1. Introducción histórica: de las funciones al análisis.

Las funciones constituyen la base para comprender los modelos matemáticos actuales en prácticamente todas las ciencias. Veamos la evolución histórica que nos ayuda a entender cómo se ha llegado a la forma en que las conocemos hoy.

1.1. Orígenes en la Antigüedad, Edad Media y Renacimiento

Los matemáticos griegos y babilonios ya abordaban, antes de que se formalizase el concepto moderno de función, problemas que hoy interpretaríamos con esta herramienta: las relaciones geométricas y proporcionales en problemas de áreas, volúmenes y progresiones son precursoras de las idea de función como relación entre magnitudes variables. **Arquímedes** anticipó el concepto de límite y de cálculo de áreas por aproximación.

MÉTODO EXHAUSTIVO DE ARQUÍMEDES

Durante la **Edad Media**, los avances se centraron en la resolución de problemas prácticos, como el cálculo de áreas y la astronomía, donde se empezaron a identificar patrones que relacionaban variables.

En el **Renacimiento**, el redescubrimiento de textos clásicos y la expansión del conocimiento en Europa impulsaron el estudio sistemático de estas relaciones matemáticas, sentando las bases para un análisis más formal de las funciones.

1.2. Consolidación del Concepto de Función: nacimiento del cálculo

En el **siglo XVII**, surge una revolución del conocimiento matemático al intentar desarrollar herramientas para el estudio del cambio en fenómenos físicos y naturales, como el movimiento, las fuerzas, etc. **Leibniz** introdujo los términos “función”, “variable”, “constante” y “parámetro” que utilizamos con frecuencia hoy en día. Junto con **Newton**, desarrolló las bases del cálculo diferencial e integral, y, por tanto, de las herramientas para poder estudiar con precisión esos cambios. **Euler**, en el **siglo XVIII**, introduce la notación $f(x)$.

En el **XIX**, **Cauchy** establece los conceptos rigurosos de límite y continuidad (que veremos algo más adelante). Y **Dirichlet**, considerado el padre de las funciones en su sentido actual, define, por fin, una función f como "una regla que asigna a cada número x en un conjunto dado D un número único $f(x)$". Aparecen, de esta forma, las ideas de dominio, imagen, y la caracterización que permite considerar funciones a relaciones que van más allá de las que se pueden expresar con fórmulas.

Con la definición de Dirichlet, y el desarrollo de la teoría de conjuntos de **Cantor**, se generalizan las funciones a relaciones entre objetos no necesariamente numéricos y otros matemáticos como **Bolzano** o **Weierstrass** avanzan en su estudio de forma más completa y rigurosa. Nace así el análisis matemático, uno de los cuatro bloques que trabajamos en bachillerato junto con álgebra, geometría y estadística, y uno de los pilares de la matemática actual para completar y avanzar en el conocimiento matemático puro, y para modelizar y resolver problemas en todas las áreas del conocimiento.

2. Definición de función y notación. Formas de representación.

Se llama **función** f de un conjunto $D = Dom(f)$ (dominio) a un conjunto $I = Im(f)$ (imagen) a una relación que asigna a cada valor $x \in D$ un único valor $f(x) \in I$.

$$\begin{array}{rccc} f: & D & \longrightarrow & I \\ & x & \longrightarrow & f(x) \end{array}.$$

Como nosotros vamos a trabajar con funciones que transforman números reales en otros números reales, ($D \subset \mathbb{R}$ e $I \subset \mathbb{R}$), escribimos:

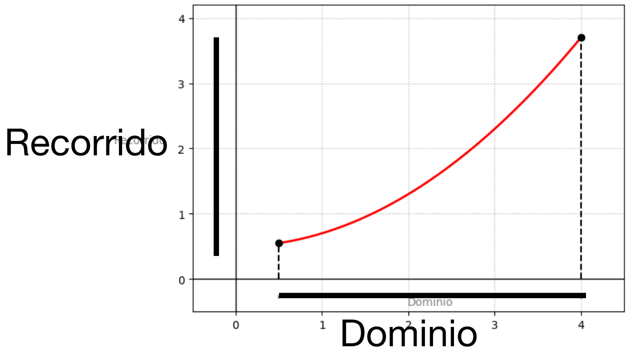
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & f(x) \end{array}.$$

x se llama **variable independiente** e $y = f(x)$ **variable dependiente**.

(el valor de y depende del valor de x, que se toma libremente)

(x se representa en el eje de abscisas (horizontal) e y en el de ordenadas (vertical)

El **dominio** $D = Dom(f)$ es el conjunto de valores para los que está definida la función, y la **imagen** $I = Im(f)$ es el conjunto de valores que toma como resultado al aplicarla.



2.1. Formas de representar una función. Ejemplos.

Una función se puede describir de las siguientes maneras:

Expresión Analítica: definida a a través de una fórmula.

Por ejemplo, $f(x) = -x^2 + 1$. A cada valor x le asignamos, calculando, su $f(x)$

$$
\begin{array}{cccccc}
f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & & \\
 & x & \longrightarrow & f(x) = x^2 + 1 & & \\
- & & & & - & \\
 & -1 & \longrightarrow & f(-1) = \mathbf{0} & & (f(-1) = -(-1)^2 + 1 = \mathbf{0}) \\
 & 0 & \longrightarrow & f(0) = \mathbf{1} & & (f(0) = -0^2 + 1 = \mathbf{1}) \\
 & & \vdots & & & \\
 & 2 & \longrightarrow & f(2) = -\mathbf{3} & & (f(2) = -2^2 + 1 = -\mathbf{3})
\end{array}
$$

Tabla de Valores: la asociación de valores se puede expresar en una tabla. Desde una función dada como expresión analítica se puede obtener también una tabla.

