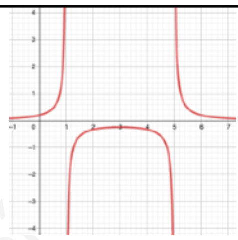
BOLETÍN DE REPASO PARA 1ºBACHILLERATO: EJERCICIOS DE FUNCIONES 4ºESO

SOLUCIONES DETALLADAS - EJERCICIO 1

Dejo las soluciones con explicaciones de los ejercicios del boletín de repaso de funciones de 4º de ESO. También adjunto las gráficas aunque no se pidan en todos los ejercicios, para que vayáis acostumbrando la vista, ya que uno de los objetivos fundamentales es dominar la representación gráfica y ganar intuición para saber de forma aproximada cómo es una función sin gastar demasiado tiempo. En cursiva están las explicaciones didácticas, no es necesario que las escribáis (tampoco pasa nada si lo hacéis).

1. Calcula el dominio de las siguientes funciones:

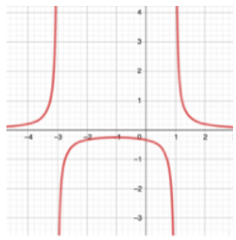
a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 6x + 5}$



No hay dominio de una función cuando el denominador es cero. Hay un denominador con "x", por lo que tenemos que evaluar para qué valores de "x" ese denominador se anula.

$$x^2 - 6x + 5 \neq 0 \implies x \neq 1\ , x \neq 5 \implies \mathbf{Dom(f)} = \mathbb{R} - \{\mathbf{1, 5}\}$$

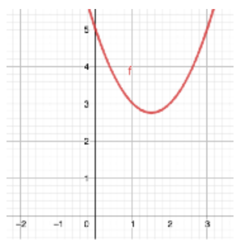
b). $f(x) = \dfrac{1}{(x+3)\cdot(x-1)}$



Al igual que en a), hay un denominador con "x", por lo que tenemos que evaluar para qué valores de "x" ese denominador se hace cero. El denominador es un polinomio factorizado, así que podemos saber directamente sus raíces (soluciones de P(x)=0)

$$(x+3)\cdot(x-1) \neq 0 \implies x \neq -3\ , x \neq 1 \implies \mathbf{Dom(f)} = \mathbb{R} - \{\mathbf{-3, 1}\}$$

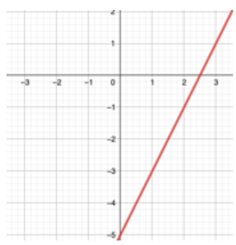
c) $f(x) = x^2 - 3x + 5$



Esto es polinomio de grado dos, función cuadrática, su gráfica es una parábola y su dominio son todos los reales (no hay ni denominadores con x, ni raíces, ni logaritmos).

$$\mathbf{Dom(f)} = \mathbb{R}$$

d) $f(x) = 2x - 5$



Función lineal, de pendiente 2 y ordenada en el origen –5. Es una recta y su dominio son todos los reales, como con todas las polinómicas.

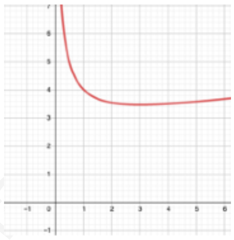
$$\mathbf{Dom(f)} = \mathbb{R}$$

e) $f(x) = \sqrt{2x - 6}$

Función radical de índice par. No existen cuando el discriminante (lo de dentro de la raíz) es negativo. Por lo tanto hay que resolver una inecuación (discriminante mayor o igual que cero):

$2x - 6 \geq 0 \implies 2x \geq 6 \implies x \geq 3 \implies \mathbf{Dom(f)} = [\mathbf{3}, +\infty)$

f) $f(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{x}}$



Se juntan dos cuestiones a tener en cuenta, una raíz y x en el denominador. Por haber raíz, el discriminante tiene que ser mayor o igual que cero, pero por estar en el denominador, tampoco puede valer cero así que la desigualdad es estricta:

$x > 0 \implies \mathbf{Dom(f)} = (\mathbf{0}, +\infty)$

g) $f(x) = 2^x$

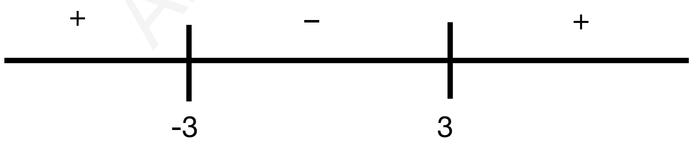
Es una función exponencial de base mayor que uno, tenéis que conocer su representación gráfica (ese famoso crecimiento exponencial), y su dominio son todos los reales.

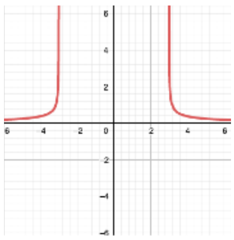
$\mathbf{Dom(f)} = \mathbb{R}$

h) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$

Como en el f), hay raíz en denominador, así que hay que resolver una inecuación con desigualdad estricta.

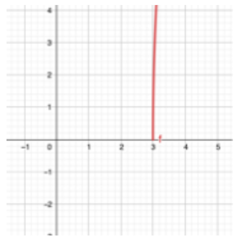
$x^2 - 9 > 0 \implies x^2 > 9 \implies$ *(resolvemos la inecuación de segundo grado)*





$\implies \mathbf{Dom(f)} = (-\infty\ , -\mathbf{3}) \cup (\mathbf{3}, +\infty)$

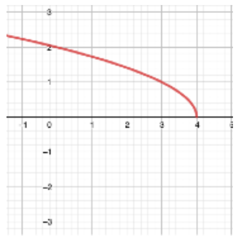
i) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 27}{\sqrt{2x-6}}$



Parecido al e), pero la raíz está en el denominador, por lo que la desigualdad a resolver es estricta.

$$2x - 6 > 0 \implies 2x > 6 \implies x > 3 \implies \mathbf{Dom(f) = (3, +\infty)}$$

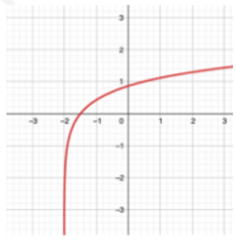
j) $f(x) = \sqrt{-x+4}$



Igual que el e), una raíz de índice par, su discriminante tiene que ser mayor o igual que cero.

$$-x + 4 \geq 0 \implies -x \geq -4 \implies x \leq 4 \implies \mathbf{Dom(f) = (-\infty, 4]}$$

k) $f(x) = \log_5(2x+4)$

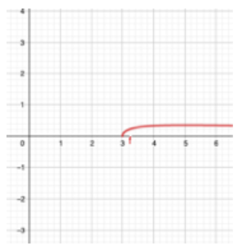


Para los logaritmos, hay que saber que su argumento (lo que tienen dentro), tiene que ser mayor estricto que cero (no existen logaritmos de números negativos ni de cero). Así que resolveremos la inecuación:

$$2x + 4 > 0 \implies 2x > -4 \implies x > -2 \implies \mathbf{Dom(f) = (-2, +\infty)}$$

l) **ESTE APARTADO TIENE UNA ERRATA, EL DENOMINADOR DEBERÍA DE SER $x^2 - 1$ y no $x^1 - 1$ que es lo que está en el boletín. Resuelvo ambos casos:**

l1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-3}}{x-1}$



Se juntan dos cuestiones a tener en cuenta. (I) En el numerador una raíz, su discriminante debe ser mayor o igual que cero y (II) un denominador con x, cuyo valor no puede ser cero. Hay que estudiar ambas situaciones por separado y tenerlas en cuenta para el resultado.

(I) $x - 3 \geq 0 \implies x \geq 3 \implies \mathbf{Dom(f_I) = (3, +\infty)}$

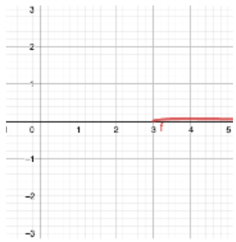
(II) $x - 1 \neq 0 \implies x \neq 1 \implies \mathbf{Dom(f_{II})} = \mathbb{R} - \{\mathbf{1}\}$

Intersecamos (I) y (II) y obtenemos:

$$\mathbf{Dom(f) = Dom(f_I) \cap Dom(f_{II}) = (3, +\infty) - \{1\} = (3, +\infty)}$$

(el 1 no está en el intervalo, luego el intervalo queda igual)

l2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2-1}$



Igual que antes, estudiamos por separado: (I) En el numerador una raíz, su discriminante debe ser mayor o igual que cero y (II) un denominador con x, cuyo valor no puede ser cero.

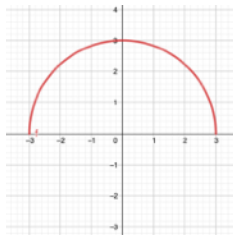
(I) $x - 3 \geq 0 \implies x \geq 3 \implies \mathbf{Dom(f_I) = (3, +\infty)}$
(II) $x^2 - 1 \neq 0 \implies x^2 \neq 1 \implies \mathbf{Dom(f_{II}) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}}$

Intersecamos (I) y (II) y obtenemos:

$$\mathbf{Dom(f) = Dom(f_I) \cap Dom(f_{II}) = (3, +\infty) - \{-1, 1\} = (3, +\infty)}$$

(ni el -1 ni el 1 están en el intervalo, luego el intervalo queda igual, si alguno estuvieran habría que quitarlo)

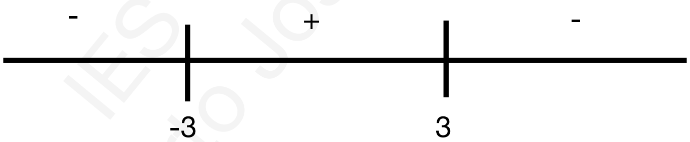
m) $f(x) = \sqrt{-x^2+9}$



Función radical de índice par. No existen cuando el discriminante (lo de dentro de la raíz) es negativo. Por lo tanto hay que resolver una inecuación (discriminante mayor o igual que cero):

$-x^2 + 9 \geq 0 \implies -x^2 \geq -9 \implies x^2 \leq 9 \implies$

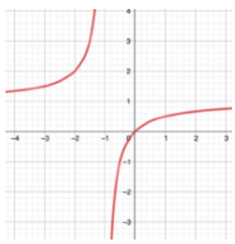
(resolvemos la inecuación de segundo grado)



$\implies \mathbf{Dom(f) = [-3, 3]}$

(curiosidad, la gráfica es una semicircunferencia, fijaos que si elevamos al cuadrado la función y cambiamos de lado la x, queda $x^2 + y^2 = 9$, que se corresponde con una circunferencia de centro cero y radio 3)

n) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$



Hay un denominador con "x", por lo que tenemos que evaluar para qué valores de "x" ese denominador se anula.

