

Matriz diagonal: A que ten tódolos elementos iguais a 0 agás os da diagonal.

Exemplo 1.2.6: $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matriz identidade ou unidade: Matriz diagonal no que os elementos da diagonal son todos 1

Exemplo 1.2.7: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Tamén para matrices cadradas:

Matriz triangular superior: Aquela na que todos os elementos situados por debaixo da diagonal son 0.

Exemplo 1.2.8: $T_s = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matriz triangular inferior: Aquela na que todos os elementos situados por enriba da diagonal son 0

Exemplo 1.2.9: $T_i = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Matriz traspuesta: A traspuesta dunha matriz é outra matriz que se obtén cambiando as filas polas columnas. A matriz traspuesta de A denótase por A^t .

Se $A = (a_{ij})_{m \times n}$ entón $A^t = (a_{ji})_{n \times m}$

Exemplo 1.2.10: Sexa $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & \frac{2}{3} \\ -3 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ de orde 3×2 ; a traspuesta é $A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ de orde 2×3

Matriz simétrica: Matriz cadrada que coincide coa súa traspuesta:

$$A = A^t \leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}$$

Exemplo 1.2.11: $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ é *simétrica* (observar simetría respecto a diagonal, ou $a_{ij} = a_{ji}$)

Exemplo 1.2.12: $A = \begin{pmatrix} a & m & n \\ m & b & v \\ n & v & c \end{pmatrix}$ é *simétrica*

Matriz antisimétrica: Matriz cadrada na que a súa oposta coincide coa súa traspuesta:

$$-A = A^t \leftrightarrow -a_{ij} = a_{ji}$$

Exemplo 1.2.13: $A = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}$ é *antisimétrica*

Exemplo 1.2.12: $A = \begin{pmatrix} 0 & m & n \\ -m & 0 & v \\ -n & -v & 0 \end{pmatrix}$ é *antisimétrica*

NOTA: Nunha matriz antisimétrica a diagonal principal está formada por ceros:

(Como $a_{ii} = -a_{ii}$ a única posibilidade é $a_{ii} = 0$)

Exemplo 1.2.13: Toda matriz A pode descompoñerse como suma dunha matriz simétrica e outra

antisimétrica, da forma $A = \frac{A + A^t}{2} + \frac{A - A^t}{2}$ (necesitamos coñecer as operacións do 1.3 primeiro)

Comprobámolo para a matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$:

$$\frac{A + A^t}{2} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix} \text{ é simétrica; } \frac{A - A^t}{2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \text{ é antisimétrica, e verifican } \frac{A + A^t}{2} + \frac{A - A^t}{2} = A$$

1.3. Operacións con matrices: suma e produto de matrices, produto dunha matriz por un escalar. Propiedades.

1.3.1. Suma de matrices.

A **suma de dúas matrices** $A_{m \times n}$ e $B_{m \times n}$ é outra matriz $C_{m \times n} = (A+B)_{m \times n}$ na que cada elemento se obtén sumando os elementos que ocupan a mesma posición en A e en B, é dicir:

$$(c_{ij})_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n} + (b_{ij})_{m \times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

NOTA: Para poder sumar dúas matrices deben ter a mesma dimensión, é dicir, nunca se poden sumar matrices de distinta dimensión.

Enténdese mellor cun exemplo:

Exemplo 1.3.1.1. Dadas $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ obtemos elemento a elemento a suma:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 + (-1) & -1 + (-1) & 4 + 2 \\ -2 + 2 & 3 + 1 & 4 + (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

PROPIEDADES: Por facerse a suma elemento a elemento, as propiedades da suma de matrices son as mesmas que as da suma de números reais, polo tanto son:

Conmutativa: $A + B = B + A$ (non importa a orde)

Asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$ (da igual a orde en que sumemos varias matrices)

Elemento neutro: $A + (0) = A$

NOTA: O elemento neutro é a matriz nula, a que ten todo ceros, denótase como O ou como (0).

Elemento oposto: $A + (-A) = (0)$ (a matriz oposta de A é (-A) e obtense cambiando de signo cada elemento de A).

Exemplo 1.3.1.2. Obter a matriz oposta de $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ e comprobalo:

SOL: A matriz oposta de A é $-A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ +2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

Comprobámolo: $A + (-A) = \begin{pmatrix} 2 + (-2) & -1 + 1 & 0 + 0 \\ -2 + 2 & 3 + (-3) & 4 + (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0) = \mathbf{O} \text{ c. q. d.}$

1.3.2. Produto de matriz e escalar (número real e matriz).

O **produto dun número real k por unha matriz A** é outra matriz $C = k \cdot A$ onde os elementos obtéñense multiplicando k polos elementos de A :

$$(c_{ij})_{m \times n} = k \cdot (a_{ij})_{m \times n} = (k \cdot a_{ij})_{m \times n}$$

Vexamos un par de exemplos:

Exemplo 1.3.2.1. Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ e os números 2 e -2 obtemos as matrices:

$$2 \cdot A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot (-2) & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$(-2) \cdot A = (-2) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 2 & -2 \cdot (-1) & -2 \cdot 0 \\ -2 \cdot (-2) & -2 \cdot 3 & -2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 4 & -6 & -8 \end{pmatrix}$$

NOTA: Non se define a división dunha matriz por un escalar, pero podémola entender como a multiplicación da matriz pola fracción correspondente:

Exemplo 1.3.2.2. Dividir A entre dous podémolo pensar como:

$$\frac{1}{2} \cdot A = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 2 & \frac{1}{2} \cdot (-1) & \frac{1}{2} \cdot 0 \\ \frac{1}{2} \cdot (-2) & \frac{1}{2} \cdot 3 & \frac{1}{2} \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{ver tamén Exemplo 1.2.13})$$

PROPIEDADES: Igual que para a suma, mantense a analoxía coas propiedades do produto de números reais:

Asociativa: $(a \cdot b) \cdot A = a \cdot (b \cdot A)$

Elemento unidade: $1 \cdot A = A$

Distributiva do produto dun número respecto da suma de matrices:

$$a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B$$

Distributiva do produto dunha suma de números por unha matriz:

$$(a + b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$$

Exemplo 1.3.2.3. Comprobar a propiedade asociativa no produto $(2 \cdot 3) \cdot A$ sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

SOL:
$$\left. \begin{aligned} \text{Calculamos } (2 \cdot 3) \cdot A &= 6 \cdot A = \begin{pmatrix} 12 & -6 & 0 \\ -12 & 18 & 24 \end{pmatrix} \\ \text{e tamén } 2 \cdot (3 \cdot A) &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -6 & 9 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -6 & 0 \\ -12 & 18 & 24 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \text{En efecto } (2 \cdot 3) \cdot A = 2 \cdot (3 \cdot A) \text{ c. q. d.}$$

1.3.3. Produto de matrices

NOTA: O produto de matrices é a operación "máis interesante", por ser dunha natureza bastante diferente ás anteriores. Por exemplo, unha das súas "rarezas" con respecto ás operacións coñecidas é que non é conmutativo, non é o mesmo en xeral $A \cdot B$ que $B \cdot A$.

DEFINICIÓN: O produto dunha matriz $A_{m \times n}$ pola matriz $B_{n \times p}$ é outra matriz $C_{m \times p}$ na que o elemento c_{ij} obtense multiplicando a fila i -ésima de A pola columna j -ésima de B :

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p} = (c_{ij})_{m \times p}$$

$$\text{onde o elemento } c_{ij} \text{ obtense como } c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

PASOS PARA O CÁLCULO: Para facer o produto de dúas matrices A e B :

1º - Primeiro debemos comprobar se é posible mirando as súas dimensións.

O número de columnas de A debe coincidir con número de filas de B.

Se as dimensións son $m \times n$ * $r \times s$, deben coincidir "os medios" n e r .

Exemplo 1.3.3.1. Dadas $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, as ordes son $2 \times 3 \times 3 \times 2$

e polo tanto podemos facer $A \cdot B$

2º - Debemos saber a dimensión do produto. **Terá tantas filas como A e tantas columnas como B.**

Se as dimensións son $m \times n$ * $n \times p$, a orde do produto ven dada polos extremos m e p , $m \times p$.

No exemplo anterior as ordes son $2 \times 3 \times 3 \times 2$ polo que a matriz produto $A \cdot B = C$ será 2×2

3º - O primeiro elemento c_{11} obtense multiplicando a primeira fila de A pola primeira columna de B como se indica na definición.