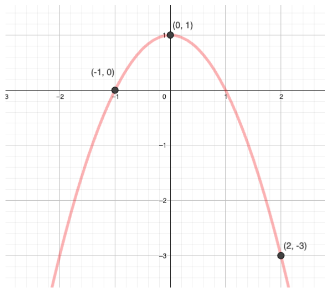
Por ejemplo, de la expresión analítica anterior, se obtiene la siguiente tabla de valores:

x	$f(x)$
-1	0
0	1
2	-3

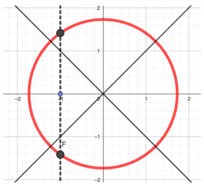
Nota: una tabla de valores cumpliendo la condición de que a cada x se le asigna un único $f(x)$, es también una función aunque no se corresponda con una expresión analítica.

Gráfica: representación en el plano, donde a cada x le corresponde un punto $(x, f(x))$.

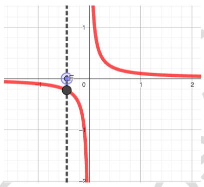
En el ejemplo, asociado a la tabla, representamos los puntos $(x, f(x))$: $(-1,0)$, $(0,1)$, $(2,3)$. Con más puntos, podemos ir dibujando la gráfica de la función (línea roja).



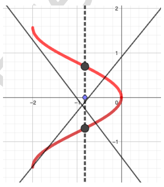
La gráfica, al igual que la tabla, no tiene por qué ser la representación de una fórmula concreta, aunque ese es el caso en el que nos centraremos. Para que se ajuste a la definición (para cada x, un único valor de $f(x)$), no se consideran funciones aquellas gráficas que tengan varios valores en una misma vertical:



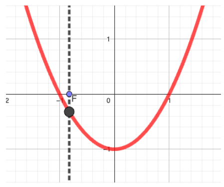
NO ES FUNCIÓN



SÍ ES FUNCIÓN



NO ES FUNCIÓN



SÍ ES FUNCIÓN

FUNCIONES GEOGEBRA

2.2. Funciones elementales

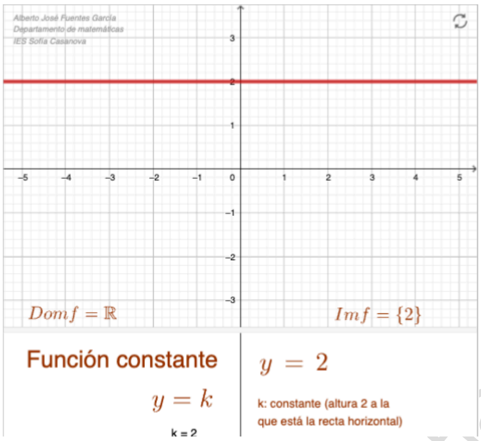
Son las funciones fundamentales con las que construiremos otras más complejas a través de su combinación mediante composición. Es esencial conocerlas profundamente.

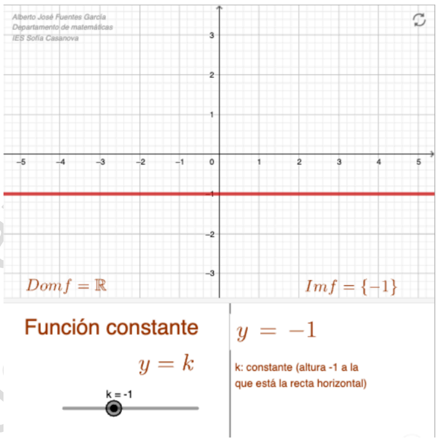
2.2.1. Funciones Polinómicas $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

Su dominio siempre es $Dom\ f = \mathbb{R}$

Función constante (grado 0): $f(x) = k \quad Im\ f = \{k\}$

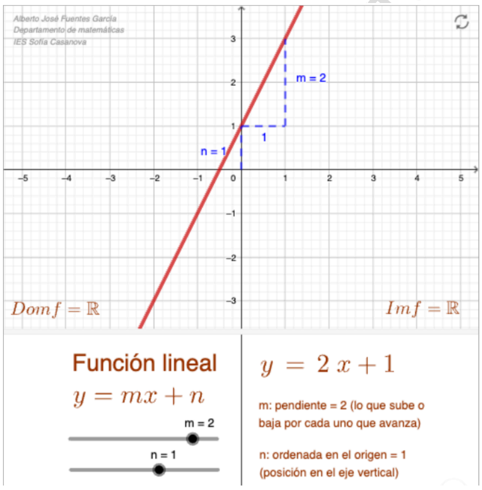
Gráfica: recta horizontal a altura k

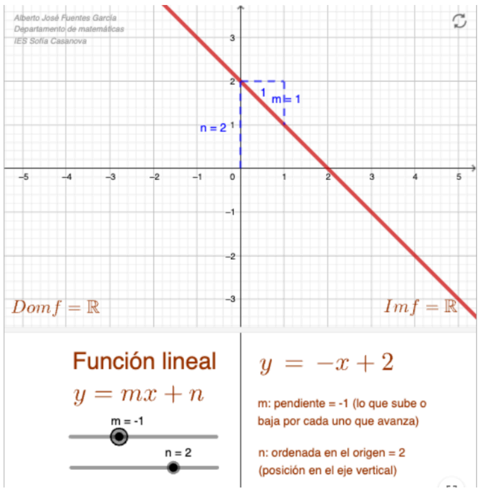




Función lineal (grado 1): $f(x) = mx + n \qquad Im\ f = \mathbb{R}$

Gráfica: recta de pendiente m y ordenada en el origen n (punto $(0,\ n)$)