$x + 1 \neq 0 \implies x \neq -1 \implies \mathbf{Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1\}}$

BOLETÍN DE REPASO PARA 1ºBACHILLERATO: EJERCICIOS DE FUNCIONES 4ºESO

SOLUCIONES DETALLADAS - EJERCICIO 2

Dejo las soluciones con explicaciones de los ejercicios del boletín de repaso de funciones de 4º de ESO.

También adjunto las gráficas aunque no se pidan en todos los ejercicios, para que vayáis acostumbrando la vista, ya que uno de los objetivos fundamentales es dominar la representación gráfica y ganar intuición para saber de forma aproximada cómo es una función sin gastar demasiado tiempo.

En cursiva están las explicaciones didácticas, no es necesario que las escribáis (tampoco pasa nada si lo hacéis).

2. Dadas las siguientes gráficas:

a) Obtén dominio y recorrido

b) Di si son continuas o discontinuas, y en el segundo caso, dónde se encuentran las discontinuidades.

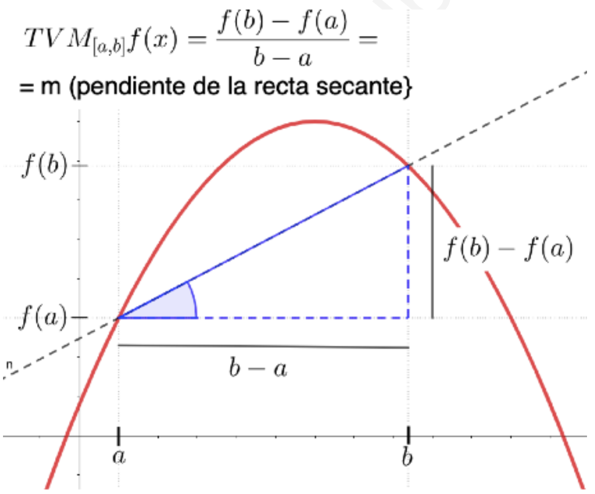
c) Obtén los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Indica si existen máximos y mínimos y dónde se encuentran.

e) Señala si se observa alguna tendencia cuando x tiende a infinito, y si las funciones son periódicas o no.

f) Obtén la TVM de la función a) en los intervalos [0,1], [0,3], [2,5] y [1,5]

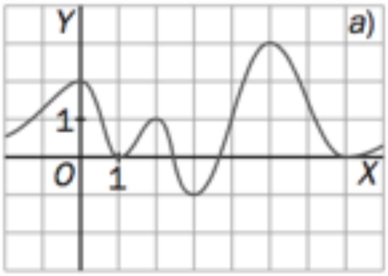
NOTA TEÓRICA



La tasa de variación media de una función f en un intervalo [a,b] se define como:

$$TVM_{[a,b]}f(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

(se corresponde con la pendiente de la recta que corta a la función en los puntos (a,b) y (f(a),f(b)), (lo que sube entre lo que avanza)



a) Dominio y recorrido:

$Dom\ f = \mathbb{R}$ (también puede interpretarse (-2, 8))

$Im\ f = [-1,3]$

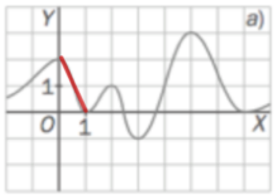
b) Es continua.

c) Monotonía (*siempre se describe como intervalos de x*):
$Creciente : (-\infty,0) \cup (1,\ 2) \cup (3,5) \cup (7,+\infty)$ (*misma consideración que para el dominio*)
$Decreciente : (0,\ 1) \cup (2,\ 3) \cup (5,\ 7)$

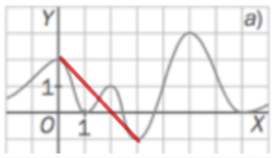
d) Máximos: relativos en x=0 (y=2), x=2 (y=1), absoluto en x=5 (y=3)
Mínimos: relativos en x=1 (y=0), x=7 (y=0), absoluto en x=3 (y=–1)

e) No se perciben tendencias (no vemos asíntotas horizontales, ni queda claro en comportamiento de $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ por la gráfica.
No es periódica.

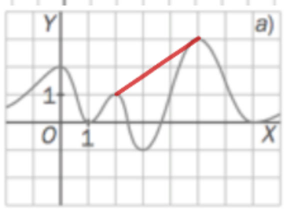
f) $f(0) = 2,\ f(1) = 0,\ f(2) = 1,\ f(3) = -1,\ f(5) = 3$



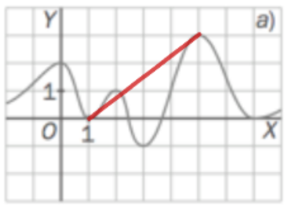
[0,1]: $TVM_{[0,1]}f(x) = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \dfrac{0 - 2}{1} = -2$



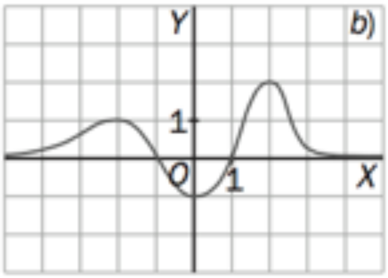
[0,3]: $TVM_{[0,3]}f(x) = \dfrac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \dfrac{-1 - 2}{3} = -\dfrac{3}{3} = -1$



[2,5]: $TVM_{[2,5]}f(x) = \dfrac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \dfrac{3 - 1}{3} = \dfrac{2}{3}$



[1,5]: $TVM_{[1,5]}f(x) = \dfrac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \dfrac{3 - 0}{4} = \dfrac{3}{4}$



a) Dominio y recorrido:

$Dom\ f = \mathbb{R}$ (en este caso parece claro que continúa)

$Im\ f = [-1{,}2]$

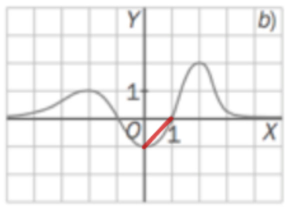
b) Es continua.

c) Monotonía (*siempre se describe como intervalos de x*):
$Creciente : (-\infty, -2) \cup (0,\ 2)$
$Decreciente : (-2,\ 0) \cup (2,\ +\infty)$

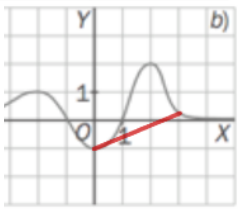
d) Máximos: relativo en x=–2 (y=1), absoluto en x=2 (y=2)
Mínimos: absoluto en x=0 (y=–1)

e) Vemos que la gráfica se acerca al eje horizontal tanto hacia la derecha como hacia la izquierda. En términos propios del curso diremos que **tiene una asíntota horizontal (x=0) y que** $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ **(tiende a cero).** No es periódica.

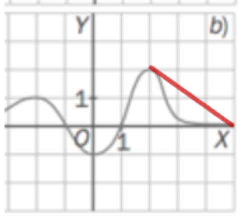
f) Para algunos valores tenemos que hacer una aproximación a ojo:
$f(0) = -1,\ f(1) = 0,\ f(2) = 2,\ f(3) \approx 0'3,\ f(5) \approx 0'1$



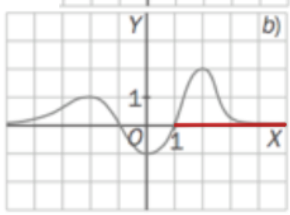
[0,1]: $TVM_{[0,1]}f(x) = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \dfrac{0 - (-1)}{1} = 1$



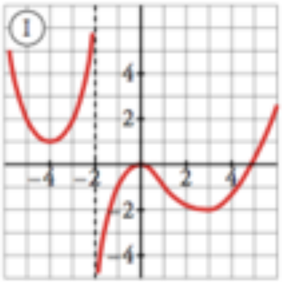
[0,3]: $TVM_{[0,3]}f(x) = \dfrac{f(3) - f(0)}{3 - 0} \approx \dfrac{0'3 - (-1)}{3} \approx -\dfrac{1'3}{3} \approx 0'43$



[2,5]: $TVM_{[2,5]}f(x) = \dfrac{f(5) - f(2)}{5 - 2} \approx \dfrac{0'1 - 2}{3} \approx \dfrac{-1'9}{3} \approx -0'63$



[1,5]: $TVM_{[1,5]}f(x) = \dfrac{f(5) - f(1)}{5 - 1} \approx \dfrac{0'1 - 0}{4} \approx 0$



a) Dominio y recorrido:

$Dom\ f = (-5{,}8, -2) \cup (-2, +\infty)$ (no es muy preciso)

$Im\ f = (-\infty,\ 5'8)$

b) Discontinua; discontinuidad de salto infinito en x=–2 (asíntota vertical, $\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$).