No produto $A \cdot B = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$, obtemos c_{11} multiplicando a 1ª fila de A pola 1ª columna de B

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow c_{11} = 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 5 \rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

4º - Multiplicando a fila correspondente (i) coa columna adecuada (j) imos calculando o resto dos elementos c_{ij} .

$$\left. \begin{aligned} c_{12} : A &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} : c_{12} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 4 \cdot (-3) = -12 \\ c_{21} : A &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow c_{21} = 6 \\ c_{22} : A &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow c_{22} = -8 \end{aligned} \right\} \text{ Así o produto queda } A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$$

PROPIEDADES: Supoñemos que as matrices ás que se refiren as propiedades teñen as dimensións adecuadas para que os produtos sexan posibles:

Asociativa: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

Elemento neutro: Só ten sentido para matrices cadradas, o neutro para unha matriz cadrada de orde m é a identidade de orde m : $A \cdot I = I \cdot A = A$

Distributiva:

Pola esquerda: $A(B + C) = AB + AC$

Pola dereita: $(B + C)A = BA + CA$

O produto de dúas matrices, en xeral NON É CONMUTATIVO $A \cdot B \neq B \cdot A$

De feito, moitas veces poderemos facer $A \cdot B$ pero non $B \cdot A$ (supoñamos que A ten orde 3×3 e B 3×2 , podemos facer $A \cdot B$, pero non $B \cdot A$ (sería $3 \times 2 \cdot 3 \times 3$))

Exemplo 1.3.3.5. Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ comproba se é posible

o produto e se é conmutativo:

SOL: A é 2×3 e B é 2×2 , polo tanto **non podemos facer o produto $A \cdot B$, pero si o $B \cdot A$**

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 10 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1.3.3.5. Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ comproba se é posible

o produto e se é conmutativo:

SOL: A é 2×3 e B é 3×2 , polo tanto **son posibles os dous produtos:**

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \text{ polo tanto non é conmutativo}$$

NOTA: A división de matrices non está definida. Sí podemos falar de inversa, pero non todas as matrices teñen inversa. Volveremos falar da inversa nas seguintes unidades.

LIGAZÓNS DE INTERESE:

WIRIS - Completísima calculadora online, permite facer todo tipo de operacións, tamén con matrices:

<http://www.wiris.net/editorial-bruno/wiris/es/index.html>

Outra calculadora online de matrices (inclúe multiplicador en "Matrix multiplier"):

http://wims.unice.fr/wims/en_home.html

1.4. Emprego das matrices como ferramentas para representar e operar con datos tirados de táboas e gráficos procedentes de diferentes contextos. Aplicación das operacións e das súas propiedades na resolución de problemas extraídos de contextos reais.

NOTA: Este epígrafe da unidade ven incluído nos contidos da asignatura e polo tanto é susceptible de aparecer nas PAU, pero nos últimos 10 anos non puxeron ningún problema relacionado. Móstranse a continuación algún exemplo no que se relacionan matrices, táboas de datos e problemas reais. Cando tratemos os sistemas de ecuacións veremos algún outro exemplo.

Exemplo 1.4.1. Unha empresa fabrica xoguetes de tres tipos diferentes T_1 , T_2 e T_3 . Os prezos de custo de cada xoguete e os ingresos que obtén a empresa por cada xoguete vendido veñen dados na seguinte táboa:

	T_1	T_2	T_3
Prezo de custo	4 €	6 €	9 €
Ingreso	10 €	16 €	24 €

O número de vendas anuais é de 4500 xoguetes T_1 , 3500 xoguetes T_2 e 1500 xoguetes T_3 . Sabendo que a matriz de custos (C) e a matriz de ingresos (I) son matrices diagonais e que a matriz de vendas anuais (V) é unha matriz fila.

a) Determina as matrices C , I e V

b) Obter, utilizando as matrices anteriores, a matriz de ingresos anuais e a matriz de beneficios anuais correspondentes ós tres tipos de xoguetes.

SOL: a) *Escribimos a matriz de custos como unha matriz diagonal:* $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

Escribimos a matriz de ingresos como unha matriz diagonal: $I = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$

Escribimos a matriz de vendas anuais como matriz fila: $V = (4500 \quad 3500 \quad 1500)$

b) **Ingresos anuais** = nº unidades vendidas nun ano * ingresos por unidade

A matriz de ingresos anuais será entón $I_a = V \cdot I = (45000 \quad 56000 \quad 36000)$

Razoando igual para os custos anuais $C_a = V \cdot C = (18000 \quad 21000 \quad 13500)$

NOTA: Só se pode multiplicar V pola esquerda ($1 \times 3 \cdot 3 \times 3$)

Beneficios = Ingresos – Custos: $B_a = I_a - C_a = (27000 \quad 35000 \quad 22500)$

Terá 27000€ de beneficios anuais con xoguetes tipo T_1 ; 35000€ con xoguetes do tipo T_2
e 22500€ con xoguetes do tipo T_3

Exemplo 1.4.2. Unha compañía de mobles fabrica butacas, mecedoras e cadeiras, e cada unha delas de tres modelos E (económico), M (medio) e L (luxo). Cada mes produce 20 modelos E, 15 M e 10 L de butacas, 12 E, 8 M e 5 L de mecedoras e 18 E, 20 M e 12 L de cadeiras. Representa a información nunha matriz e calcula a produción anual.

SOL: Nun mes prodúcese:

$$\begin{array}{l} \text{Butacas} \\ \text{Mecedoras} \\ \text{Cadeiras} \end{array} \begin{array}{c} E \quad M \quad L \\ \begin{pmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 12 & 8 & 5 \\ 18 & 20 & 12 \end{pmatrix} \end{array} = A$$

$$\text{Nun ano } 12 \cdot A = \begin{array}{l} \text{Butacas} \\ \text{Mecedoras} \\ \text{Cadeiras} \end{array} \begin{array}{c} E \quad M \quad L \\ \begin{pmatrix} 240 & 180 & 120 \\ 144 & 96 & 60 \\ 216 & 240 & 144 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemplo 1.4.3. Nun hospital hai catro pacientes diabéticos que teñen que recibir dous tipos de insulina. As dosis diarias (en mg) que necesitan son:

	Paciente			
	1	2	3	4
Insulina retardada	15	20	0	10
Insulina normal	30	20	50	30

Os pacientes permanecen no hospital 8, 15, 12 y 25 días respectivamente. Determina, mediante un produto de matrices, que cantidade de insulina de cada tipo precisárase para tratalos.

SOL: A matriz das dosis diarias é: $\begin{pmatrix} 15 & 20 & 0 & 10 \\ 30 & 20 & 50 & 30 \end{pmatrix}$

A matriz dos días de ingreso é: $\begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 12 \\ 25 \end{pmatrix}$

Obtemos a cantidade necesaria de insulina co produto: $\begin{pmatrix} 15 & 20 & 0 & 10 \\ 30 & 20 & 50 & 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 12 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 670 \\ 1890 \end{pmatrix}$

Ó multiplicar a fila de insulina retardada polos días no hospital temos a cantidade de insulina retardada, e será o primeiro elemento da matriz produto. Razoando igual sabemos que precisaremos **670 mg de insulina retardada e 1890 mg da normal.**

Bloque I: Álgebra Lineal

Unidade 2. Determinantes.

NOTAS PREVIAS: Continuamos introduciendo outro dos conceptos básicos asociado ás matrices que empregaremos constantemente nos bloques I e II, o determinante.

Nas PAU aparece algún exercicio de aplicación das propiedades dos determinantes, e dominar o seu cálculo será esencial en diferentes tipos de problemas (rangos, sistemas, inversas...).

TEORÍA: Aínda que os últimos anos a teoría céntrase no bloque de análise, apareceu como pregunta teórica no ano 2001 as propiedades dos determinantes (só enuncialas).

2.1 Definición de determinante. Cálculo de determinantes de orde 2 e 3. Regra de Sarrus.

DEFINICIÓN: Chamámoslle **determinante dunha matriz cadrada A de orde 2** e o denotamos como $\det(A)$ ou $|A|$ ó número:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

NOTA: É o resultado de multiplicar a diagonal "cara a dereita" menos a diagonal "cara a esquerda"

$$\text{Exemplo 2.1.1: } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \det(A) = 3 \cdot 1 - 2 \cdot (-3) = 3 + 6 = 9$$

Para o determinante de orde 3 é algo máis complicado, pero a Regra de Sarrus permítenos lembrar a forma de facer o cálculo:

Chamámoslle **determinante dunha matriz cadrada A de orde 3** ó número:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Na práctica, para o cálculo lembraremos a **Regra de Sarrus**:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(sumamos as diagonais "cara a dereita" e restamos as diagonais "cara a esquerda")

$$\text{Exemplo 2.1.2: Dada } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 3 \cdot 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 \cdot (-3) + 1 \cdot (-2) \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot (-3) - 0 \cdot 1 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 \cdot (-2) = -6 + 0 - 4 + 12 + 0 + 6 = 8$$

2.2 Definición de menor complementario e adxunto dun elemento. Desenvolvemento dun determinante polos elementos dunha liña.

