

RELACIÓN 3: CÁLCULO DIFERENCIAL : Continuidad, teoremas ,

1. Estudia las discontinuidades de las funciones: $y = \frac{x^2}{x-2}$ $y = \frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4}$ $y = e^{\frac{1}{1+x}}$

$$y = \frac{x^3}{(x-2)^3} \quad y = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}} \quad y = \frac{x}{|x|} \quad y = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 3 \\ 2x+1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

2. Determina el valor de a para que sea continua en $x=0$ $f(x) = \begin{cases} e^{ax} + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x - 3a & \text{si } x > 0 \end{cases}$

3. Determina el valor de a para que sea continua en $\mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 3 & \text{si } x \leq 2 \\ 7x + 2a & \text{si } x > 2 \end{cases}$

4. Sea la función $f(x) = e^x - 3$, estudia su dominio y demuestra que tiene un solo cero en el intervalo $(0, \infty)$

5. Sea la función $f(x) = x^7 - 3x^6 + 2\sin\frac{\pi x}{2}$. ¿Es cierto que la función se anula en algún punto comprendido entre 3 y 4? Enuncia el Teorema que usas.

6. Dada la función $f(x) = 2x^2 - x - 1$, contesta razonadamente:

- f es continua en $[1, 3]$
- Existe $c \in (1, 3)$ tal que $f(c) = 1/2$
- Existe $c \in (1, 3)$ tal que $f(c) = 4$

7. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x + \tan x}$ en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y demostrar que en el origen tiene una discontinuidad evitable. Redefinir la función para que sea continua en ese intervalo.

8. Demostrar que la ecuación $x - \cos x = 0$ tiene solución.

9. Sean f y g dos funciones continuas en $[a, b]$ y tales que $f(a) > g(a)$ y $f(b) < g(b)$. Demostrar que existe c que pertenece a (a, b) tal que $f(c) = g(c)$

10. Sea la función $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$. Estudia si es posible aplicar el teorema de Bolzano en el intervalo $[-3, -1]$, ¿Y en $[0, 3]$? En caso afirmativo, calcula el resultado al que se hace referencia en dicho teorema.

11. Calcula los límites siguientes indicando en cada paso lo que haces:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos x}{x^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1) \cdot \tan \frac{\pi x}{2}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \tan x}}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{1 + \cos(\pi \ln x)}{e - x}$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x}}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} [e^{3x} - 5x]^{\frac{1}{x}}$

Sea $f(x)$ una función acotada y sea $g(x)$ tal que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0$

12. Demostrar que $x \cdot e^x = 2$ tiene una única raíz positiva.

13. Demostrar que la ecuación $e^x = 1 - x$ tiene una única raíz real en $x = 0$

14. Sea la ecuación $x^{2009} + x + 1 = 0$. Demostrar que tiene al menos una solución real. Demostrar que esta solución es única.

15. Comprobar que la ecuación $x = x \sin x + \cos x$ tiene alguna solución en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

16. Demostrar que la ecuación $x^3 - 36x + 10 = 0$ no puede tener dos raíces reales en el intervalo $(-1, 2)$.

17. Sea una función $f(x)$ de la que sabemos que $f(-2) > 0$ y que $f(0) < 0$. ¿ Se puede afirmar que $\exists c \in (-2,0)$ tal que $f(c) = 0$.

18. Dada la función $f(x)$ real de variable real definida por:
$$f(x) = \begin{cases} f(0) = 7 \\ 7 - \left(16^{\frac{1}{x}}\right) \\ 1 + \left(16^{\frac{1}{x}}\right) \end{cases} \text{ si } x \neq 0$$

- a) Determinar los puntos en los que es continua
b) Demuestra que existe un punto del intervalo $(2,4)$ en el que f toma el valor 1.

19. Sea $f(x) = x^3 - x^2 + x$ ¿ Se puede afirmar que existe al menos un punto c en el interior del intervalo $[1,2]$ tal que $f(c) = 2$? Razona tu respuesta.

20. Demostrar que para cualesquiera valores del parámetro m , la ecuación $2x^5 + x + m = 0$ no tiene nunca dos soluciones reales.

21. Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[-1,5]$ tal que $f(-1) < 0$ e $f(5) > 7$. Responder de forma razonada si la función $g(x) = f(x) - 5$ tiene al menos un cero en $(-1,5)$.

22. Calcula los límites siguientes indicando en cada paso lo que haces:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1)^{\frac{1}{\cos x - 1}}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2-x) - (2-x)e^x}{x^2}$ c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{4 + e^{-(x+1)}}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\frac{1}{x}}$

23. Sea la función definida a trozos
$$f(x) = \begin{cases} \cos^2 x & -\pi < x \leq 0 \\ a + x^2 & 0 < x < 1 \\ b/x & 1 \leq x \leq \pi \end{cases}$$
 Determinar los valores de a y de b

para que sea continua en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Aplica si es posible el teorema de Bolzano.

24. Calcula el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$ explica lo que haces y las propiedades que aplicas

25. Halla el dominio de $f(x)$ y el $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, siendo $f(x) = \frac{3x + \ln(x+1)}{\sqrt{x^2 - 3}}$

26. Halla el valor del parámetro para que $f(x)$ sea continua
$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\lambda x^2} - 1}{3x^2} & \text{si } x > 0 \\ \frac{\sin 2x}{x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

27. Demostrar que la ecuación $4x^5 + 3x + m = 0$ solo tiene una raíz real, cualquiera que sea el valor de m

28. Halla el valor del parámetro para que $f(x)$ sea continua
$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ \lambda & \text{si } x = 0 \\ \frac{\cos x - 1}{\sin x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

29. Define función continua nun punto. ¿Cando se di que unha discontinuidade é evitable? ¿Para que valores de k , a función $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + k}$ é continua en todos os puntos da recta real?
30. Enuncia o teorema de Bolzano. ¿Podemos asegurar que a gráfica da función $f(x) = 3\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) - \cos(x^2)$ corta o eixo OX nalgún punto do intervalo $(0, \pi)$? Razona a resposta.
31. Enuncia o teorema de Bolzano. Probar que a función $f(x) = x^3 + 2x - 4$ corta o eixo OX nalgún punto do intervalo $[1, 2]$. ¿Pode cortalo en máis dun punto?
32. Enuncia o teorema de Bolzano. ¿Ten a ecuación $x^3 + 2x - 2 = 0$ algunha solución no intervalo $(0, 1)$? ¿Ten esta ecuación máis dunha solución real?
33. Define función continua nun punto. ¿Que tipo de discontinuidade ten $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$ nos puntos $x = 0$ e $x = 2$?