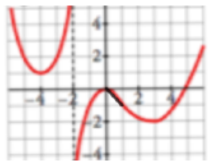
c) Monotonía (*siempre se describe como intervalos de x*):
$Creciente: (-4, -2) \cup (-2, 0) \cup (3, +\infty)$
$Decreciente: (-5'8, -4) \cup (0, 3)$

d) Máximos: relativo en x=0 (y=0)
Mínimos: relativos en x=–4 (y=1), x=3 (y=–2)

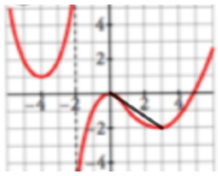
e) No se perciben tendencias (no vemos asíntotas horizontales, parece que hay una rama parabólica: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$).
No es periódica.
.

f) Para algunos valores tenemos que hacer una aproximación a ojo:
$f(0) = 0,\ f(1) = -1,\ f(2) \approx -1'8,\ f(3) = -2,\ f(5) \approx 0$

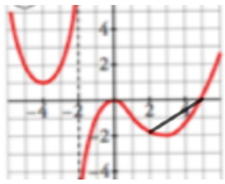
[0,1]: $TVM_{[0,1]} f(x) = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \dfrac{-1 - 0}{1} = -1$



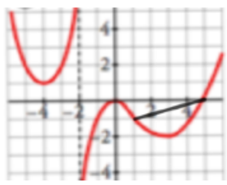
[0,3]: $TVM_{[0,3]} f(x) = \dfrac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \dfrac{-2 - 0}{3} = -\dfrac{2}{3}$

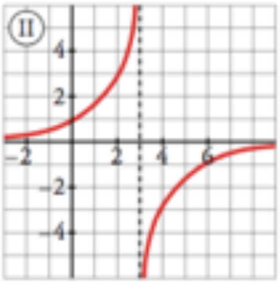


[2,5]: $TVM_{[2,5]} f(x) = \dfrac{f(5) - f(2)}{5 - 2} \approx \dfrac{0 - (-1'8)}{3} \approx \dfrac{1'8}{3} \approx 0'6$



[1,5]: $TVM_{[1,5]} f(x) = \dfrac{f(5) - f(1)}{5 - 1} \approx \dfrac{0 - (-1)}{4} \approx \dfrac{1}{4}$





a) Dominio y recorrido:

$$Dom\ f = \mathbb{R} - \{3\} = (-\infty,\ 3) \cup (3, +\infty)$$

$$Im\ f = \mathbb{R} - \{0\}$$

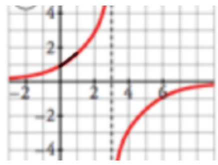
b) Discontinua; discontinuidad de salto infinito en x=3 (asíntota vertical, $\lim_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$).

c) Monotonía (*siempre se describe como intervalos de x*):
$Creciente$: en todo el dominio $(-\infty,\ 3) \cup (3, +\infty)$
$Decreciente$: no decrece.

d) Máximos: no tiene
Mínimos: no tiene

e) Vemos que la gráfica se acerca al eje horizontal tanto hacia la derecha como hacia la izquierda. En términos propios del curso diremos que **tiene una asíntota horizontal (x=0) y que** $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ **(tiende a cero).** No es periódica.

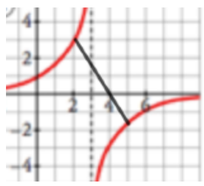
f) Para algunos valores tenemos que hacer una aproximación a ojo:
$f(0) = 1,\ f(1) \approx 1'6,\ f(2) = 3,\ \nexists f(3),\ f(5) \approx -1'6$



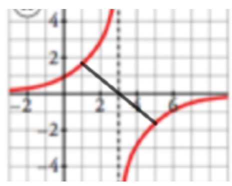
[0,1]: $TVM_{[0,1]}f(x) = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \approx \dfrac{1'6 - 1}{1} \approx 0'6$

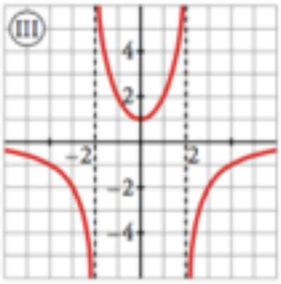
[0,3]: $\nexists f(3)$

[2,5]: $TVM_{[2,5]}f(x) = \dfrac{f(5) - f(2)}{5 - 2} \approx \dfrac{-1'6 - 3}{3} \approx -\dfrac{-4'6}{3} \approx -1'53$



[1,5]: $TVM_{[1,5]}f(x) = \dfrac{f(5) - f(1)}{5 - 1} \approx \dfrac{-1'6 - 1'6}{4} \approx -\dfrac{3'2}{4} \approx -0'8$





a) Dominio y recorrido:

$$Dom\ f = \mathbb{R} - \{-2{,}2\} = (-\infty,\ -2) \cup (-2,\ 2) \cup (2, +\infty)$$

$$Im\ f = (-\infty,\ 0) \cup [1, +\infty)$$

b) Discontinua; discontinuidad de salto infinito en x=–2 y x=2 (asíntotas verticales

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to -2^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty).$$

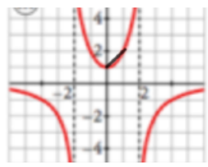
NO SE PREGUNTA, PERO LLAMA LA ATENCIÓN SIMETRÍA PAR (EJE Y)

c) Monotonía (*siempre se describe como intervalos de x*):
$Creciente$: si x>0 $\implies (0,\ 2) \cup (2, +\infty)$
$Decreciente$: si x<0 $\implies (\infty,\ -2) \cup (-2,\ 0)$.

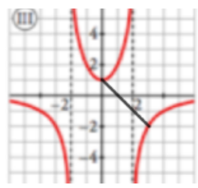
d) Máximos: no tiene.
Mínimos: relativo en x=0 (y=1).

e) Vemos que la gráfica se acerca al eje horizontal tanto hacia la derecha como hacia la izquierda. En términos propios del curso diremos que **tiene una asíntota horizontal (x=0) y que** $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ **(tiende a cero).** No es periódica.

f) Para algunos valores tenemos que hacer una aproximación a ojo:
$f(0) = 1,\ f(1) = 2,\ \nexists f(2),\ f(3) = -2,\ f(5) \approx -0'5$

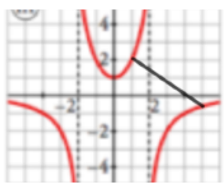


[0,1]: $TVM_{[0,1]}f(x) = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \dfrac{2 - 1}{1} = 1$

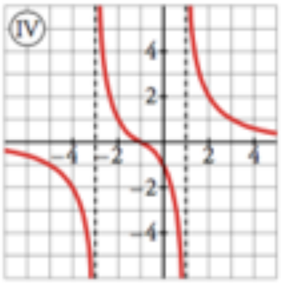


[0,3]: $TVM_{[0,3]}f(x) = \dfrac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \dfrac{-2 - 1}{3} = -\dfrac{3}{3} = -1$

[2,5]: $\nexists f(2)$



[1,5]: $TVM_{[1,5]}f(x) = \dfrac{f(5) - f(1)}{5 - 1} \approx \dfrac{-0'5 - 2}{4} \approx -\dfrac{2'5}{4} \approx -0'625$



a)Dominio y recorrido:

$$Dom\ f = \mathbb{R} - \{-3,1\} = (-\infty,\ -3) \cup (-3,\ 1) \cup (1, +\infty)$$

$$Im\ f = \mathbb{R}$$

b) Discontinua; discontinuidad de salto infinito en x=–3 y x=1 (asíntotas verticales

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to -3^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty).$$

c) Monotonía (*siempre se describe como intervalos de x*):

$Creciente$: no crece

$Decreciente$: en todo el dominio $\implies \mathbb{R} - \{-3,1\}$.

d) Máximos: no tiene. Mínimos: no tiene.

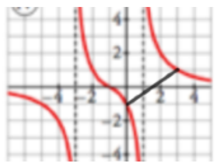
e) Vemos que la gráfica se acerca al eje horizontal tanto hacia la derecha como hacia la izquierda. En términos propios del curso diremos que **tiene una asíntota horizontal (x=0) y que** $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ **(tiende a cero)**. No es periódica.

f) Para algunos valores tenemos que hacer una aproximación a ojo:

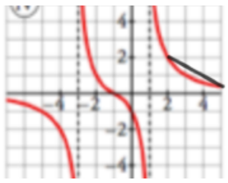
$f(0) = -1,\ \nexists f(1),\ f(2) = 2,\ f(3) = 1,\ f(5) \approx 0'3$

[0,1]: $\nexists f(1)$

[0,3]: $TVM_{[0,3]}f(x) = \dfrac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \dfrac{1 - (-1)}{3} = \dfrac{2}{3}$



[2,5]: $TVM_{[2,5]}f(x) = \dfrac{f(5) - f(2)}{5 - 2} \approx \dfrac{0'3 - 2}{3} \approx -\dfrac{1'7}{3} \approx -0'57$



[1,5]: $\nexists f(1)$

BOLETÍN DE REPASO PARA 1ºBACHILLERATO: EJERCICIOS DE FUNCIONES 4ºESO

SOLUCIONES DETALLADAS - EJERCICIO 3

Dejo las soluciones con explicaciones de los ejercicios del boletín de repaso de funciones de 4º de ESO.

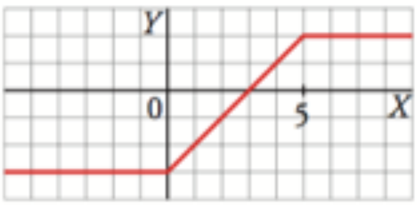
También adjunto las gráficas aunque no se pidan en todos los ejercicios, para que vayáis acostumbrando la vista, ya que uno de los objetivos fundamentales es dominar la representación gráfica y ganar intuición para saber de forma aproximada cómo es una función sin gastar demasiado tiempo.

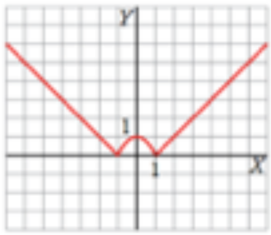
En cursiva están las explicaciones didácticas, no es necesario que las escribáis (tampoco pasa nada si lo hacéis).

