

18 Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2} \right)^{x-1}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - x + 2}{x^2 + 1} \right)^{x+6}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{1}{2x}}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{2x^2 + 3x - 2} \right)^{x^3 - 3x}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2} \right)^{x-1} \rightarrow 1^\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2} \right)^{x-1} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{x^2 + 1}{x^2} - 1 \right) \cdot (x-1) \right]} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x^2} \cdot (x-1) \right]} = e^0 = 1$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - x + 2}{x^2 + 1} \right)^{x+6} \rightarrow 1^\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - x + 2}{x^2 + 1} \right)^{x+6}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{x^2 - x + 2}{x^2 + 1} - 1 \right) \cdot (x+6) \right]} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 - 5x + 6}{x^2 + 1}} =$$

$$= e^{-1} = \frac{1}{e}$$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{1}{2x}} = 1^0 = 1$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{2x^2 + 3x - 2} \right)^{\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 3x} = \left(\frac{1}{2} \right)^{-\infty} = 2^{+\infty} = +\infty$

Probamos el valor de la expresión para $x = -10$ con la hoja de cálculo (algunas calculadoras dan error de cálculo):

x=-10	
Numerador	122
Denominador	168
Fracción	0,726190476190476
Exponente	-970
Potencia	6,03903462394753E+134

53 Resuelve estos límites.

●●○

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{x-1}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{x-1}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{1-x}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{1-x}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{x-1} =$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x}\right)(x-1)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-3}{x}} = e^3$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{x-1} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3}{x}\right)(x-1)} =$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3x-3}{x}\right)} = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{1-x} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{x}\right)(1-x)} =$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-3x}{x}} = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{1-x} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{3}{x}\right)(1-x)} =$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3+3x}{x}} = e^3$$

54 Calcula el límite: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x - (x-2)}}{x-2}$.

●●○

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x-2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{(x-2)^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 4}} = 1$$

60

Halla los siguientes límites.

••○

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 - 5x}{1 + 5x} \right)^{2x-12}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x} \right)^{\frac{x}{2}}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 + 5x}{1 + 5x} \right)^{2x-12} \rightarrow 1^\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 + 5x}{1 + 5x} \right)^{2x-12} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{2+5x}{1+5x} - 1 \right) \cdot (2x-12) \right]} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2+5x-1-5x)(2x-12)}{1+5x}} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-12}{1+5x}} = e^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{e^2}$$

$$b) e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x} - 1 \right) \cdot \frac{x}{2}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-6x+2}{x^2+3x} \right) \cdot \frac{x}{2}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-6x^2+2x}{2x^2+6x} \right)} = e^{-3}$$

62

Halla el resultado de estos límites.

••○

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 10}{3^{x+1}} \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{x+1}}{3^x + 10}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 10}{3^{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3^x}{3^{x+1}} + \frac{10}{3^{x+1}} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{10}{3^{x+1}} \right) = \frac{1}{3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{x+1}}{3^x + 10} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{x+1}}{3^x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x \cdot 3}{3^x} = 3$$