DEFINICIÓN: Chámase **menor complementario dun elemento a_{ij}** dunha matriz ó valor do determinante que resulta de suprimir a fila i e a columna j :

Exemplo 2.2.1. Dada $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ o menor complementario de a_{22} será:

Tachamos a fila 2 e a columna 2 : $A = \begin{pmatrix} \boxed{3} & \emptyset & \boxed{2} \\ \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{1} \\ \boxed{-3} & \boxed{-2} & \boxed{-1} \end{pmatrix}$ e queda $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 6 = 3$

DEFINICIÓN: Chámase **adxunto dun elemento a_{ij}** dunha matriz e **denótase como A_{ij}** ó menor complementario de a_{ij} antepoñendo o signo “+” se $i + j$ é par e “-” se $i + j$ é impar (multiplicar o menor por $(-1)^{i+j}$)

NOTA: É fácil aprender os signos tendo en conta que van alternando:

$$\text{Orde 2: } \begin{vmatrix} + & - \\ - & + \end{vmatrix} \quad \text{Orde 3: } \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} \quad \text{Orde 4: } \begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

Exemplo 2.2.2. Dada $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ obtemos o adxunto de a_{22} :

$$(i + j = 2 + 2 = 4 \text{ par, logo o signo é +}): A_{22} = + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

DEFINICIÓN: Chámase **matriz adxunta** doutra dada á que se obtén de substituír cada elemento a_{ij} polo seu adxunto A_{ij} . Denótase por **Adx(A)**.

Exemplo 2.2.3. Dada $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ obtemos a adxunta $\text{Adx}(A)$:

$$\text{Adx}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -4 & 3 & 6 \\ -4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

CÁLCULO DO DETERMINANTE DESENVOLVENDO POR UNHA LIÑA

NOTA: A seguinte regra de cálculo é válida para determinantes de calquera orde, e será a que empreguemos para o cálculo de determinantes de orde 4 ou superior.

1º Eliximos unha fila ou unha columna da matriz. Convén elixir a fila que teña máis ceros se é posible para simplificar as operacións.

Exemplo 2.2.4. Dada $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ \boxed{2} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{-1} \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ eliximos a 2ª fila por ter 2 ceros

2º O determinante da matriz é igual á suma de cada elemento da liña elixida por o seu adxunto. Continuamos co exemplo:

Exemplo 2.2.5. Calculamos $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ \boxed{2} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{-1} \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} =$

$$= -2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot (-9) + 0 - 0 + (-1) \cdot (-7) = 25$$

NOTA: Obviamente, antes de falar de determinantes de orde 4 ou superior hai que definilos. Neste curso enfocaremos o tema dende un pusto de vista meramente práctico (a regra de cálculo) e non trataremos esta definición por ter certa complexidade. Pódese consultar máis sobre o tema na Wikipedia:

[http://es.wikipedia.org/wiki/Determinante_\(matem%C3%A1tica\)#M.C3.A9todos_d_e_c.C3.A1lculo](http://es.wikipedia.org/wiki/Determinante_(matem%C3%A1tica)#M.C3.A9todos_d_e_c.C3.A1lculo)

2.3. Propiedades elementais dos determinantes.

NOTA: As propiedades dos determinantes son moi importantes de cara as PAU para a realización de exercicios. Ademais, aínda que non nos últimos anos, os enunciados das propiedades caeron como teoría no 2001. Exemplificaremos as propiedades con matrices de orde 3, aínda que valen para calquera orde.

1ª O determinante dunha matriz é igual ó da trasposta. $|A| = |A^t|$

NOTA: Polo tanto, como as filas dunha matriz son as columnas da trasposta, as propiedades que veremos valen tanto para filas como para columnas.

2ª Se permutamos dúas filas (ou columnas) entre si, o determinante cambia de signo. (exemplificámolo permutando a 1ª e a 2ª columna)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3ª Multilinealidade:

3ª Se unha fila (ou columna) é a suma doutras dúas da matriz, o determinante pode descompoñerse na suma dos determinantes da seguinte forma (exemplificámolo na 1ª columna)

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

NOTA: Pode demostrarse desenvolvendo por esa liña, distribuindo as sumas e agrupando.

3b Se unha fila (ou columna) do determinante está multiplicada por un número, verifica: (exemplificámolo para a 1ª columna)

$$\begin{vmatrix} k \cdot a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k \cdot a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ k \cdot a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

NOTA: Pódense xustificar facendo o desenvolvemento por esa liña, sacando factor común e agrupando. Como consecuencia temos, para unha matriz de orde n :

$$|k \cdot A| = k^n \cdot |A| \text{ ou noutra notación } \det(k \cdot A) = k^n \cdot \det(A)$$

4ª O determinante dunha matriz cunha fila (ou columna) de ceros é 0

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

NOTA: É trivial demostralo, ou desenvolvendo ou como consecuencia do 3b.

5ª O determinante dunha matriz con dúas filas (ou columnas) iguais (ou proporcionais) é 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & k \cdot a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & k \cdot a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & k \cdot a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

NOTA: Se permutamos as dúas filas iguais, o determinante non varía; pola propiedade 2, o determinante cambia de signo. Se non varía e cambia de signo, a única opción é que o seu valor sexa 0.

Para o caso no que son proporcionais, basta aplicar a propiedade multilineal 3b (sacamos a constante), e xa temos dúas filas iguais no determinante (vale 0).

6ª O determinante dunha matriz no que unha fila (ou columna) é combinación lineal das demais é 0.

$$\begin{vmatrix} \alpha \cdot a_{12} + \beta \cdot a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha \cdot a_{22} + \beta \cdot a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ \alpha \cdot a_{32} + \beta \cdot a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

NOTA: É consecuencia da multilinealidade (3a, se unha fila é suma de dúas, podémolo descompoñer na suma de determinantes) é da 5ª (se hai filas proporcionais o determinante vale 0)

NOTA: Como consecuencia desta propiedade 6ª, podemos utilizar os determinantes para estudar a dependencia ou independencia dun conxunto de vectores. Verémolo máis adiante.

7ª O determinante dunha matriz non varía se a unha fila (ou columna) lle sumamos unha combinación lineal das demais.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + \alpha \cdot a_{12} + \beta \cdot a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + \alpha \cdot a_{22} + \beta \cdot a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + \alpha \cdot a_{32} + \beta \cdot a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

NOTA: Como consecuencia desta propiedade, podemos facer ceros nun determinante e simplificar o seu cálculo (vémolos no seguinte epígrafe).

8ª O determinante dun produto de matrices é o produto dos determinantes.

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

NOTA: Como consecuencia, para as potencias verifícase $|A^n| = |A|^n$

CÁLCULO DUN DETERMINANTE FACENDO CEROS

Como vimos na 7ª propiedade, se a unha fila lle sumamos unha combinación lineal das demais, o determinante non varía. Deste xeito podemos facer ceros simplificando os cálculos para resolver o determinante. Vexamos como:

1º Buscamos unha fila que conteña algún 1, e a ser posible que teña ceros:

Exemplo 2.3.1. Calcula $|A| = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & \boxed{1} \\ 2 & 2 & -3 & \boxed{-2} \\ -4 & 1 & 1 & \boxed{0} \\ 8 & 3 & -2 & \boxed{-1} \end{vmatrix}$ → Eliximos a 4ª columna por ter un 1 e un 0 tamén sería unha posibilidade a 3ª fila.