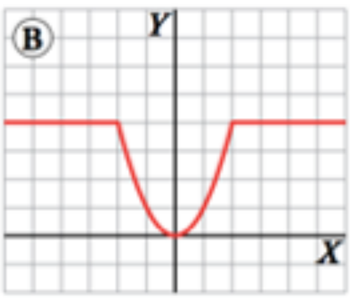
3. Representa las siguientes funciones definidas a trozos:

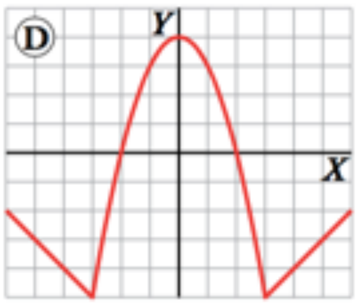
A1) $f(x) = \begin{cases} -3 & si \quad x \leq -2 \\ -x^2+1 & si \quad -2 < x \leq 0 \\ -2x+1 & si \quad 0 < x \end{cases}$ **A2)** $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & si \quad x \leq 1 \\ 4 & si \quad 1 < x \leq 4 \\ -x+8 & si \quad 4 < x \end{cases}$

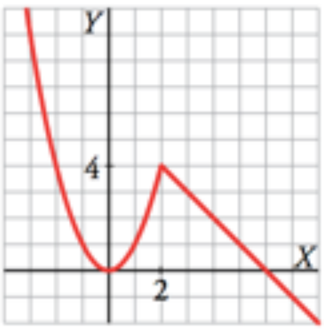
B) Obtén la expresión analítica de las siguientes funciones definidas a trozos:











A1) $f(x) = \begin{cases} -3 & si \quad x \leq -2 \\ -x^2 + 1 & si \quad -2 < x \leq 0 \\ -2x + 1 & si \quad 0 < x \end{cases}$

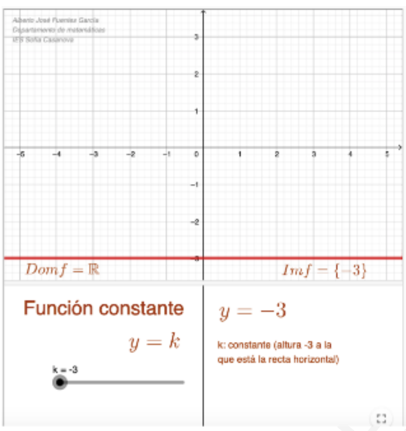
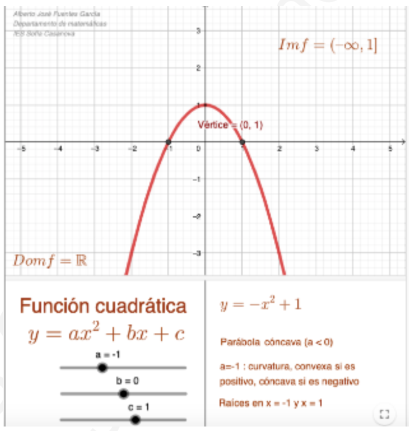
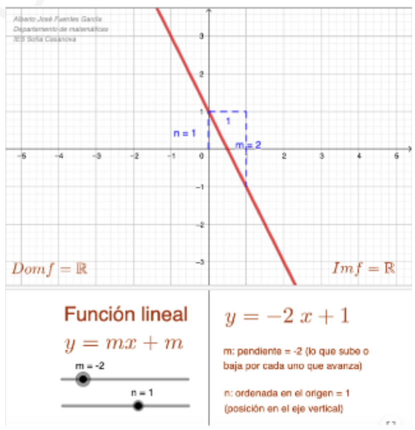
Vemos que hay 3 trozos:

Hasta x=–2 es $f_1(x) = -3$, una función constante (recta horizontal a altura –3)

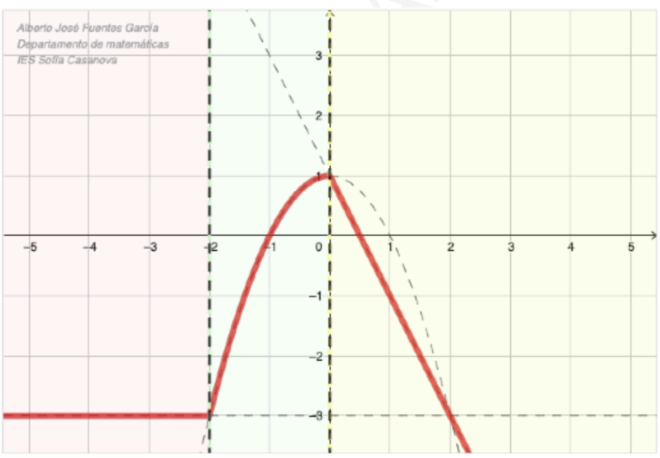
Entre –2 y 0 es $f_2(x) = -x^2 + 1$, una función cuadrática (parábola). La razonamos desde la gráfica de $y = x^2$. Por ser el coeficiente a=–1, sabemos que es cóncava, y por ser el término independiente +1, sabemos que está desplazada una unidad hacia arriba.

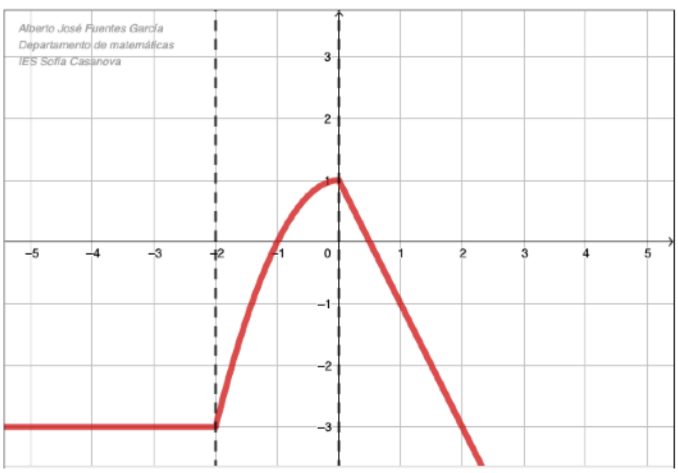
A partir de x=0 es $f_3(x) = -2x + 1$, función lineal (recta). Sabemos que su pendiente es –2 (baja dos por cada unidad que avanza) y su ordenada en el origen es 1, (una unidad sobre el centro de coordenadas en el eje vertical).

Con toda esta información, sabemos como son las gráficas por separado:

f1: Hasta x=–2	f2: x entre –2 y 0	f3: A partir de x=0
		

Combinamos en una sola gráfica atendiendo los distintos intervalos de definición *(muestro dos gráficas una coloreada y con el rastro de las funciones, y otra más limpia, sin colores ni rastros)*:





A2) $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & si \quad x \le 1 \\ 4 & si \quad 1 < x \le 4 \\ -x+8 & si \quad 4 < x \end{cases}$

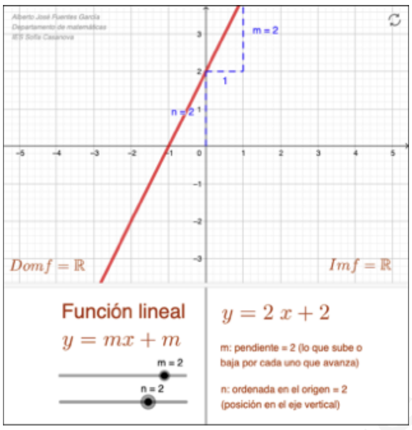
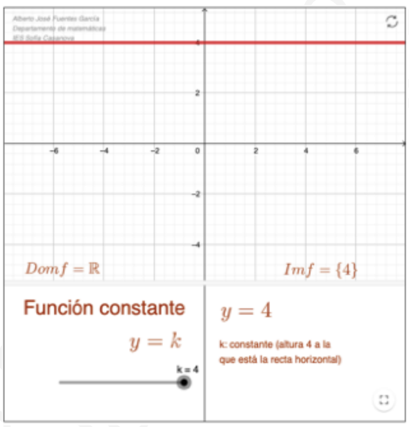
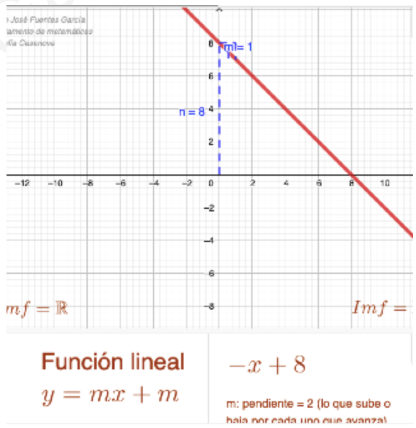
Vemos que hay 3 trozos:

Hasta x=1 es es $f_1(x) = 2x + 2$, función lineal (recta). Sabemos que su pendiente es 2 (sube dos por cada unidad que avanza) y su ordenada en el origen es 2, (dos unidades sobre el centro de coordenadas en el eje vertical).

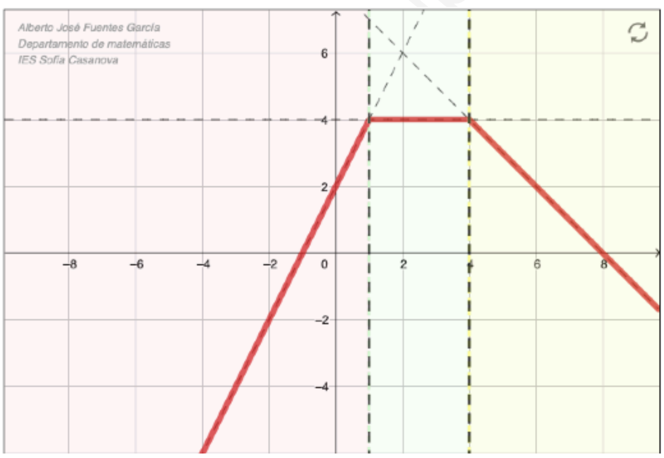
Entre 1 y 4 es $f_2(x) = 4$, una función constante (recta horizontal a altura 4).

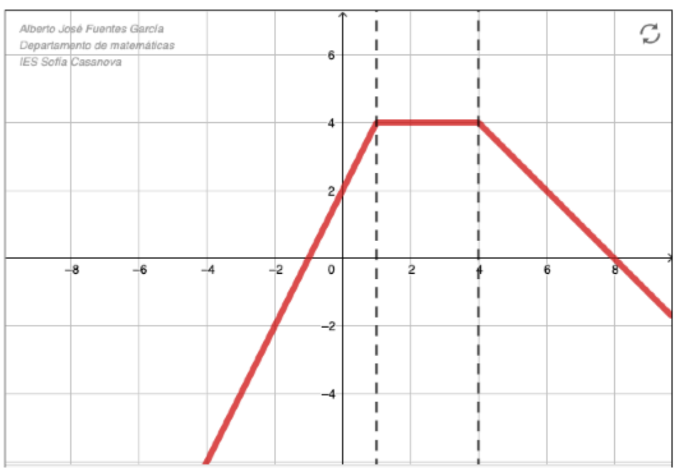
A partir de x=4 $f_3(x) = -x + 8$, función lineal (recta). Sabemos que su pendiente es –1 (baja uno por cada unidad que avanza) y su ordenada en el origen es 8, (ocho unidades sobre el centro de coordenadas en el eje vertical)

Con toda esta información, sabemos como son las gráficas por separado:

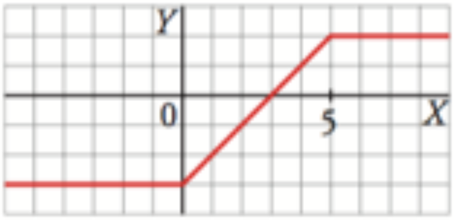
f1: Hasta x=1	f2: x entre 1 y 4	f3: A partir de x=4
		

Combinamos en una sola gráfica atendiendo los distintos intervalos de definición *(muestro dos gráficas una coloreada y con el rastro de las funciones, y otra más limpia, sin colores ni rastros)*:





B1)



1. Identificamos los trozos. El primero es hasta x=0, el segundo entre x=0 y x=5 y el tercero desde x=5. Así podemos escribir:

$$f(x) = \begin{cases} & si \quad x \leq 0 \\ & si \quad 0 < x \leq 5 \\ & si \quad 5 < x \end{cases}$$

2. Obtenemos las funciones para cada trozo:

2.1. $Si \;\; x < 0 \implies f_1(x)$ es una **recta horizontal** a altura –3, luego es la **función constante** $f_1(x) = -3$.