Se representa muy rápido de forma intuitiva con los puntos $(0,\ n)$ *y* $(1, n+m)$

Pendiente: $m = \dfrac{\text{"lo que sube (o baja)"}}{\text{"lo que avanza"}} = \dfrac{\text{"lo que sube (o baja)"}}{\text{"unidad que avanza"}}$ *(desde un punto de la recta, avanza* $(1, m)$*)*

Función cuadrática (grado 2) $f(x) = ax^2 + bx + c$

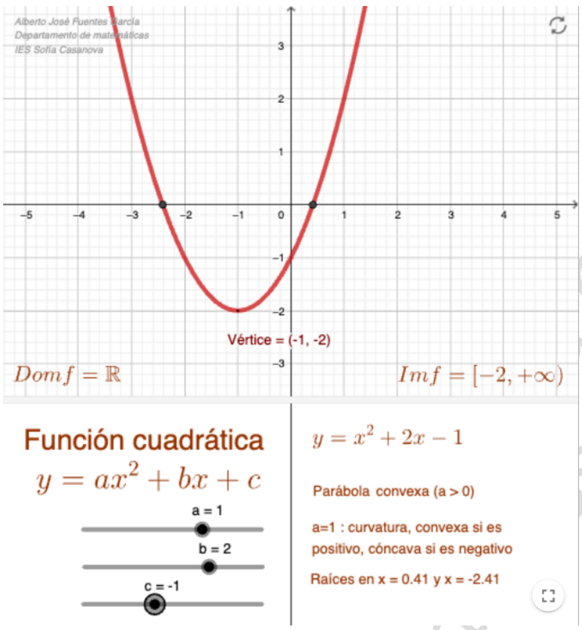
$Dom\ f = \mathbb{R}$ (la imagen va desde el vértice hasta + o - ∞)

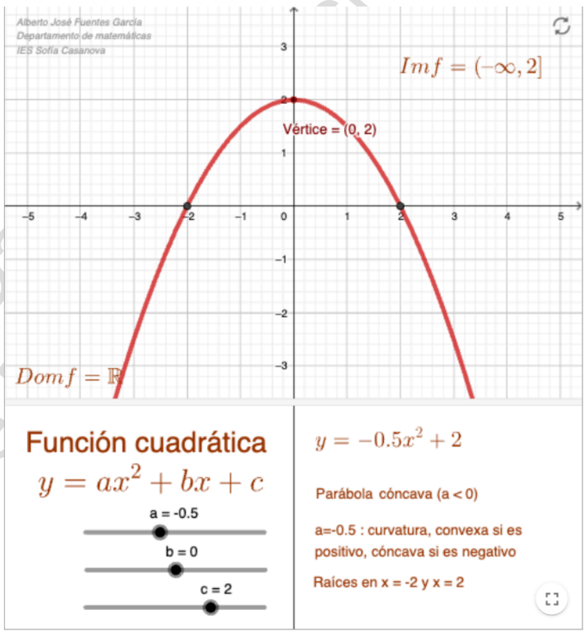
Gráfica: parábola de orientación vertical. Para representarla, se estudia:

- Cortes con los ejes: $\begin{cases} \text{EJE Y}: x = 0 \implies y = c \ (0,c) \\ \text{EJE X}: y = 0 \implies \text{resolver } ax^2 + bx + c = 0 \end{cases}$

- Vértice en $x_v = \dfrac{-b}{2a}$ (el valor y_v se calcula sustitutendo en $f(x_v)$)

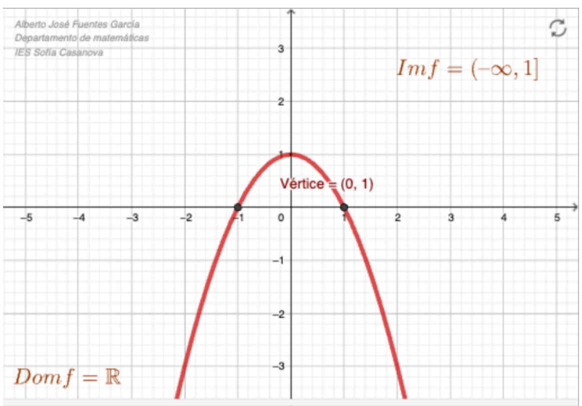
- Curvatura: $\begin{cases} \text{cóncava si } a < 0 \ (\cap) \\ \text{convexa si } a > 0 \ (\cup) \end{cases}$





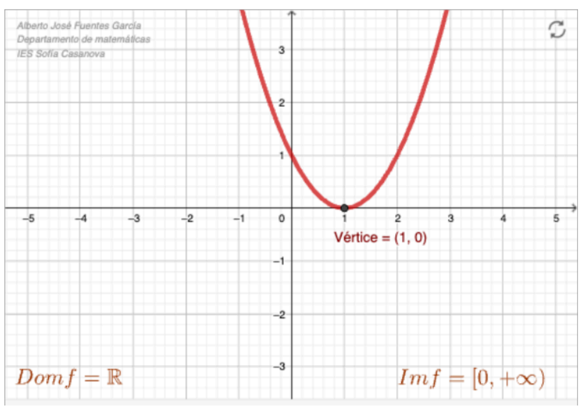
Muchas de las parábolas que aparecen en ejercicios de bachillerato se pueden representar fácilmente mediante traslaciones de las funciones $y = x^2$ e $y = -x^2$