2º Tomamos o 1 como elemento de referencia, e facemos ceros no resto da fila elixida (neste caso 4ª columna) **empregando a propiedade 7** (a cada fila sumámoslle unha combinación lineal das outras de modo que o determinante non varía):

Exemplo 2.3.2. Para facer ceros á 2ª fila sumámoslle dúas veces a 1ª e á 4ª basta sumarlle a 1ª

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & \boxed{1} \\ 2 & 2 & -3 & \boxed{-2} \\ -4 & 1 & 1 & \boxed{0} \\ 8 & 3 & -2 & \boxed{-1} \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 \rightarrow F_2 + 2F_1 \\ F_4 \rightarrow F_4 + F_1}} \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & \boxed{1} \\ 10 & 0 & 1 & \boxed{0} \\ -4 & 1 & 1 & \boxed{0} \\ 12 & 2 & 0 & \boxed{0} \end{vmatrix} = \text{desenvolvemos pola 1ª columna} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 10 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \\ 12 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (-40) = 40$$

NOTA: Se non houberse ningún 1, podemos dividir todos os elementos dunha liña entre un deles e multiplicar o determinante por ese número:

Exemplo 2.3.2. Na seguinte matriz podemos dividir a 1ª fila entre 2:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 3 & -3 & 5 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 5 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix}$$

LIGAZÓNS DE INTERESE:

WIRIS - Completísima calculadora online, permite facer todo tipo de operacións, tamén con determinantes:

<http://www.wiris.net/editorial-bruno/wiris/es/index.html>

Outras calculadoras online de determinantes:

<http://www.xuletas.es/matrices.php>

http://wims.unice.fr/wims/en_home.html

AlbertoBloque I: Álgebra Lineal

Unidade 3. Aplicacións dos determinantes.

NOTAS PREVIAS: Nesta unidade comezamos a aplicar os conceptos básicos das anteriores. O estudo do rango dunha matriz é unha ferramenta básica neste curso (usarémoso para discutir sistemas de ecuacións e tamén en xeometría), e nas PAU é frecuente atopar exercicios de discusión de rango en función dun parámetro.

Tamén será frecuente necesitar nos exercicios o cálculo da matriz inversa. Serán moi habituais as ecuacións matriciais nos que a inversa será esencial para "despexar" a matriz incógnita. Será vital ter en conta o lado polo que se multiplica.

TEORÍA: Non é habitual atopar teoría desta unidade nas PAU. Dos últimos 10 anos únicamente no 2004 pediron explicar brevemente o método de Gauss para o rango.

3.1 Rango dunha matriz: definición e cálculo do rango dunha matriz a partir dos seus menores e polo método de Gauss.

NOTA: Consideramos as liñas da matriz como vectores para a seguinte definición.

DEFINICIÓN: O rango dunha matriz é o número de filas (ou o número de columnas) **linealmente independentes**.

LEMBRA: Un conxunto de vectores é linealmente independente se ningún deles se pode poner como combinación lineal dos demais.

NOTA: Veremos a continuación dous métodos para calcular o rango dunha matriz, o cálculo por menores e o cálculo polo método de Gauss.

LIGAZÓNS DE INTERESE:

O método de Gauss é un algoritmo baseado no método de redución que empregaremos para o cálculo de rangos e para a resolución de sistemas.

O método recibe o nome do matemático **Carl Friedrich Gauss**. Fora da materia que nos incumbe, é interesante o seguinte **video documental de 22 minutos** sobre a vida e traballos dun dos máis relevantes matemáticos da historia:

<http://video.google.com/videoplay?docid=-2958957388576074872&hl=es#>

WIRIS - Completísima calculadora online:

<http://www.wiris.net/editorial-bruno/wiris/es/index.html>

Outras calculadoras online de matrices (calculan rangos e inversas):

<http://www.xuletas.es/matrices.php>

http://wims.unice.fr/wims/en_home.html

CÁLCULO DO RANGO POR MENORES DUNHA MATRIZ A:**1º Buscamos un menor de orde 1** (un elemento) **distinto de 0**.Esto garantiza que $\text{Rango } A \geq 1$ **2º Ampliamos ese menor** (este proceso chámase **orlar**) **a outros de orde 2**, ata atopar algún distinto de 0.

- **Se todos son 0:** $\text{Rango } A = 1$, (fin do proceso)
- **Se aparece algún menor de orde 2 $\neq 0$,** $\text{Rango } A \geq 2$ e seguimos:

3º Orlamos os menores de orde 2 ós posibles de orde 3.

- **Se todos son 0:** $\text{Rango } A = 2$, (fin do proceso)
- **Se algún é distinto de 0 continuamos o proceso ata chegar ó rango máximo.**

NOTA: Na práctica pode ser máis cómodo realizar o proceso inverso. Comezamos co determinante de maior orde (3 se é unha matriz de orde 3); se é distinto de cero o rango é 3, se é cero comprobamos os menores de orde 2. Se hai algún distinto de 0 o rango é 2, se todos son 0 o rango será 1 (salvo para a matriz nula).

Exemplo 3.1.1: Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, calcular o rango por menores:

Estudamos o determinante de A: $|A| = 0 \rightarrow \text{Rango } A < 3$

Buscamos menor de orde 1 $\neq 0$: $\begin{pmatrix} \boxed{2} & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{a_{11} = 2 \rightarrow \text{Rango } A \geq 1}$.

Orlamos ese menor a outros de orde 2: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Coa columna 2 e a fila 2: } \begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{-1} & 1 \\ \boxed{4} & \boxed{-2} & 1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0 \\ \text{Coa columna 3 e a fila 2: } \begin{pmatrix} \boxed{2} & -1 & \boxed{1} \\ \boxed{4} & -2 & \boxed{1} \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -2 \end{array} \right.$

Como atopamos un menor de orde 2 $\neq 0 \rightarrow \boxed{\text{Rango } A \geq 2}$
 Xa tiñamos $\text{Rango } A < 3 \rightarrow \boxed{\text{Rango } A = 2}$

Exemplo 3.1.2. Dada $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, calculamos o rango por menores:

$|A| = 25 \neq 0 \rightarrow \boxed{\text{Rango } A = 4}$

CÁLCULO DO RANGO POLO MÉTODO DE GAUSS:

DEFINICIÓ: Transformacións elementais, son as que podemos facer nunha matriz de modo que o seu rango non varíe. Dedúcese a través das propiedades dos determinantes:

1º Se permutamos dúas filas ou dúas columnas o rango non varía.

2º Se multiplicamos unha liña por un número non nulo o rango non varía.

3º Se a unha fila (ou columna) lle sumamos outra fila (columna) multiplicada por un número o rango non varía.

O método de Gauss consiste en aplicar as transformacións elementais para converter a matriz nunha triangular superior (facemos ceros debaixo da diagonal principal). O rango da matriz será o número de filas non nulas que queden despois do proceso.

Exemplo 3.1.3: Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, calcular o rango por Gauss:

Vexamos como efectuar as transformacións elementais para triangularizar a matriz:

Tratamos de colocar un 1 na posición a_{11} permutando liñas e dividindo por un número se é necesario

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{Facemos 0 na 2ª columna} \\ F_3 \rightarrow F_3 - F_2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ó finalizar a triangularización vemos que hai 2 filas non nulas logo **Rango A = 2**

Exemplo 3.1.4. Dada $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, calculamos o rango por Gauss:

Intercambiamos C_1 por C_3 para ter un 1 na posición a_{11} , logo F_2 e F_3 para aproveitar os ceros.

Despois faremos ceros debaixo da diagonal coas transformacións elementais:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{Facemos 0 na 1ª columna} \\ F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1 \\ F_4 \rightarrow F_4 + 2F_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{Facemos 0 na 2ª columna} \\ F_4 \rightarrow F_4 + 4F_2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{Facemos 0 na 3ª columna} \\ F_4 \rightarrow F_4 - 7/2 F_3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 25/2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{(4 filas non nulas unha vez triangularizada)} \rightarrow \text{Rango A = 4}$$

3.2. Definición de inversa dunha matriz cadrada. Condición necesaria e suficiente para a existencia da matriz inversa. Propiedades da matriz inversa. Cálculo da matriz inversa.

DEFINICIÓN: Dada unha matriz cadrada A , de orde n , chámase **matriz inversa de A** a outra matriz cadrada da mesma orde que verifica:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I_n \quad (I_n \text{ é a identidade de orde } n)$$

TEOREMA: A condición necesaria e suficiente para que **unha matriz cadrada teña inversa** é que **o seu determinante sexa distinto de 0**:

$$A \text{ ten inversa} \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

Unha matriz A verificando $|A| \neq 0$ chámase **invertible, regular** ou **non singular**.

NOTA: Aínda que as demostracións non son materia de exame, como pasará con moitos outros teoremas este curso, é interesante entender o por que destes enunciados e moi útil para os que vaiades continuar estudos máis avanzados de matemáticas (carreiras de matemáticas, física, química, enxeñerías...).

DEMOSTRACIÓN: (non é materia de exame)

NOTA: Para demostrar a dobre implicación " $\Leftrightarrow$ " (tamén chamada condición necesaria ou suficiente), hai que facer unha demostración por cada dirección:

1º A condición necesaria " $\Rightarrow$ ".