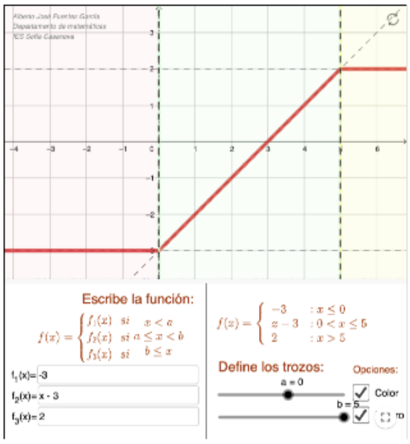
2.2. $Si \;\; 0 \leq x < 5 \implies f_2(x)$ es una **recta de pendiente m=1** (sube uno por cada uno que avanza) y **ordenada en el origen n=–3**, luego es la función lineal $f_2(x) = x - 3$.

2.3. $Si \;\; 5 < x \implies f_3(x)$ es una **recta horizontal a altura 2**, luego es la **función constante** $f_3(x) = 2$.

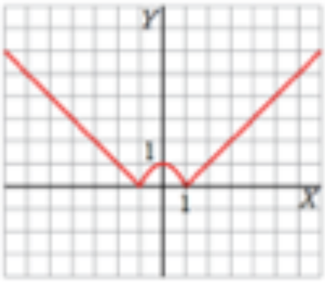
Así que la expresión analítica de la función es:

$$f(x) = \begin{cases} -3 & si \quad x \leq 0 \\ x - 3 & si \quad 0 < x \leq 5 \\ 2 & si \quad 5 < x \end{cases}$$

Comprobamos:



B2)



1. Identificamos los trozos. El primero es hasta x=-1, el segundo entre x=-1 y x=1 y el tercero desde x=1. Así podemos escribir:

$$f(x) = \begin{cases} & si \quad x \leq -1 \\ & si \quad -1 < x \leq 1 \\ & si \quad 1 < x \end{cases}$$

2. Obtenemos las funciones para cada trozo:

2.1. $Si \ \ x < -1 \implies f_1(x)$ es una **recta de pendiente m=–1** (baja uno por cada uno que avanza) y ordenada en el origen n=–1, se puede ver de dos modos:

- Forma intuitiva: si prolongamos la recta, vemos que tocaría al eje vertical en el –1,
- Calculando con ecuación punto pendiente (punto (–1,0) pendiente –1): $y - 0 = -1 \cdot (x+1)$

De cualquier forma sale la función lineal $f_1(x) = -x - 1$.

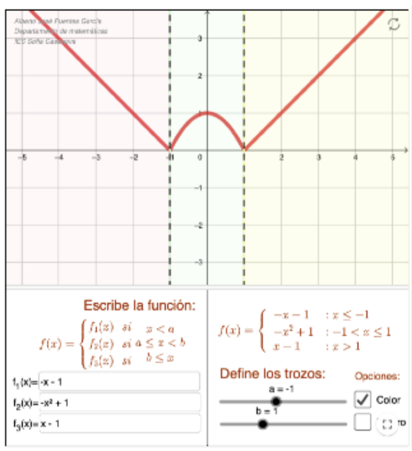
2.2. $Si \ \ -1 \leq x < 1 \implies f_2(x)$ es una **parábola cóncava** (función cuadrática con a negativo). Partimos de la parábola convexa de referencia, $y = -x^2$, la desplazamos una unidad hacia arriba y obtenemos $f_2(x) = -x^2 + 1$.

2.3. $Si \ 1 < x \implies f_3(x)$ es una **recta de pendiente m=1** (sube uno por cada uno que avanza) y ordenada en el origen n=–1 (razonar como en 2.1): $f_3(x) = x - 1$

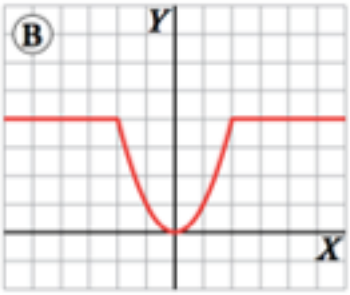
Así que la expresión analítica de la función es:

$$f(x) = \begin{cases} -x-1 & si \quad x \leq -1 \\ -x^2+1 & si \quad -1 < x \leq 1 \\ x-1 & si \quad 1 < x \end{cases}$$

Comprobamos:



B3)



1. Identificamos los trozos. El primero es hasta x=-2, el segundo entre x=-2 y x=2 y el tercero desde x=2. Así podemos escribir:

$$f(x) = \begin{cases} & si \quad x \leq -2 \\ & si \quad -2 < x \leq 2 \\ & si \quad 2 < x \end{cases}$$

2. Obtenemos las funciones para cada trozo:

2.1. $Si \ \ x < -2 \implies f_1(x)$ es una **recta horizontal** a altura 4, luego es la **función constante** $f_1(x) = 4$.

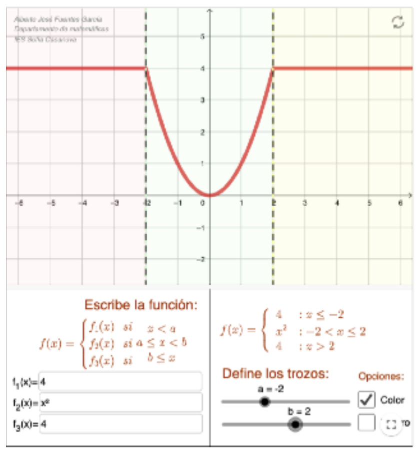
2.2. $Si \ \ -1 \leq x < 1 \implies f_2(x)$ es una **parábola convexa**, la más sencilla $f_2(x) = x^2$.

2.3. $Si \ \ 2 < x \implies f_3(x)$ es una **recta horizontal** a altura 4, luego es la **función constante** $f_3(x) = 4$.

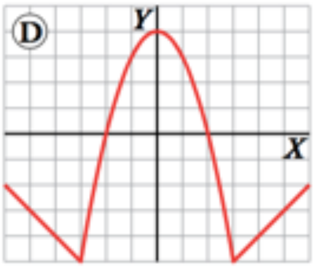
Así que la expresión analítica de la función es:

$$f(x) = \begin{cases} 4 & si \quad x \leq -2 \\ x^2 & si \quad -2 < x \leq 0 \\ 4 & si \quad 2 < x \end{cases}$$

Comprobamos:



B4)



1. Identificamos los trozos. El primero es hasta x=-3, el segundo entre x=-3 y x=3 y el tercero desde x=3. Así podemos escribir:

$$f(x) = \begin{cases} & si \quad x \leq -3 \\ & si \quad -3 < x \leq 3 \\ & si \quad 3 < x \end{cases}$$

2. Obtenemos las funciones para cada trozo:

2.1. $Si \ \ x < -3 \implies f_1(x)$ es una **recta de pendiente m=–1** (baja uno por cada uno que avanza) y ordenada en el origen n=–8, se puede ver de dos modos:

- Forma intuitiva: si prolongamos la recta, vemos que tocaría al eje vertical en el –8,
- Calculando con ecuación punto pendiente (punto (–3,-5) pendiente –1): $y+5=-1\cdot(x+3)$

De cualquier forma sale la función lineal $f_1(x)=-x-8$.

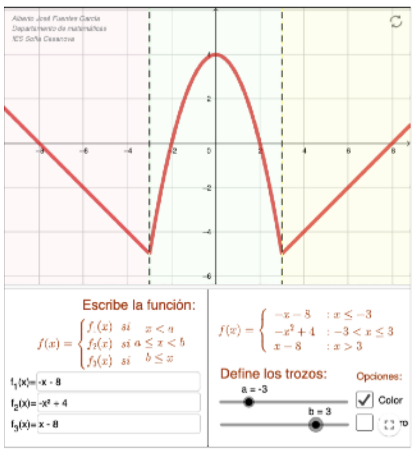
2.2. $Si \ -1 \leq x < 1 \implies f_2(x)$ es una **parábola cóncava** (función cuadrática con a negativo). Partimos de la parábola convexa de referencia, $y=-x^2$, la desplazamos cuatro unidades hacia arriba y obtenemos $f_2(x)=-x^2+4$.

2.3. $Si \ \ 3 < x \implies f_3(x)$ es una **recta de pendiente m=1** (sube uno por cada uno que avanza) y ordenada en el origen n=–8 (razonar como en 2.1): $f_3(x)=x-8$

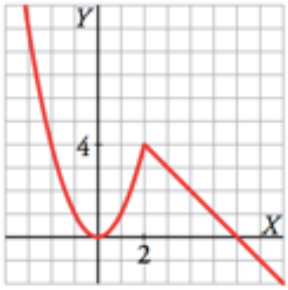
Así que la expresión analítica de la función es:

$$f(x) = \begin{cases} -x-8 & si \quad x \leq -3 \\ -x^2+4 & si \quad -3 < x \leq 3 \\ x-8 & si \quad 3 < x \end{cases}$$

Comprobamos:



B5)



1. Identificamos los trozos. El primero es hasta x=2 y el segundo desde x=2. Así podemos escribir:

$$f(x) = \begin{cases} & si \quad x \leq 2 \\ & si \quad 2 < x \end{cases}$$

2. Obtenemos las funciones para cada trozo:

2.1. $Si \quad x < 2 \implies f_1(x)$ es una **parábola convexa** (función cuadrática con a positivo), la más sencilla $f_2(x) = x^2$.