$f(x) = -x^2 + 1$



TRASLACIÓN VERTICAL +1 DE $-x^2$

$f(x) = (x-1)^2$

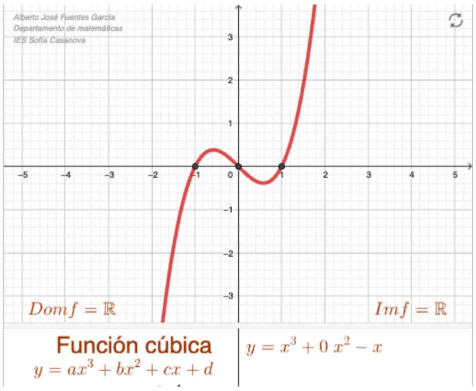


TRASLACIÓN HORIZONTAL +1 DE x^2

Funciones polinómicas (grado ≥ 3)

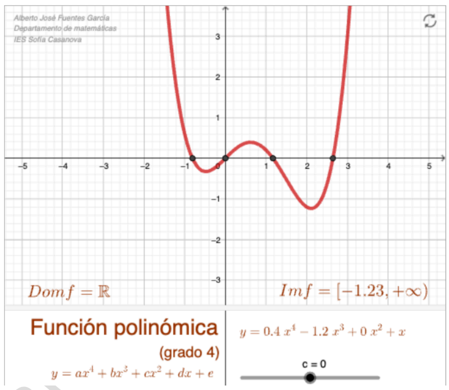
A medida que subimos el grado del polinomio, veremos que se forman ondulaciones adicionales. Esto permite aproximar, mediante funciones polinómicas sencillas, otras funciones mucho más complejas (Series de Taylor, exceden el nivel del bachillerato).

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$



FUNCIÓN CÚBICA

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

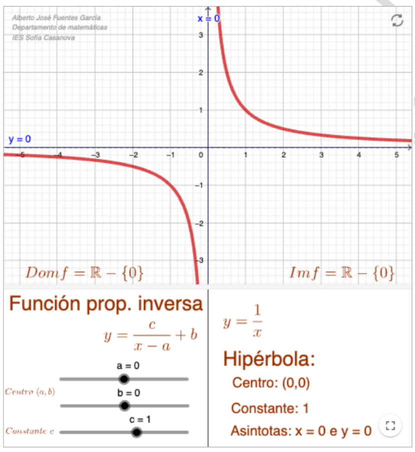


FUNCIÓN POLIINÓMICA DE GRADO 4

2.2.2. Funciones Racionales

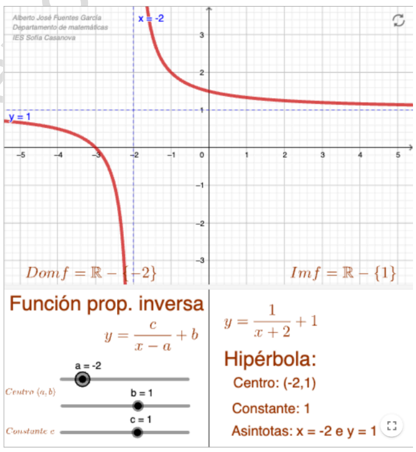
Son aquellas cuya expresión es un cociente de polinomios. Aparecen huecos en el dominio (aquellos puntos que anulan el denominador). En esos puntos habrá asíntotas verticales (rectas verticales a las que se acerca la función).

$$f(x) = \frac{a}{x}$$



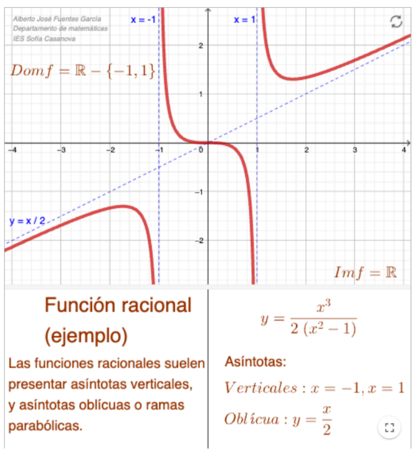
FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD INVERSA CON $a > 0$ (HIPÉRBOLA) SI $a < 0$ CAMBIAN DE SENTIDO (LO QUE ESTÁ DEBAJO DEL EJE PASA ARRIBA, Y VICEVERSA)

$$f(x) = \frac{1}{x+2} + 1$$



TRASLACIÓN -2H +1V DE $f(x) = 1/x$ (HIPÉRBOLA)

$$f(x) = \frac{x^3}{2x^2 - 2}$$



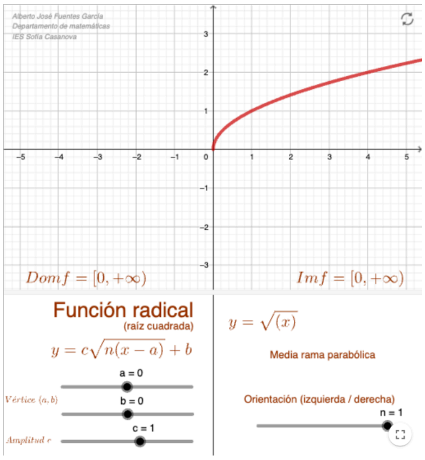
FUNCIÓN RACIONAL GENERAL, CON VARIAS ASÍNTOTAS. APRENDEREMOS A REPRESENTARLAS ESTE CURSO

2.2.3. Funciones Radicales $f(x) = \sqrt[n]{x}$

Tienen x dentro de una raíz. Las de índice par no pueden contener valores negativos, por lo que hay que estudiar su dominio (en las de índice impar el dominio es $\mathbb{R}$).