2º A condición suficiente " $\Leftarrow$ ".

" $\Rightarrow$ " Neste caso demostrar a **condición necesaria** é suponer que A ten inversa e demostrar que o seu determinante é distinto de cero: $A \text{ ten inversa} \Rightarrow |A| \neq 0$

- Se A ten inversa é que existe unha matriz B verificando: $B \cdot A = A \cdot B = I$

- Aplicando o determinante na segunda igualdade: $|A \cdot B| = |I|$.

- Polas propiedades dos determinantes sabemos que $\begin{cases} |A \cdot B| = |A| \cdot |B| \\ |I| = 1 \end{cases} \Rightarrow |A| \cdot |B| = 1$

- Pero se un produto de dous números é distinto de cero (1 neste caso), ningún deles pode ser cero, polo tanto $|A| \neq 0$ c. q. d.

" $\Leftarrow$ " Demostrar a condición suficiente é demostrar que se o determinante é distinto de cero, a matriz ten inversa: $|A| \neq 0 \Rightarrow A \text{ ten inversa}$

Desta demostración dedúcese a fórmula que veremos para o cálculo da matriz inversa por determinantes, pero é máis complicada que a condición necesaria e non a trataremos aquí. Pódese ver a demostración completa na Wikipedia en:

http://es.wikipedia.org/wiki/Matriz_invertible

PROPIEDADES DA MATRIZ INVERSA:

NOTA: Para estas propiedades consideramos matrices A , e B invertibles.

1ª A inversa dunha matriz, se existe, é única

2ª A inversa do produto verifica: $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

3ª A inversa da trasposta é a trasposta da inversa: $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

4ª A inversa da inversa é a matriz orixinal: $(A^{-1})^{-1} = A$

5ª O determinante da inversa é a inversa do determinante: $|A^{-1}| = |A|^{-1} = \frac{1}{|A|}$

DEMOSTRACIÓNS: non son materia de exame como teoría, aínda que algunhas destas demostracións poderían entenderse como exercicios teórico-prácticos que deberíamos ser capaces de facer e se poden preguntar. Vexamos algún exemplo:

1ª Demostramos por redución ó absurdo a unicidade da inversa (consiste en suponer o contrario do que pretendemos demostrar e chegar a unha contradición da que deducimos que esa opción é imposible).

- **Supoñamos que a inversa non é única**, e dicir, que existen dúas inversas distintas, B e C , dunha matriz A .

- (1) Por ser B inversa $B \cdot A = I$
- (2) Por ser C inversa $A \cdot C = I$

En (1) multiplicamos por C pola dereita: $(B \cdot A) \cdot C = I \cdot C = C$
 - Pola propiedade asociativa do produto $(B \cdot A) \cdot C = B \cdot (A \cdot C) \stackrel{(2)}{=} B \cdot I = B$ $C = B$

Contradícese $B=C$ con que sexan distintas, logo a matriz inversa é única.

4ª A inversa da inversa é a matriz orixinal:

A inversa da inversa verifica $A^{-1} \cdot (A^{-1})^{-1} = I$. Multiplicando por A pola esquerda:

$$A \cdot A^{-1} \cdot (A^{-1})^{-1} = A \cdot I \Rightarrow I \cdot (A^{-1})^{-1} = A \Rightarrow \boxed{(A^{-1})^{-1} = A} \quad c. q. d.$$

5ª O determinante da inversa é a inversa do determinante:

Pola definición da matriz inversa $A \cdot A^{-1} = I$. Aplicando determinantes:

$$|A \cdot A^{-1}| = |I| \Rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \Rightarrow \text{despexando queda } |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = |A|^{-1} \quad c. q. d.$$

CÁLCULO DA MATRIZ INVERSA

NOTA: Coma no rango, a inversa dunha matriz pódese obter por determinantes ou polo método de Gauss-Jordan. En xeral, na práctica, usaremos a inversa por determinantes aínda que en ocasións pode ser moito máis rápido o método de Gauss-Jordan.

CÁLCULO DA INVERSA POR DETERMINANTES

Dada unha matriz A invertible, a inversa é: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adx}(A^t)$

NOTA: $\text{Adx}(A^t) = (\text{Adx}(A))^t$ a adxunta da trasposta é a trasposta da adxunta (da igual a orden na que o fagamos).

Exemplo 3.2.1: Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, calculamos a inversa por determinantes:

Calculamos o determinante para comprobar se é invertible: $|A| = -2$

Facemos a trasposta de A: $A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -8 & 3 \\ 3 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ a adxunta da trasposta: $\text{Adx}(A^t) = \begin{pmatrix} -14 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$\text{E por fin obtemos a inversa } A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -14 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & \frac{3}{2} & -3 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

NOTA: Pódese comprobar que está ben calculada facendo $A \cdot A^{-1} = I$

CÁLCULO DA INVERSA POR GAUSS-JORDAN

NOTA: O método de Gauss consistía en converter unha matriz nunha triangular superior deixando invariable o rango. Gauss-Jordan trata de diagonalizar a matriz.

Consiste en transformar a matriz $(A | I)$ na matriz $(I | A^{-1})$ mediante transformacións elementais, buscando que na parte esquerda da matriz quede a identidade onde estaba a matriz A. Na parte dereita quedará a inversa.

Exemplo 3.2.2: Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, calculamos a inversa por Gauss – Jordan: $(A | I) =$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -8 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 + 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \rightarrow F_1 - 3F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{F_1 \rightarrow F_1 - 3F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \rightarrow F_1 + \frac{3}{2}F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & \frac{3}{2} & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 : (-2)}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & \frac{3}{2} & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) = (I | A^{-1}). \text{ Así temos } A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & \frac{3}{2} & -3 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bloque I: Álgebra Lineal

Unidade 4. Sistemas de ecuacións lineais.

NOTAS PREVIAS: Establécense nesta unidade as definicións básicas para tratar os sistemas de ecuacións lineais (sistema, sistemas equivalentes, sistemas homoxéneos, forma matricial dun sistema) e a clasificación dos sistemas segundo o número de solucións.

É un tema teórico e introductorio, será a seguinte unidade a que entre en materia propia do curso. As preguntas nas PAU céntranse no que veremos na unidade 5.

4.1. Definición de sistema de m ecuacións lineais con n incógnitas.

Definición da súa solución.

DEFINICIÓN: Unha **ecuación lineal de n incógnitas** $x_1, x_2, \dots, x_n$ é unha igualdade da forma: $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ onde os a_i son números reais chamados **coeficientes** e b é outro número real chamado **termo independente**.

Un **sistema de m ecuacións lineais con n incógnitas** é un conxunto de m ecuacións lineais coas mesmas incógnitas:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\} \text{ con } a_{ij} \text{ coeficientes e } b_j \text{ termos independentes}$$

Chámase **solución** do sistema a calquera conxunto de valores das incógnitas x_i que verifique as ecuacións.

4.2. Sistemas de ecuacións equivalentes.

DEFINICIÓN: Dous sistemas son **equivalentes** se teñen as mesmas solucións.

NOTA: Cando estudemos a forma matricial dun sistemas veremos como aplicando a un sistema as transformacións elementais vistas no método de Gauss obtemos outros equivalentes. Este feito implica que o método de Gauss tamén servirá para resolver sistemas de ecuacións.