2.2. $Si \quad 2 < x \implies f_2(x)$ es una **recta de pendiente m=–1** (baja uno por cada uno que avanza) y ordenada en el origen n=6, se puede ver de dos modos:

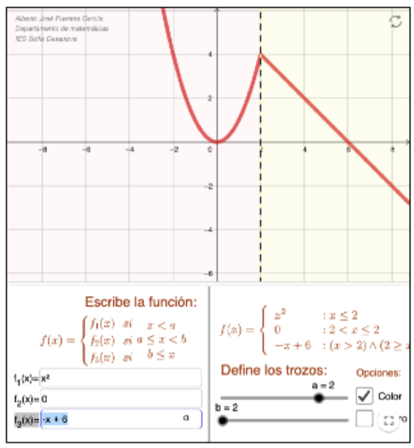
- Forma intuitiva: si prolongamos la recta, vemos que tocaría al eje vertical en el 6,
- Calculando con ecuación punto pendiente (punto (2,4) pendiente –1): $y - 4 = -1 \cdot (x - 2)$

De cualquier forma sale la función lineal $f_1(x) = -x + 6$.

Así que la expresión analítica de la función es:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \leq 2 \\ -x + 6 & si \quad 2 < x \end{cases}$$

Comprobamos:



BOLETÍN DE REPASO PARA 1ºBACHILLERATO: EJERCICIOS DE FUNCIONES 4ºESO

SOLUCIONES DETALLADAS - EJERCICIO 3

Dejo las soluciones con explicaciones de los ejercicios del boletín de repaso de funciones de 4º de ESO.

También adjunto las gráficas aunque no se pidan en todos los ejercicios, para que vayáis acostumbrando la vista, ya que uno de los objetivos fundamentales es dominar la representación gráfica y ganar intuición para saber de forma aproximada cómo es una función sin gastar demasiado tiempo.

En cursiva están las explicaciones didácticas, no es necesario que las escribáis (tampoco pasa nada si lo hacéis).

3. Resuelve analítica y gráficamente los siguientes sistemas:

a) $f(x) = \begin{cases} y = -2x + 4 \\ y = 2x^2 - 4x \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} y = -x^2 + 6x - 9 \\ y = \frac{x}{2} - 3 \end{cases}$

a) $f(x) = \begin{cases} y = -2x+4 \\ y = 2x^2 - 4x \end{cases}$

RESOLUCIÓN ANALÍTICA

Simplemente hay que resolver el sistema de ecuaciones no lineal, *y la forma en la que se escriben las funciones, nos invita a usar igualación (o reducción) para que se vaya la y*.

$$\begin{cases} y = -2x+4 \\ y = 2x^2 - 4x \end{cases} \Longrightarrow -2x+4 = 2x^2 - 4x \Longrightarrow 0 = 2x^2 - 2x - 4 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 0 = x^2 - x - 2$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado ($x = 2$ y $x = -1$) y obtenemos los valores de y correspondientes: $\begin{cases} si\ \ x = 2 \Longrightarrow y = -2 \cdot 2 + 4 = 0 \\ si\ \ x = -1 \Longrightarrow y = -2 \cdot (-1) + 4 = 6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (2,\ 0) \\ (-1{,}6) \end{cases}$

RESOLUCIÓN GRÁFICA

$y = -2x + 4$ es una recta de pendiente –2 y ordenada en el origen 4; *eso es suficiente para representarla aproximadamente, pero mejor lo completamos en una tabla de valores al menos con el corte con el eje X (si y=0, x=4/2=2, el punto es el (2, 0))*:

X	Y
0	4 (n)
1	2
2	0

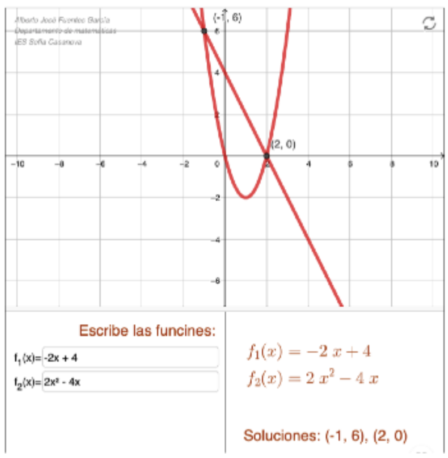
$y = 2x^2 - 4x$ es una función cuadrática con a>0, luego es parábola convexa (∪).

Vértice: $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{2 \cdot 2} = 1 \Longrightarrow y = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = -2 \Longrightarrow V(1. -2)$

Damos valores a la izquierda y a la derecha del vértice, y representamos en la misma gráfica:

Según vemos en la gráfica, las funciones se cortan en los puntos (–1,6) y (2,0)

X	Y
-1	6
0	0
1	**-2 (V)**
2	0
3	6



b) $f(x) = \begin{cases} y = -x^2 + 6x - 9 \\ y = \frac{x}{2} - 3 \end{cases}$

RESOLUCIÓN ANALÍTICA

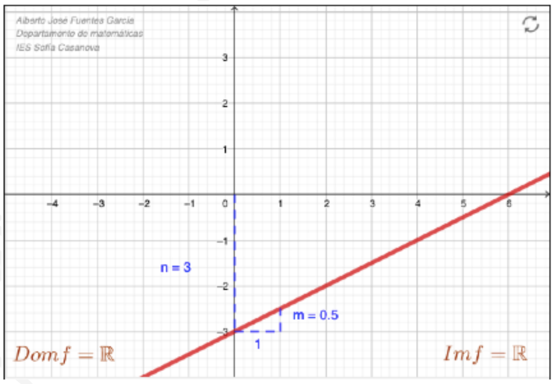
Simplemente hay que resolver el sistema de ecuaciones no lineal, *y la forma en la que se escriben las funciones, nos invita a usar igualación (o reducción) para que se vaya la y.*

$$\begin{cases} y = -x^2 + 6x - 9 \\ y = \frac{x}{2} - 3 \end{cases} \implies -x^2 + 6x - 9 = \frac{x}{2} - 3 \implies 2x^2 - 11x + 12 = 0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado ($x = \dfrac{3}{2}$ y $x = 4$) y obtenemos los valores de y correspondientes: $\begin{cases} si\ \ x = \frac{3}{2} \implies y = \frac{3}{4} - 3 = -\frac{9}{4} = -2'25 \\ si\ \ x = 4 \implies y = 2 - 3 = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} (\frac{3}{2},\ -\frac{9}{4}) \\ (4, -1) \end{cases}$

RESOLUCIÓN GRÁFICA

$y = \dfrac{x}{2} - 3$ es una recta de pendiente –1/2 y ordenada en el origen –3; *eso es suficiente para representarla aproximadamente, pero mejor lo completamos en una tabla de valores al menos con el corte con el eje X (si y=0, x=6, el punto es el (6, 0)):*



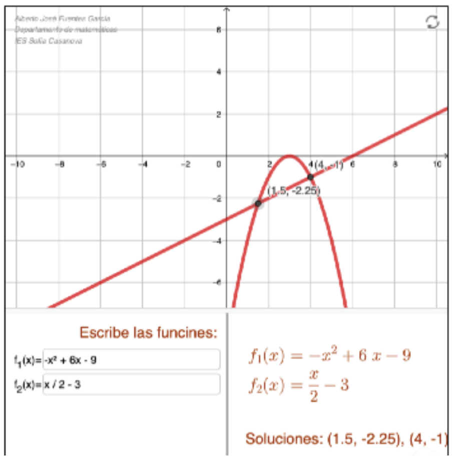
X	Y
0	-3 (n)
2	-2
4	-1
6	0

$y = -x^2 + 6x - 9$ es una función cuadrática con a<0, luego es parábola cóncava (∩).

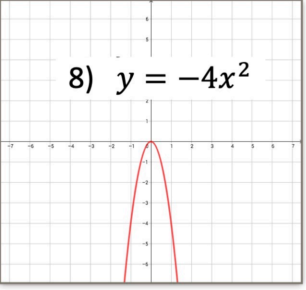
Vértice: $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{6}{2 \cdot (-1)} = 3 \implies y = -3^2 + 6 \cdot 3 - 9 = 0 \implies V(3. - 0)$

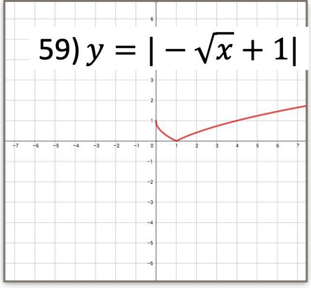
Damos valores a la izquierda y a la derecha del vértice, y representamos en la misma gráfica:

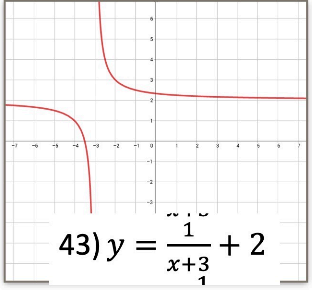
X	Y
1	-4
2	-1
3	**0 (V)**
4	-1
5	-4

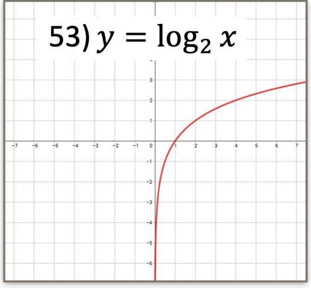


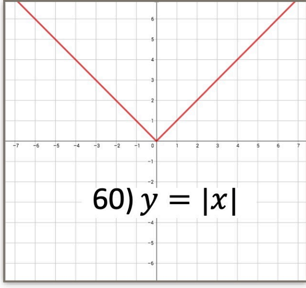
Según vemos en la gráfica, las funciones se cortan en los puntos (1’5, –2’25) y (4, –1)