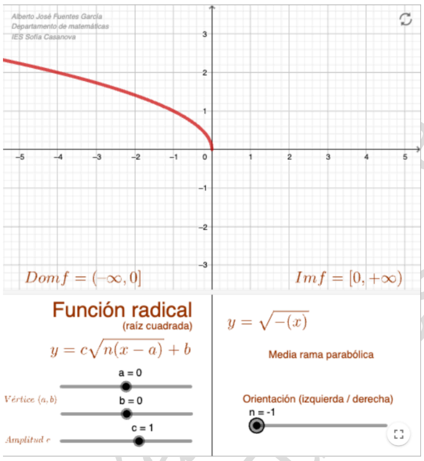
La gráfica de $f(x) = x^2$ es media rama parabólica (la parábola entera no será función con orientación horizontal)

$f(x) = \sqrt{x}$



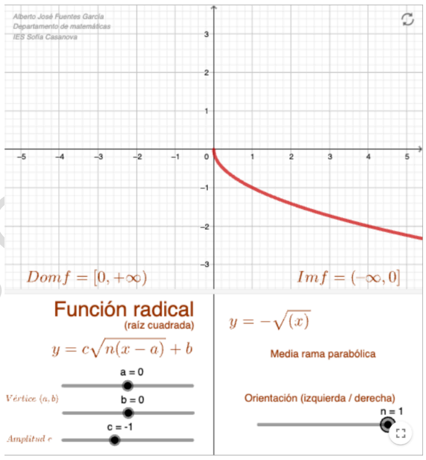
LA FUNCIÓN RADICAL BÁSICA

$f(x) = \sqrt{-x}$



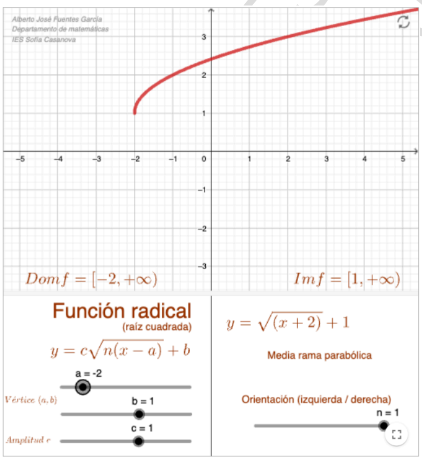
SI CAMBIA EL SIGNO A X, CAMBIA ORIENTACIÓN (VA A LA IZQUIERDA)

$f(x) = -\sqrt{x}$



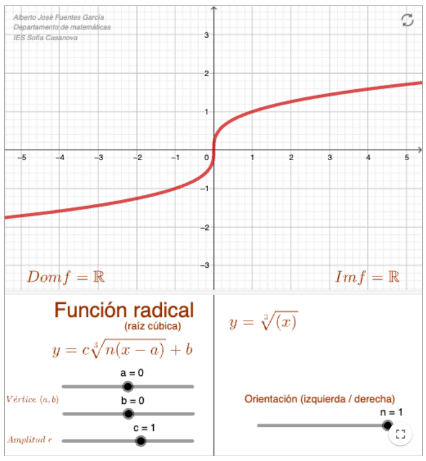
SI DELANTE DE LA RAÍZ HAY UN MENOS, ES LA RAMA INFERIIOR

$f(x) = \sqrt{x+2} + 1$



TRASLACIÓN -2H +1V DE $f(x) = \sqrt{x}$

$f(x) = \sqrt[3]{x}$



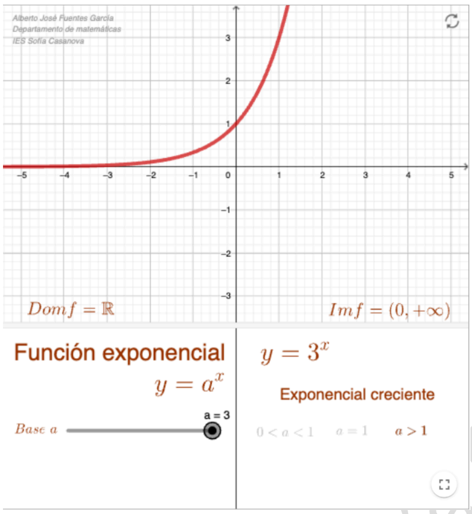
RAÍZ CÚBICA

2.2.4. Función exponencial $\quad f(x) = a^x \quad a > 0,\ a \neq 1$

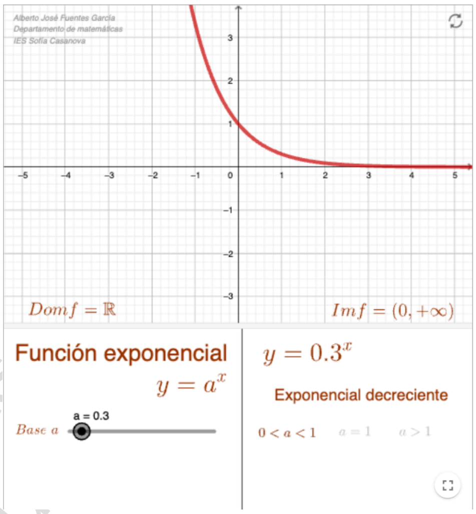
Tienen x en el exponente, con base a numérica. Se caracteriza por un fuerte crecimiento para los valores de x positivos y asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ (si $a > 1$).

Si $0 < a < 1$ cambia la orientación. El dominio es $\mathbb{R}$, y la imagen $(0, +\infty)$.