4.3 Sistemas homoxéneos.

DEFINICIÓN: Un sistema é **homoxéneo** se os termos independentes son todos 0:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right\}$$

Un sistema homoxéneo **sempre ten solución** (a solución trivial $x_i = 0, \forall i$)

4.4. Forma matricial dun sistema de ecuacións lineais.

Dado un sistema lineal de m ecuacións e n incógnitas

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \right\}$$

é fácil ver que podémolo escribir con matrices da forma:

$$\overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}^A \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}}^X = \overbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}}^B$$

Así, chámase **matriz de coeficientes do sistema** á matriz A , columna dos termos independentes a B , e **matriz ampliada A'** á resultante de engadirle a A a columna B : $A' = (A|B)$

Exemplo 4.4.1: Dado o sistema $\left. \begin{aligned} 3x - y + z &= 1 \\ x - 2z &= -1 \\ -x + 2y - z &= 0 \end{aligned} \right\}$,

obtemos a matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ e a matriz ampliada $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right)$

4.5. Clasificación dos sistemas atendendo ó número de solucións.

Como xa coñecemos de cursos anteriores, os sistemas de ecuacións pódense clasificar segundo o número de solucións en:

Sistemas	Incompatibles: non teñen solución (S.I.)
	Compatibles: teñen solución $\left\{ \begin{array}{l} \text{Indeterminado: infinitas solucións (S.C.I.)} \\ \text{Determinado: unha única solución (S.C.D.)} \end{array} \right.$

Exemplo 4.5.1: Dado os sistemas a) $\left. \begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ x + y &= 2 \end{aligned} \right\}$, b) $\left. \begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ 4x - 2y &= 2 \end{aligned} \right\}$ e c) $\left. \begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ 4x - 2y &= -6 \end{aligned} \right\}$ clasifícalos:

a) $\left. \begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ x + y &= 2 \end{aligned} \right\}$ Por redución $3x = 3, x = 1$ e $y = 1$
ten unha única solución: Sistema Compatible Determinado (SCD)

b) $\left. \begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ 4x - 2y &= 2 \end{aligned} \right\}$ Por redución multiplicando a primeira por dous e restando chegamos a $0 = 0$,
Hai infinitas solucións e é un Sistema Compatible Indeterminado (SCI)

c) $\left. \begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ 4x - 2y &= -6 \end{aligned} \right\}$ Por redución chegamos a $0 = 8$, imposible,
non hai solución: Sistema Incompatible (SI)

Bloque I: Álgebra Lineal

Unidade 5. Discusión e resolución de sistemas de ecuacións lineais.

NOTAS PREVIAS: A última unidade do bloque de álgebra trata a discusión e resolución de sistemas de ecuacións lineais empregando as ferramentas aprendidas ata agora (matrices e determinantes).

O Teorema de Rouché-Frobenius permite clasificar o sistema segundo o número de solucións a través do estudo dos rangos das matrices asociadas, e a regra de Cramer servirá para obter solucións dos sistemas compatibles mediante determinantes. O método de Gauss tamén será unha opción para o estudo e resolución de sistemas.

É unha unidade importante: case seguro que nalgunha das opcións das PAU aparecerá un exercicio de discusión e resolución dun sistema de ecuacións lineais en función de un parámetro.

TEORÍA: Como xa se comentou, nos últimos anos unicamente aparecen preguntas teóricas do bloque de análise. Non obstante, o teorema de Rouché-Frobenius apareceu como pregunta teórica no ano 2002.

5.1 Discusión e resolución de sistemas de ecuacións lineais.

Enunciado do teorema de Rouché-Frobenius. Enunciado da regra de Cramer.

NOTA: O enunciado máis común nesta unidade será: "discute e resolve se é posible o sistema...". A discusión refírese o estudo e clasificación do sistema en SI, SCI ou SCD. Nos dous últimos casos teremos que obter as solucións: serán infinitas (dependentes dun parámetro) no caso SCI e unha solución concreta no caso SCD.

No exemplo 1.5.1, fíxose a discusión dos sistemas 2x2 propostos. Veremos como as ferramentas deste bloque facilitarannos a discusión de sistemas maiores.

TEOREMA DE ROUCHÉ-FROBENIUS

Un sistema de ecuacións lineais ten solución se e só se o rango da matriz de coeficientes (A) é igual ó rango da matriz ampliada (A').

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{array} \right\} \text{ é compatible } \Leftrightarrow \text{Rango } A = \text{Rango } A'$$

Ademais, se os rangos son iguais ó número de incógnitas o sistema é compatible determinado.

$$\text{Rango } A = \text{Rango } A' = n^{\circ} \text{ incógnitas} \Rightarrow \text{SCD (solución única)}$$

DEMOSTRACIÓN (non é materia de exame)

NOTA: Para demostrar a dobre implicación lembre que hai que facer unha demostración por cada dirección:

1º A condición necesaria " $\Rightarrow$ ".

2º A condición suficiente " $\Leftarrow$ ".

" $\Rightarrow$ " Neste caso demostrar a **condición necesaria** é supoñer que o sistema é compatible e comprobar que os rangos de A e A' teñen que ser iguais.

Se o sistema é compatible, é que ten polo menos unha solución, é dicir, uns valores para os x_i que verifican as ecuacións (chamémoslle s_i a eses valores):

$$\left. \begin{aligned} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \dots + a_{1n}s_n &= b_1 \\ a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + \dots + a_{2n}s_n &= b_2 \\ &\dots \\ a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + \dots + a_{mn}s_n &= b_n \end{aligned} \right\} (1)$$

Na matriz ampliada A' =

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array} \right) \xrightarrow[\text{(1)}]{\substack{\text{substituímos} \\ \text{os valores } b_i}} \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \dots + a_{1n}s_n \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + \dots + a_{2n}s_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + \dots + a_{mn}s_n \end{array} \right)$$

Polo tanto a columna B da ampliada é unha combinación lineal das columnas de A e como o rango son as filas ou columnas linealmente independentes:

$$\text{Rango } A = \text{Rango } A' \text{ c. q. d.}$$

" $\Leftarrow$ " Demostrar a condición suficiente é supoñer que os rangos de A e A' son iguais e demostrar que hai polo menos unha solución (o sistema é compatible).

É sinxelo pensar que se os rangos son iguais, a columna dos termos independentes é combinación lineal das outras e que unha solución válida serían os coeficientes desa combinación lineal:

Por ser B combinación lineal das columnas de A, existen s_i verificando:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = s_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + s_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + s_n \cdot \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{aligned} b_1 &= a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \dots + a_{1n}s_n \\ b_2 &= a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + \dots + a_{2n}s_n \\ &\dots \\ b_n &= a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + \dots + a_{mn}s_n \end{aligned} \right\}$$

Polo tanto $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_i = s_i, \dots, x_n = s_n$ é solución do sistema c. q. d.

DISCUSIÓN DUN SISTEMA (baseada en Rouché-Frobenius)

$$\text{Sistema} \begin{cases} \text{Rango } A \neq \text{Rango } A' \Leftrightarrow \text{Incompatible: non ten solución (S.I.)} \\ \text{Rango } A = \text{Rango } A' \Leftrightarrow \text{Compatible: ten solución} \end{cases} \begin{cases} \text{Rg } A = \text{Rg } A' < n^\circ \text{ incógnitas} \\ \text{Indeterminado (SCI)} \\ \text{Rg } A = \text{Rg } A' = n^\circ \text{ incógnitas} \\ \text{Determinado (S.C.D.)} \end{cases}$$

Exemplo 5.1.1: Discute as solucións do sistema:
$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

Estudamos os rangos das matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ e $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 2 & 3 & 1 & | & 0 \\ 1 & 2 & 2 & | & 1 \end{pmatrix}$:

Rango A: $\left\{ \begin{array}{l} |A| = 6 + 1 - 4 + 3 - 2 - 4 = 0 \Rightarrow \text{Rango } A < 3 \\ \text{Buscamos menores de orde } 2 \neq 0: \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } A \geq 2 \end{array} \right\} \text{Rango } A = 2$

Rango A':

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sabemos que } \text{Rango } A' \geq \text{Rango } A \text{ por estar } A \text{ contida en } A' \Rightarrow \text{Rango } A' \geq 2 \\ \text{Orlando o menor } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \text{ coa última columna (coa } 3^{\text{a}} \text{ é } |A| = 0), \text{ temos} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \end{array} \right\} \text{Rango } A' = 3$

Como $\text{Rg } A \neq \text{Rg } A'$ o sistema é incompatible (SI: non hai solución).

Exemplo 5.1.2: Discute as solucións do sistema:
$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

Estudamos os rangos das matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ e $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 2 & 3 & 1 & | & 2 \\ 1 & 2 & 2 & | & 1 \end{pmatrix}$:

Rango A: $\left\{ \begin{array}{l} |A| = 6 + 1 - 4 + 3 - 2 - 4 = 0 \Rightarrow \text{Rango } A < 3 \\ \text{Buscamos menores de orde } 2 \neq 0: \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } A \geq 2 \end{array} \right\} \text{Rango } A = 2$

Rango A':

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sabemos que } \text{Rango } A' \geq \text{Rango } A \text{ por estar } A \text{ contida en } A' \Rightarrow \text{Rango } A' \geq 2 \\ \text{Orlando o menor } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \text{ coa última columna (coa } 3^{\text{a}} \text{ é } |A| = 0), \text{ temos} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{array} \right\} \text{Rango } A' < 3 \text{Rango } A' = 2$

Como $\text{Rg } A = \text{Rg } A' < n^{\text{o}}$ incógnitas o sistema é compatible indeterminado (SCI: ∞ sol).