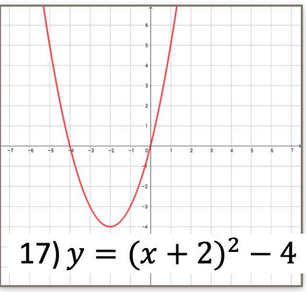

8) $y = -4x^2$

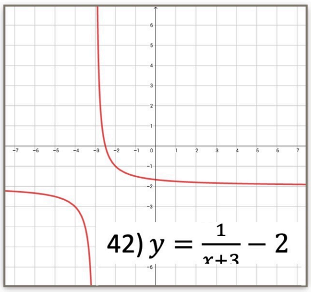

59) $y = |-\sqrt{x} + 1|$

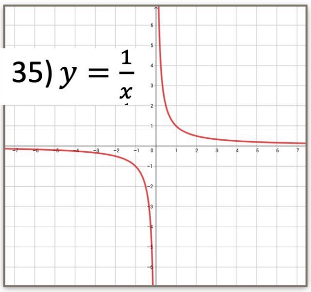

43) $y = \frac{1}{x+3} + 2$

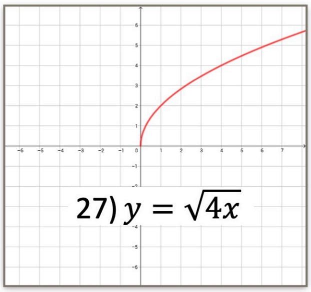

53) $y = \log_2 x$

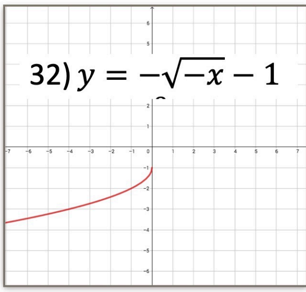

60) $y = |x|$

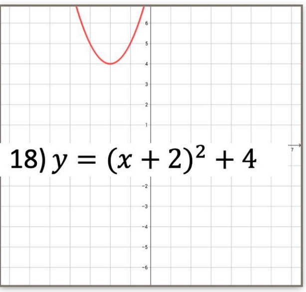

17) $y = (x+2)^2 - 4$

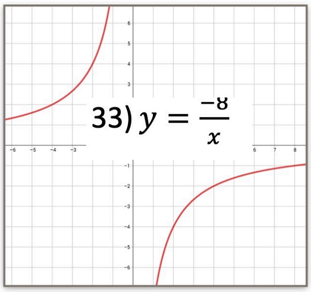

42) $y = \frac{1}{x+3} - 2$

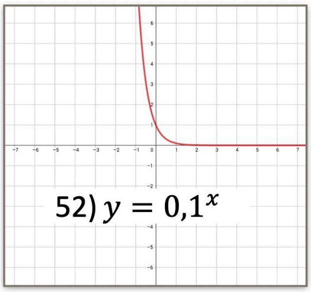

35) $y = \frac{1}{x}$

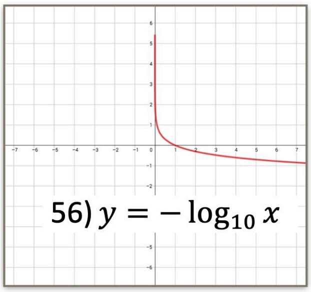

27) $y = \sqrt{4x}$

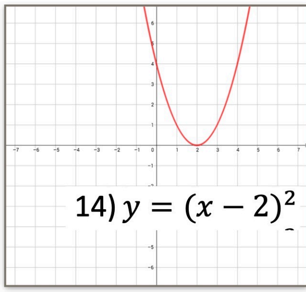

32) $y = -\sqrt{-x} - 1$

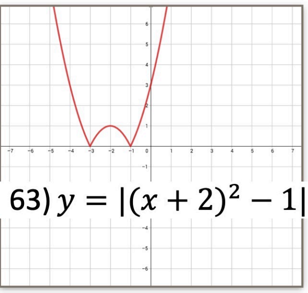

18) $y = (x+2)^2 + 4$

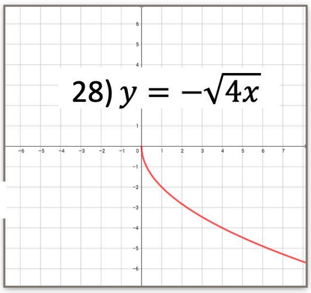

33) $y = \frac{-8}{x}$

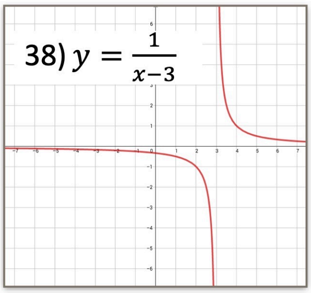

52) $y = 0{,}1^x$

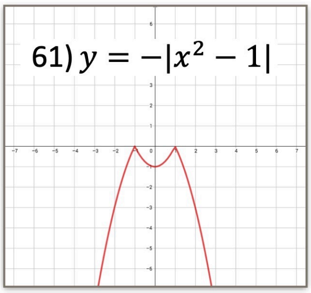

56) $y = -\log_{10} x$

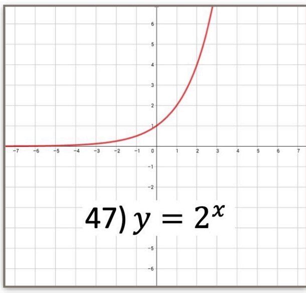

14) $y = (x-2)^2$

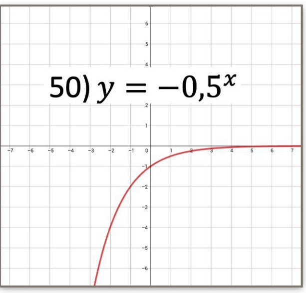

63) $y = |(x+2)^2 - 1|$

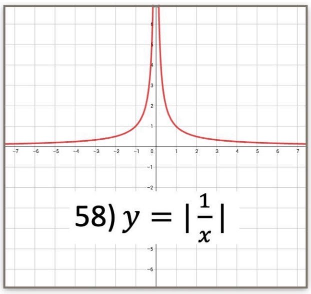

28) $y = -\sqrt{4x}$

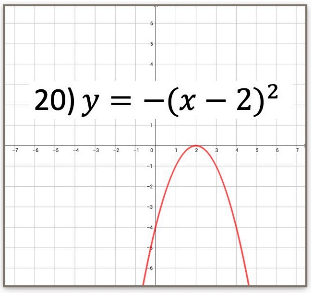

38) $y = \frac{1}{x-3}$

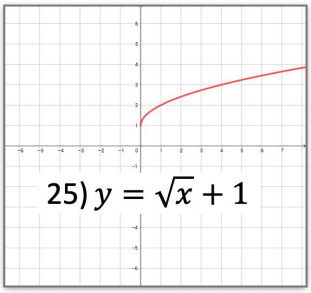

61) $y = -|x^2 - 1|$

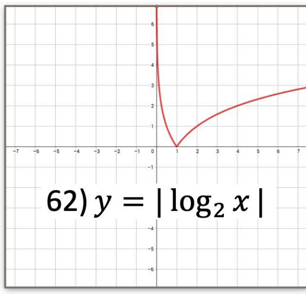

47) $y = 2^x$

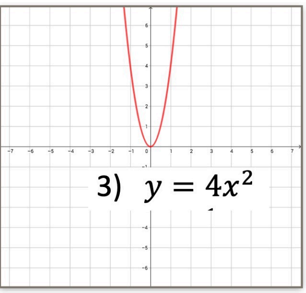

50) $y = -0{,}5^x$

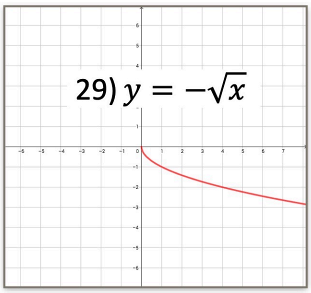

58) $y = |\frac{1}{x}|$

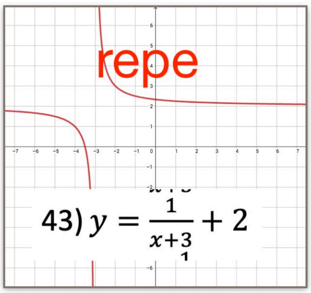

20) $y = -(x-2)^2$


25) $y = \sqrt{x} + 1$

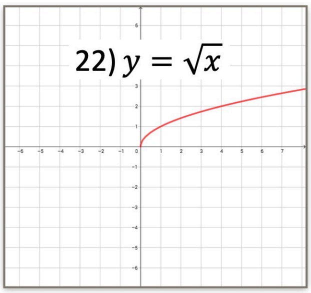

62) $y = |\log_2 x|$

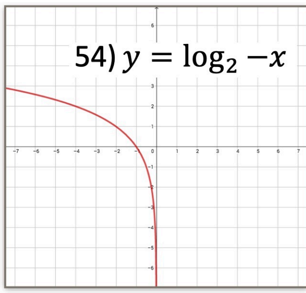

3) $y = 4x^2$

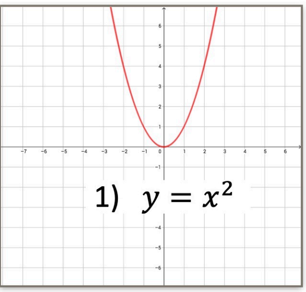

29) $y = -\sqrt{x}$

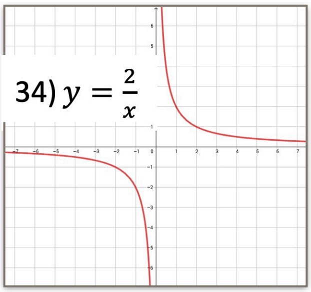

repe

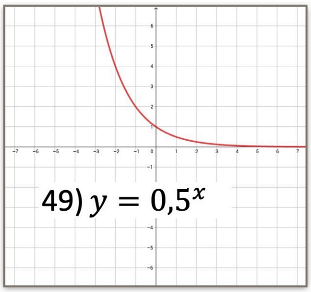
43) $y = \frac{1}{x+3} + 2$

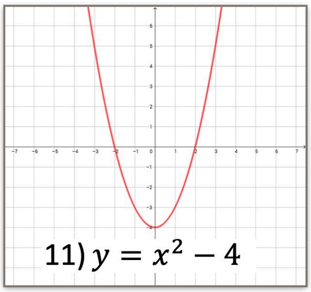

22) $y = \sqrt{x}$

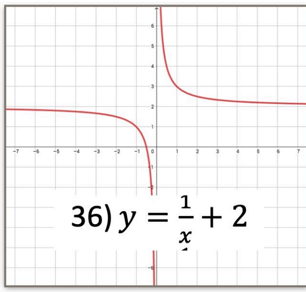

54) $y = \log_2 -x$