$f(x) = a^x,\ a > 1$



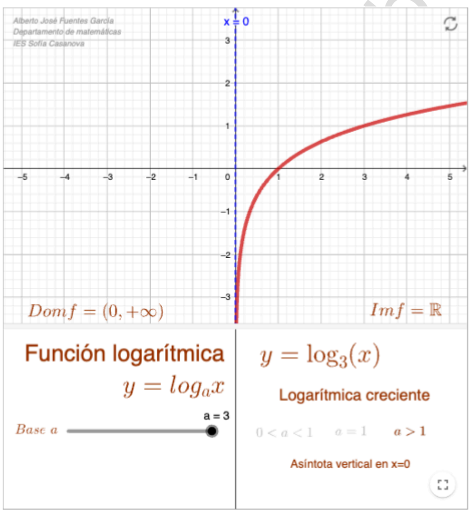
$f(x) = a^x,\ 0 < a < 1$



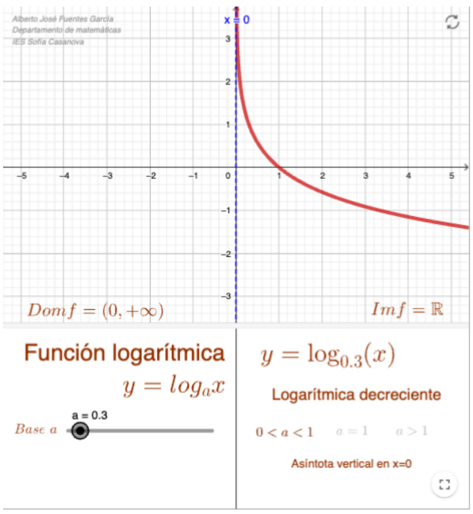
2.2.5. Función logarítmica $\quad f(x) = \log_a x \quad a > 0,\ a \neq 1$

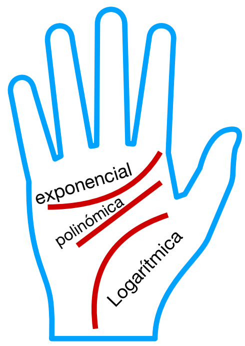
Tiene una asíntota vertical en $x = 0$. Solo existe logaritmo de números positivos, por lo que el dominio es $(0, +\infty)$, la imagen es $\mathbb{R}$.

$f(x) = \log_a x,\ a > 1$



$f(x) = \log_a x,\ 0 < a < 1$





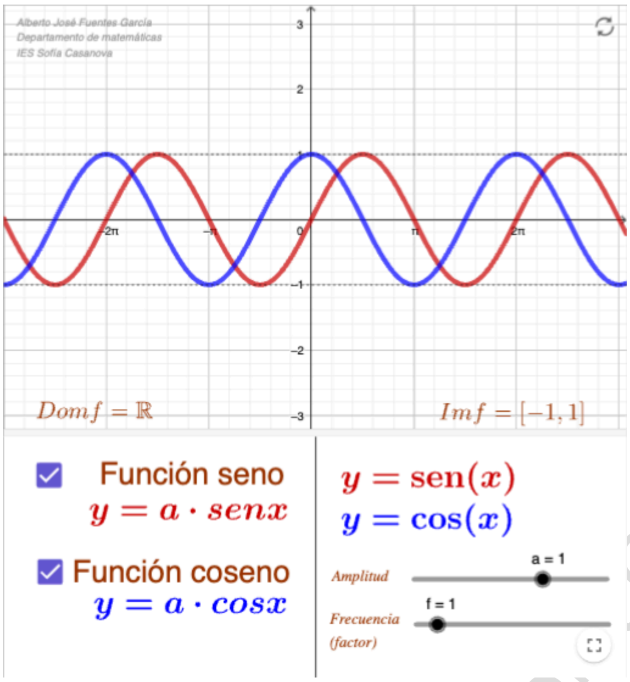
TRUCO PARA RECORDAR: EXP>POL>LOG

Nota: no confundir con la radical. Se distingue porque la logarítmica tiene asíntota, mientras que la radical acaba de forma abrupta en el vértice.

2.2.6. Funciones trigonométricas

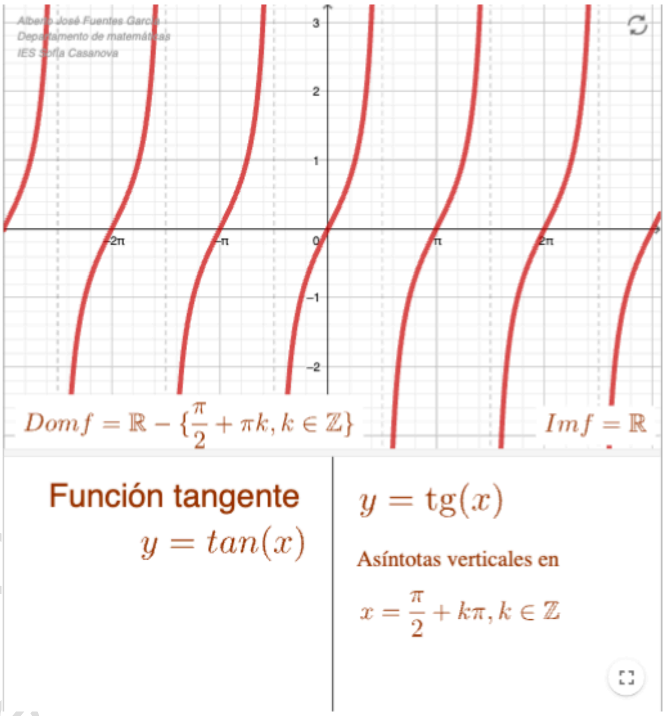
Se caracterizan por ser funciones periódicas (se repite la gráfica cada cierto intervalo). La unidad angular usada en funciones son los radianes.