Exemplo 5.1.3: Discute as solucións do sistema:
$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -2 \\ -2x - 2z = 0 \\ 3x - 2y - 3z = 4 \end{cases}$$

Estudamos os rangos das matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ e $A' = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & | & -2 \\ -2 & 0 & -2 & | & 0 \\ 3 & -2 & -3 & | & 4 \end{pmatrix}$:

Rango A: $|A| = 32 \Rightarrow \text{Rango } A = 3$
Rango A': O rango máximo posible é 3, e como $\text{Rg } A' \geq \text{Rg } A = 3 \Rightarrow \text{Rango } A' = 3$ $\Rightarrow$ **Sistema Compatible Determinado (SCD, sol única)**

NOTA: A regra de Cramer permite identificar de xeito rápido os sistemas $n \times n$ compatibles determinados e obter a súa solución a través de determinantes:

REGRA DE CRAMER

Dado un sistema de n ecuacións lineais e n incógnitas, con A matriz de coeficientes do sistema, verifícase:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right\} \text{ é compatible determinado } \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

E nese caso, as solucións veñen dadas por:

$$x_i = \frac{|A_{x_i}|}{|A|}, \forall i = 1, 2, \dots, n,$$

Onde A_{x_i} é a matriz que resulta de substituír a columna dos coeficientes de x_i pola

columna B dos termos independentes. $A_{x_i} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \overset{\text{columna } x_i}{\tilde{b}_1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

DEMOSTRACIÓN (non é materia de exame)

Escribindo o sistema en forma matricial

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Podémolo resolver da forma $X=A^{-1} \cdot B$ sempre e cando exista inversa de A , pero sabemos que eso ocorre se e só se $|A| \neq 0$. Polo tanto queda demostrado que

$$\text{O sistema é compatible determinado } \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

Cando existe a inversa, obtemos de $X=A^{-1} \cdot B$: $\left(\text{usando a definición } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adx}(A^t) \right)$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Así, obtemos fila a fila que $x_i = \frac{|A_{x_i}|}{|A|}, \forall i = 1, 2, \dots, n$. Vexámolo :

$$x_i = \frac{A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \dots + A_{ni}b_n}{|A|} = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \overset{\text{columna } x_i}{\tilde{b}_1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(O desenvolvemento do determinante pola columna B é o numerador)

Exemplo 5.1.4: Discute as solucións do sistema:
$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -2 \\ -2x - 2z = 0 \\ 3x - 2y - 3z = 4 \end{cases}$$
 e resólveo se é posible.

Estudamos o determinante de $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $|A| = 32 \neq 0 \xleftrightarrow{\text{regra de Cramer}} \text{Sistema Compatible Determinado (SCD, sol única)}$

Obtemos as solucións coa expresión $x_i = \frac{|A_{x_i}|}{|A|}$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} \overbrace{-2}^B & \overbrace{-3}^y & \overbrace{1}^z \\ 0 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix}}{32} = \frac{32}{32} = 1$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} \overbrace{2}^x & \overbrace{-2}^B & \overbrace{1}^z \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}}{32} = \frac{32}{32} = 1$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} \overbrace{2}^x & \overbrace{-3}^y & \overbrace{-2}^B \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}}{32} = \frac{-32}{32} = -1$$

SOL: $(1, 1, -1) : x = 1, y = 1, z = -1$

5.2. Discusión e resolución polo método de Gauss.

NOTA: A discusión e resolución de sistemas pode facerse tamén mediante o método de Gauss. É fácil ver que o método de Gauss é un algoritmo baseado no método de redución de sistemas de ecuacións.

Ó aplicarlle Gauss á matriz ampliada dun sistema, poderemos decidir se estamos ante un SI (en redución equivale a chegar a $0=1$ ou similares), ante un SCI (equivale chegar a un $0=0$) e ante un SCD (ó triangularizar a matriz temos despxada z (ou a última incógnita) na última fila e imos obtendo o valor das demais escalonadamente). Vexámolo:

DISCUSIÓN DUN SISTEMA POR GAUSS

Aplicando as transformacións elementais á matriz ampliada, podemos ter os seguintes casos (consideramos b_m non nulo):

CASO 1: Non se anula ninguna fila. Na última fila chegamos a $0 \ 0 \ \dots \ 0 \ b_n$. Volvendo a escribilo como un sistema teríamos $0=b_n$. **O sistema é SI.**

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \dots & \boxed{0} & \boxed{b'_m} \end{array} \right)$$

CASO 2: Anúlase alguna fila. É o caso " $0=0$ ", hai ecuacións dependentes coas demais ("sobran"). Temos menos ecuacións que incógnitas, **o sistema é SCI.**

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \dots & \boxed{0} & \boxed{0} \end{array} \right)$$

RESOLUCIÓN: Quedámonos coas filas que non se anulan, e convertemos en parámetros as incógnitas sobrantés, obtendo a solución das restantes en función destes parámetros (para os diferentes valores dos parámetros obtemos diferentes solucións das infinitas que hai).

CASO 3: O sistema queda escalonado (a matriz A triangular) e podemos obter a solución. **O sistema é SCD.**

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \dots & \boxed{a'_{mn}} & \boxed{b'_m} \end{array} \right)$$

RESOLUCIÓN: Da última fila obtemos o valor da última incógnita e obtemos as demais secuencialmente.

Exemplo 5.2.1: Discute as solucións do sistema:
$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

Facemos Gauss na ampliada $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3 \rightarrow F_3 - F_1]{F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{2} \end{array} \right)$$

Como estamos no caso 1, (chegamos a $0 = 2$), o sistema é incompatible (SI: non hai solución).

Exemplo 5.2.2: Discute as solucións do sistema:
$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

Facemos Gauss na ampliada $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3 \rightarrow F_3 - F_1]{F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{0} \end{array} \right)$$

Como estamos no caso 2, ($0 = 0$), o sistema é compatible indeterminado (SCI: ∞ sol).

Obtemos o sistema equivalente $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

Convertemos a incógnita z en parámetro $z = t$, e obtemos as solucións despxando x e y en función de t :

$$\begin{cases} x + y - \frac{z}{t} = 1 \\ y + 3\frac{z}{t} = 0 \\ \boxed{z = t} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 1 + t \\ \boxed{y = -3t} \\ \boxed{z = t} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\overbrace{(-3t)}^y + 1 + t \\ \boxed{y = -3t} \\ \boxed{z = t} \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -3t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}}$$

LEMBRA: A partir da solución paramétrica podemos obter diferentes solucións concretas dando distintos valores ó parámetro.

Exemplo 5.2.3: Dadas as solucións $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -3t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, podemos obter solucións concretas:

$$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \\ z = 1 \end{cases}, \quad t = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = -\frac{9}{2} \\ z = \frac{3}{2} \end{cases} \dots \text{todas son solucións}$$

Exemplo 5.2.4: Discute as solucións do sistema: $\begin{cases} 2x - 3y + z = -2 \\ -2x - 2z = 0 \\ 3x - 2y - 3z = 4 \end{cases}$

Facemos Gauss en $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & -3 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3 \rightarrow F_3 - 3/2 F_1]{F_2 \rightarrow F_2 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 5/2 & -9/2 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 + 5/6 F_2}$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -16/3 & 16/3 \end{array} \right)$$

Como estamos no caso 3, o sistema é compatible determinado (SCD, sol única) e podemos obter a solución escalonadamente:

Obtemos o sistema equivalente: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -16/3 & 16/3 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} 2x - 3y + z = -2 \\ -3y - z = -2 \\ -16/3 z = 16/3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{-2+3y-z}{2} \\ y = \frac{2-z}{3} \\ z = -1 \end{cases}$

SOL: $(1, 1, -1) : x = 1, y = 1, z = -1$

5.3. Discusión e resolución de sistemas de ecuacións lineais cun parámetro.

NOTA: Como xa se comentou, a discusión e resolución de sistemas de ecuacións lineais cun parámetro é un dos exercicios máis recurrentes nos exames das PAU dos últimos anos. É case unha garantía que apareza nalgunha das dúas opcións.

Este epígrafe é meramente práctico, a teoría necesaria para facer os exercicios é a dos epígrafes anteriores. Vexamos entón algún exemplo de discusión e resolución con Rouché-Frobenius-Crammer e por Gauss:

Exemplo 5.3.1: Discute e resolve, en función do parámetro m , o sistema de ecuacións:

$$\begin{cases} x + y - z = m \\ mx + 2y - z = 3m \\ 2x + my - z = 6 \end{cases}$$

SOL: Podémolo facer por Rouché – Frobenius ou por Gauss. Eleximos o 1º método:

Estudamos os rangos das matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ m & 2 & -1 \\ 2 & m & -1 \end{pmatrix}$ e $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & m \\ m & 2 & -1 & | & 3m \\ 2 & m & -1 & | & 6 \end{pmatrix}$.