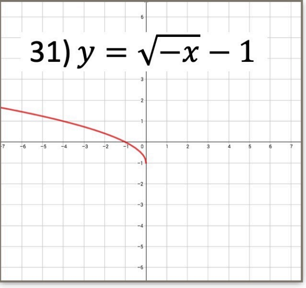

1) $y = x^2$

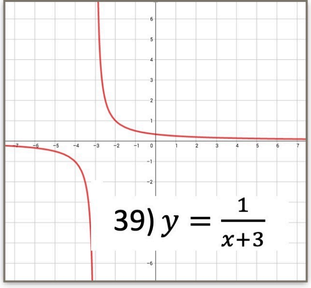

34) $y = \frac{2}{x}$

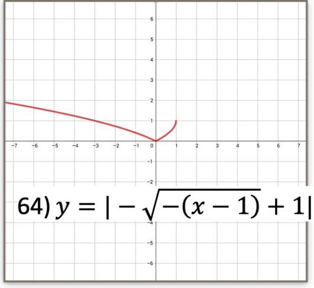

49) $y = 0{,}5^x$

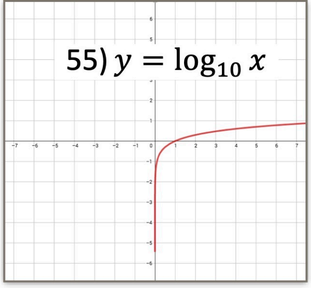

11) $y = x^2 - 4$

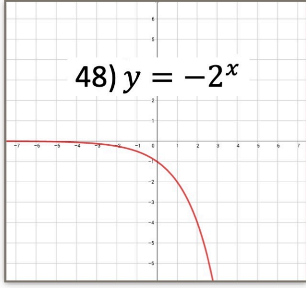

36) $y = \frac{1}{x} + 2$

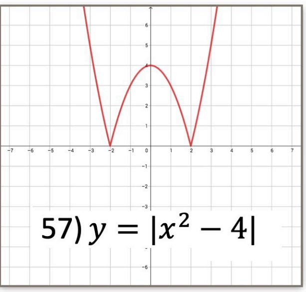

31) $y = \sqrt{-x} - 1$

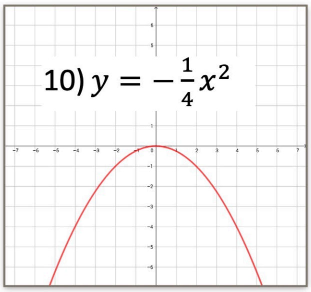

39) $y = \frac{1}{x+3}$

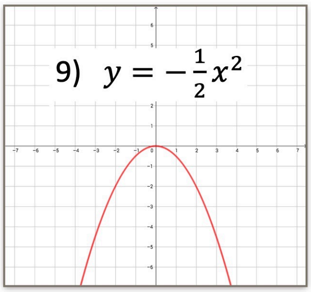

64) $y = |-\sqrt{-(x-1)} + 1|$

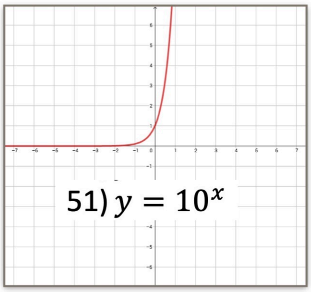

55) $y = \log_{10} x$

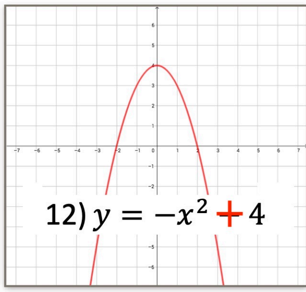

48) $y = -2^x$

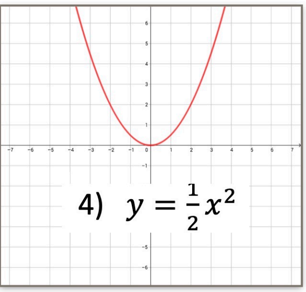

57) $y = |x^2 - 4|$

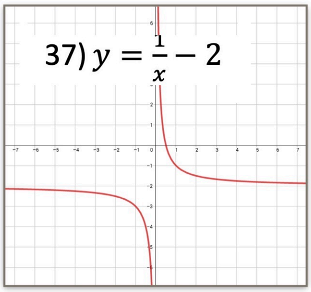

10) $y = -\frac{1}{4}x^2$

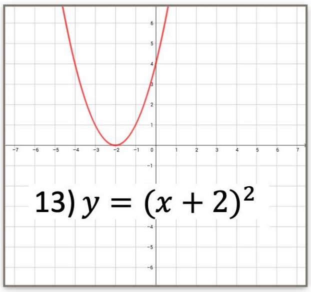

9) $y = -\frac{1}{2}x^2$

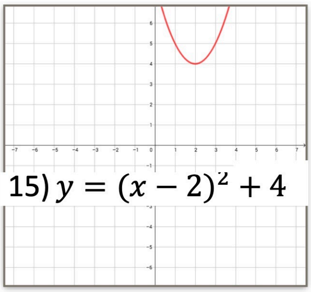

51) $y = 10^x$

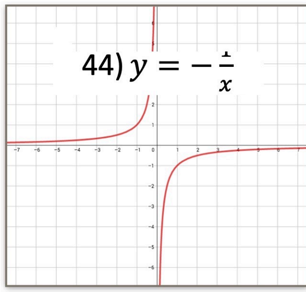

12) $y = -x^2 + 4$

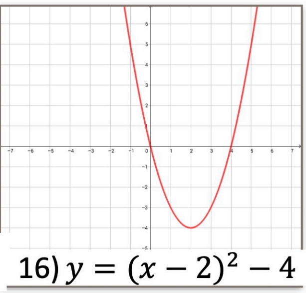

4) $y = \frac{1}{2}x^2$

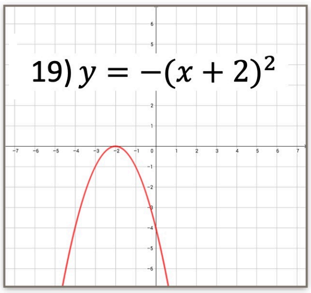

37) $y = \frac{1}{x} - 2$

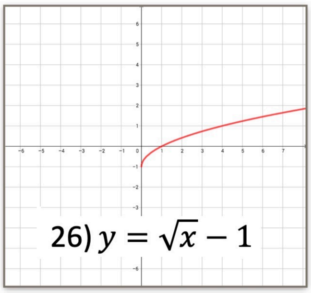

13) $y = (x+2)^2$

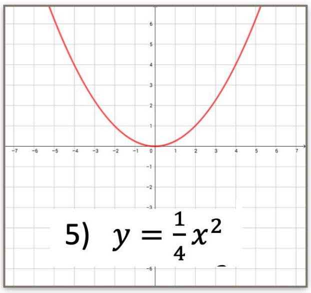

15) $y = (x-2)^2 + 4$

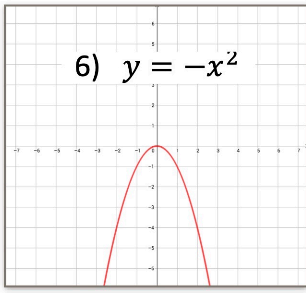

44) $y = -\frac{1}{x}$

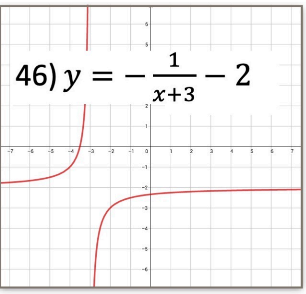

16) $y = (x-2)^2 - 4$

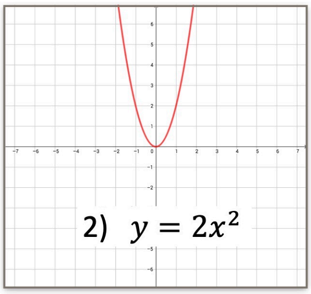

19) $y = -(x+2)^2$

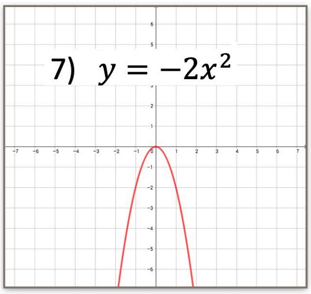

26) $y = \sqrt{x} - 1$

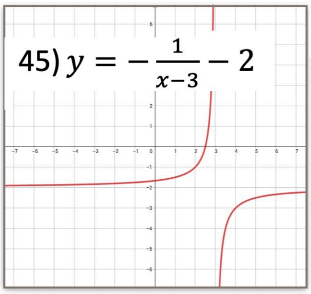

5) $y = \frac{1}{4}x^2$

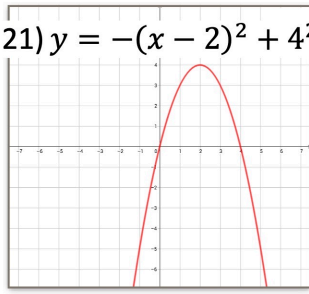

6) $y = -x^2$

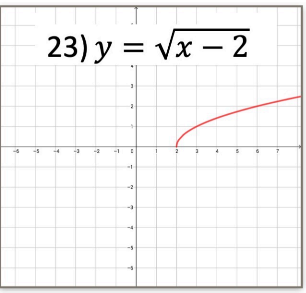

46) $y = -\frac{1}{x+3} - 2$


2) $y = 2x^2$


7) $y = -2x^2$


45) $y = -\frac{1}{x-3} - 2$


21) $y = -(x-2)^2 + 4$


23) $y = \sqrt{x-2}$

quedan sin asignar

24) $y = \sqrt{x+2}$

30) $y = \sqrt{-x}$

40) $y = \frac{1}{x-3} + 2$

41) $y = \frac{1}{x-3} - 2$