$f(x) = \sin x \quad f(x) = \cos x, T = 2\pi$



FUNCIONES SENO Y COSENO, SU GRÁFICA ES UNA ONDA, POR LO QUE ES EL MODELO MATEMÁTICO DE ELECTROMAGNETISMO, ONDAS SONORAS, ONDAS GRAVITACIONALES…

$f(x) = \tan x, T = \pi$



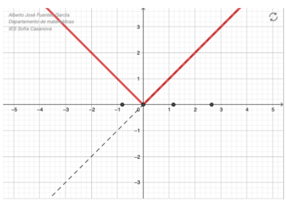
NO EXISTE CUANDO EL COSENO SE ANULA ($\pi/2 + k\pi$), TIENE ASÍNTOTAS VERTICALES

2.3. Variaciones de las funciones elementales

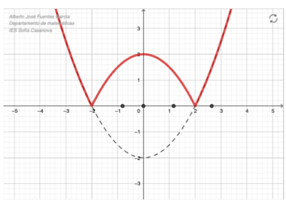
2.3.1. Valor absoluto

El valor absoluto de un número lo convierte en positivo si era negativo. En funciones, eso se traduce en que el valor absoluto de una función, hace que "rebote" sobre el eje X, de modo que se dibuja siempre en la parte superior.

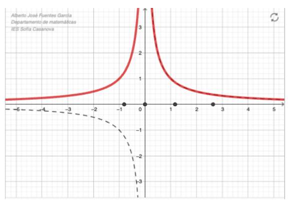
$f(x) = |x|$



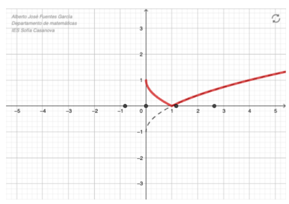
$f(x) = |x^2/2 - 2|$



$f(x) = |1/x|$



$f(x) = |\sqrt{x} - 1|$



Nota: $y = |x|$ es el primer ejemplo de función no derivable, porque hace un "codo". Veremos que la derivada mide la pendiente, y en los codos hay un cambio brusco de pendiente (de -1 a 1 en $|x|$).

2.3.2. Traslaciones, amplificaciones y contracciones

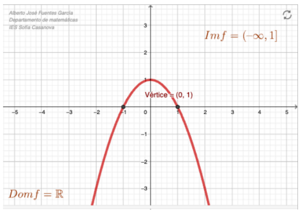
Ya hemos visto como se pueden representar funciones trasladadas de las elementales.

Traslación horizontal a hacia la derecha: todas las x deben aparecer como $(x - a)$.

Traslación horizontal a hacia la izquierda: todas las x deben aparecer como $(x + a)$.

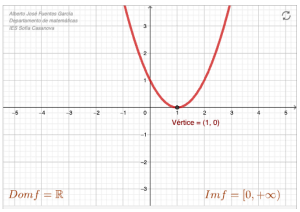
Traslación vertical b hacia arriba: $y = f(x) + b$ (hacia abajo $f(x) - b$)

$f(x) = -x^2 + 1$



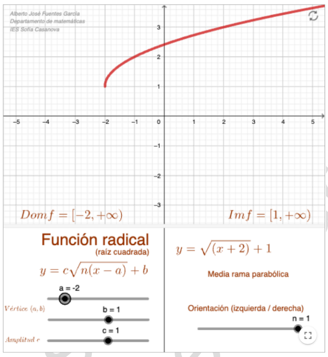
TRASLACIÓN VERTICAL +1 DE $-x^2$

$f(x) = (x - 1)^2$



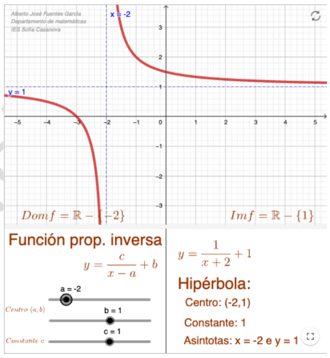
TRASLACIÓN HORIZONTAL +1 DE x^2

$f(x) = \sqrt{x + 2} + 1$



TRASLACIÓN -2H +1V DE $f(x) = \sqrt{x}$

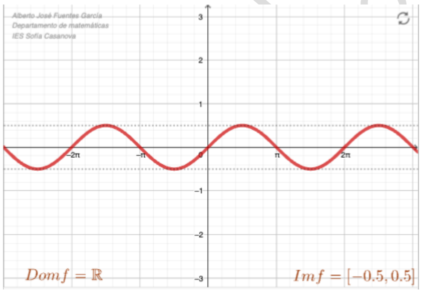
$f(x) = \dfrac{1}{x+2} + 1$



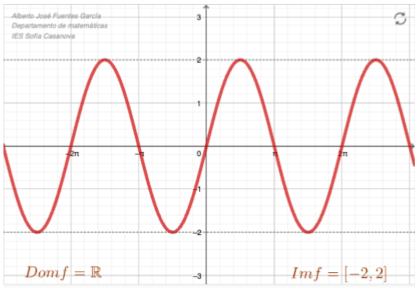
TRASLACIÓN -2H +1V DE $f(x) = 1/x$ (HIPÉRBOLA)

También se puede amplificar o contraer una función multiplicándola por un coeficiente: $y = c \cdot f(x)$. Si $c > 1$ se amplifica (toma valores mayores), si $0 < c < 1$ se contrae.