Rango A :

$$|A| = -m^2 + 2m \Rightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ \text{ou} \\ m = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{se } m \neq 0 \text{ e } m \neq 2, \text{ Rango } A = 3$$

Se $m = 0$ ou $m = 2$, atopamos o menor de orde 2 $\neq 0$: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } A = 2$

Rango A' : Sabemos que $\text{Rango } A' \geq \text{Rango } A$ por estar A contida en A' , así:

- **Se $m \neq 0$ e $m \neq 2$,** $\text{Rango } A = \text{Rango } A' = n^\circ \text{ incógnitas} = 3$,
e temos sistema compatible determinado SCD (solución única)

- **Se $m = 0$** , $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & 0 \\ 2 & 0 & -1 & | & 6 \end{pmatrix}$ con C_1, C_2 e C_4 atopamos $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } A' = 3$

Así $\text{Rango } A \neq \text{Rango } A'$ e temos sistema incompatible SI (non hai solución)

- **Se $m = 2$** temos $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 2 & 2 & -1 & | & 6 \\ 2 & 2 & -1 & | & 6 \end{pmatrix}$. Estudamos o seu rango:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Menores de orde 3: } \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = |A| = 0 \text{ e } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Rango } A' < 3 \\ \text{Atopamos o menor de orde 2 } \neq 0: \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } A' \geq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Rango } A' = 2$$

Así $\text{Rango } A = \text{Rango } A' = 2 < n^\circ \text{ incógnitas}$

e temos sistema compatible indeterminado SCI (∞ sol)

* Resumindo, a discusión do sistema queda:

- **Se $m \neq 0$ e $m \neq 2$,** sistema compatible determinado SCD (solución única)
- **Se $m = 0$** sistema incompatible SI (non hai solución)
- **Se $m = 2$** sistema compatible indeterminado SCI (∞ sol)

RESOLUCIÓN: Temos que resolver o sistema cando sexa compatible:

· **$\boxed{\text{Se } m \neq 0 \text{ e } m \neq 2}$, sistema compatible determinado SCD (solución única)**

Usamos a regra de Crammer: $|A| = -m^2 + 2m$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} \overset{B}{\tilde{m}} & 1 & -1 \\ 3m & 2 & -1 \\ 6 & m & -1 \end{vmatrix} = -2m^2 + m + 6 \Rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-2m^2 + m + 6}{-m^2 + 2m}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & \overset{B}{\tilde{m}} & -1 \\ m & 3m & -1 \\ 2 & 6 & -1 \end{vmatrix} = m^2 - 5m + 6 \Rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{m^2 - 5m + 6}{-m^2 + 2m}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \overset{B}{\tilde{m}} \\ m & 2 & 3m \\ 2 & m & 6 \end{vmatrix} = m^3 - 3m^2 - 4m + 12 \Rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{m^3 - 3m^2 - 4m + 12}{-m^2 + 2m}$$

· **$\boxed{\text{Se } m = 2}$, sistema compatible indeterminado SCI (∞ sol)**

Como Rango $A = 2$ e hai 3 incógnitas, sobra unha ecuación. Como no menor $\neq 0$ interviñan a 1ª e a 2ª fila, quedámonos coa 1ª e coa 2ª ecuación:

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + 2y - z = 6 \end{cases}$$

Facemos $x = t$, queda $\begin{cases} y - z = 2 - t \\ 2y - z = 6 - 2t \end{cases}$ e obtemos as solucións $\boxed{\begin{cases} x = t \\ y = 4 - t \\ z = 2 \end{cases}}, t \in \mathbb{R}$

NOTA: As solucións podémolas obter por redución ou por Crammer.

NOTA: OLLO, neste caso non se pode facer z parámetro ($z=t$), se o facemos queda

$$\begin{cases} x + y = 2 + t \\ 2x + 2y = 6 + t \end{cases} \text{ e por redución } 0 = -2 + t \text{ e } t = 2 \text{ (é un valor fixo, non un parámetro)}$$

En xeral se unha incógnita da unha constante ó calculala, non se poder converter nun parámetro, hai que empregar outra.

Neste último caso, como $z=2$, ó obter solucións concretas, z sempre toma o valor 2:

Exemplo 5.3.2: Dadas as solucións $\begin{cases} x = t \\ y = 4 - t \\ z = 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, podemos obter solucións concretas:

$$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \\ z = 2 \end{cases}, \quad t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}, \quad t = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{5}{2} \\ z = 2 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \dots \text{todas son solucións, } z \text{ sempre vale 2, por eso non} \\ \text{podemos tomar } z \text{ como parámetro que toma valores} \end{array} \right.$$

En xeral para a discusión de sistemas con parámetros utilizaremos Rouché-Frobenius, pero tamén se pode facer por Gauss. Vexámolo:

Exemplo 5.3.3: Discute e resolve, en función do parámetro m , o sistema de ecuacións:

$$\begin{cases} x + y - z = m \\ mx + 2y - z = 3m \\ 2x + my - z = 6 \end{cases}$$

Aplicámoslle o método de Gauss á ampliada $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & m \\ m & 2 & -1 & 3m \\ 2 & m & -1 & 6 \end{array} \right)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & m \\ m & 2 & -1 & 3m \\ 2 & m & -1 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 - mF_1, F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & m \\ 0 & 2-m & -1-m & 3m-m^2 \\ 0 & m-2 & 1 & 6-2m \end{array} \right)$$

Se $2-m=0$ o sistema xa estaría triangularizado cambiando F_2 e F_3 de orde. Polo tanto estudamos o caso $\boxed{m=2}$

Se $m=2$ a matriz na que aplicamos Gauss queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \text{ que ten } F_2 = F_3, \text{ restándoas queda } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ sistema compatible indeterminado (SCI)}$$

Resolvémolo a través do sistema equivalente: $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = t \\ y = 4 - t \\ z = 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}}$$

Seguimos aplicando Gauss en $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & m \\ 0 & 2-m & -1+m & 3m-m^2 \\ 0 & m-2 & 1 & 6-2m \end{array} \right)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & m \\ 0 & 2-m & -1+m & 3m-m^2 \\ 0 & m-2 & 1 & 6-2m \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & m \\ 0 & 2-m & -1+m & 3m-m^2 \\ 0 & 0 & m & -m^2+m+6 \end{array} \right)$$

Temos que estudar os casos nos que a última fila de A quede 0, é dicir, o caso $\mathbf{m=0}$

Se $m=0$ a matriz queda .

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right) \text{ e polo tanto o sistema é incompatible (SI, sen solución)}$$

Queda estudar o caso xeral:

Se $m \neq 0$ e $m \neq 2$ o sistema é compatible determinado (SCD, unha solución única)

$$z = \frac{-m^2 + m + 6}{m} \text{ e escalonadamente obtemos o valor de } y \text{ e de } x \text{ (omitiomos o}$$

desenvolvemento pola extensión dos cálculos)

NOTA: O valor de z é o mesmo que no exemplo 1.3.1 se simplificamos.

LIGAZÓNS DE INTERESE:

Na seguinte web podemos introducir os coeficientes dun sistema de ecuacións lineais 3×3 . A páxina amosa o sistema reducido por Gauss e calcula as solución do sistema. Moi útil para comprobar exercicios.

Resolución de sistemas 3×3 por Gauss:

<http://www.vadenumeros.es/actividades/metodo-de-gauss.htm>

Ademais tamén serán útiles as calculadoras matriciais usadas nas unidades anteriores:

WIRIS - Completísima calculadora online:

<http://www.wiris.net/editorial-bruno/wiris/es/index.html>

TUTORIAIS WIRIS PARA MATRICES:

http://encina.pntic.mec.es/rroc0001/csll/p_algebra/index.html

<http://www.csi->

[csif.es/andalucia/modules/mod_ense/revista/pdf/Numero_21/PATRICIA_PEREZ_OR_TIZ02.pdf](http://www.csi-csif.es/andalucia/modules/mod_ense/revista/pdf/Numero_21/PATRICIA_PEREZ_OR_TIZ02.pdf)

TUTORIAL XERAL DE WIRIS

<http://www.infoymate.es/wiris/>

Calculadoras online de matrices (calculan determinantes, rangos...):

<http://www.xuletas.es/matrices.php>

http://wims.unice.fr/wims/en_home.html