$f(x) = 0{,}5 \sin x$

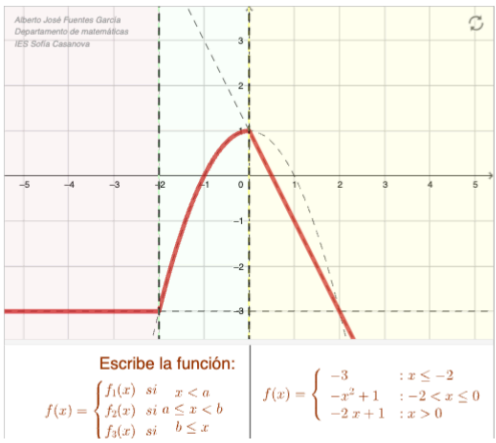


$f(x) = 2 \sin x$



2.3.3. Funciones a trozos

Las funciones a trozos se representan a partir de las funciones elementales, en los intervalos en los que se definen. Solo hay que identificar los cortes entre los distintos trozos, y, si es necesario, dar valor en esos cortes. Por ejemplo:



[Representador de funciones]

2.4. Estudio del dominio de una función

Para estudiar el dominio de una función cualquiera, tendremos en cuenta lo aprendido de las funciones elementales. Fijándonos en los casos en los que el dominio no es $\mathbb{R}$:

- **Hay x en denominadores** -> Resolver la ecuación $denominador = 0$ y excluir las soluciones del dominio *(la tangente está incluida, el coseno está en el denominador)*
- **Hay raíces de índice par** -> Resolver la inecuación $radicando \geq 0$
- **Hay logaritmos con x como argumento** -> Resolver la inecuación $argumento \geq 0$

NOTA: Para las raíces pares, no existen aquellas de negativos. Para los logaritmos, no existen aquellas de negativos ni de cero.

Ejemplos:

$$f(x) = \frac{1}{x-2} \implies Dom\ f = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$g(x) = \frac{x+1}{x^2-1} \implies Dom\ g = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

$$h(x) = \sqrt[4]{x^2-2x} \implies x^2 - 2x \geq 0 \implies Dom\ h = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$$

$$i(x) = \ln(x-2) \implies x - 2 > 0 \implies Dom\ i = (2, +\infty)$$

Si ocurren varias situaciones de las citadas al mismo tiempo, deberemos estudiar por separado cada una de ellas, y quedarnos con el dominio más restrictivo, la intersección de los dominios obtenidos de cada una de ellas (eliminamos del dominio valores que hacen cero el denominador, que hagan negativas las raíces pares y que hagan cero o negativo los logaritmos).

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x} \implies \begin{cases} \text{raíz: } [-2, +\infty) \\ \text{denominador : } \mathbb{R} - \{0\} \end{cases} \xrightarrow{\cap \text{ intersección}} Dom\ f = [-2, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$g(x) = \frac{x+2}{\log(x-1)} \implies \begin{cases} \text{log: } (1, +\infty) \\ \text{denominador: } \log(x-1) \neq 0 \implies x \neq 2 \end{cases} \xrightarrow{\cap} Dom\ g = (1, 2) \cup (2, +\infty)$$

2.5. Tasa de variación media (T.V.M.)

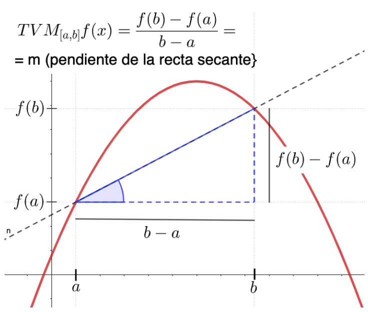
Dada una función $f(x)$ la tasa de variación media (TVM) de f en el intervalo $[a, b]$ es:

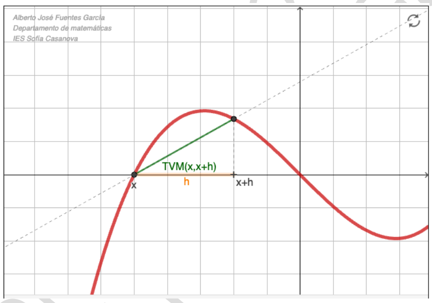
$$\text{TVM}_{[a,b]}f = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Si llamamos h a lo que se avanza desde $a = x_0$ hasta $b = x_0 + h$, queda:

$$\text{TVM}_{[x_0,x_0+h]}f = \frac{f(x_0 + h) - f(x_o)}{h} = \frac{\text{"lo que sube (o baja)"}}{\text{"lo que avanza"}}$$

Se observa que es una pendiente, la pendiente de la secante que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.





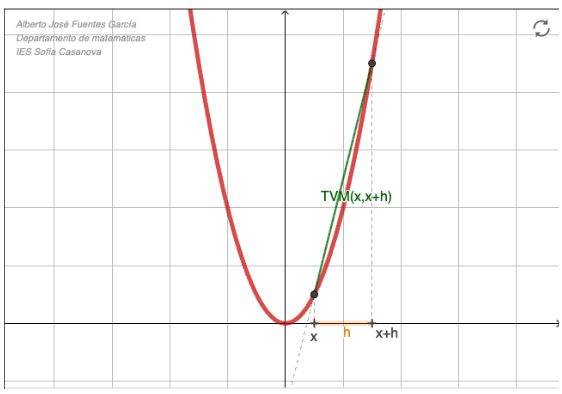
LA TVM EN [-5,-2] ES LA PENDIENTE DEL SEGMENTO VERDE.

INTERACTIVO: TVM Y DERIVADA

VÍDEO EXPLICATIVO: TVM Y DERIVADA

La TVM representa el cambio medio de una función. Un buen ejemplo es la velocidad media (que se obtiene, por ejemplo, en un radar de tramo en tráfico). Más adelante veremos que cuando el intervalo se hace infinitamente pequeño, aparece la idea de derivada como medida del cambio instantáneo (velocidad instantánea, radar fijo en el ejemplo).

Ejemplo: $f(x) = x^2$ $\quad TVM_{[1,3]}f = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{3^2 - 1^2}{2} = \frac{8}{2} = 4$



VEMOS COMO LA PENDIENTE ENTRE LOS PUNTOS (1,1) Y (3,9) ES 4, EL VALOR DE LA TVM