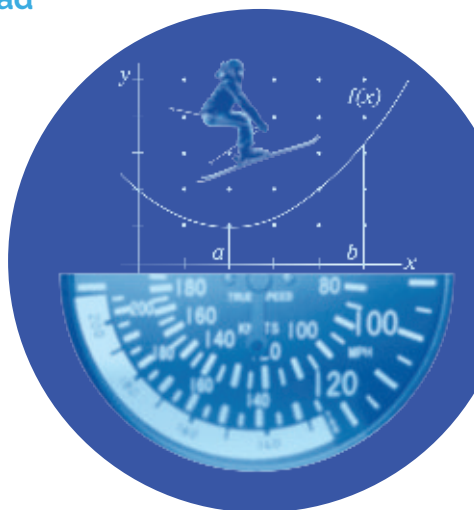


LO **esencial** DE

Matemáticas II

Hacia la universidad



Presentación



Se acerca el fin de Bachillerato y, por lo tanto, la prueba que tendrás que afrontar al finalizar el curso. Durante estos dos años has adquirido muchos conceptos y también destrezas.

Ahora ha llegado el momento de comprobar si has adquirido estos conocimientos y sobre todo si sabes aplicarlos en la resolución de problemas y las cuestiones a las que te vas a enfrentar. Se trata de leer con atención los enunciados, de interpretarlos, analizarlos y hacer relaciones matemáticas que te permitan razonar sobre la manera de abordar su resolución. Además, tendrás que demostrar que eres capaz de expresarte con el lenguaje matemático apropiado y que eres ordenado en la resolución y en la ejecución de las actividades que te propongan.

Las páginas del esencial presentan de manera muy visual y práctica los aspectos fundamentales para afrontar esa prueba con seguridad y confianza. Para facilitarte el repaso final, hemos estructurado este cuaderno en grandes bloques de contenidos. Cada bloque, a su vez, se divide en tres apartados, *Qué debes saber*, que contiene un recordatorio de los conceptos teóricos más relevantes, *Qué debes saber hacer*, que repasa todos los procedimientos básicos que son necesarios para dominar la asignatura, y *Hacia la Universidad*, en donde encontrarás ejemplos resueltos. Además, en este apartado, te proponemos una serie de actividades para que puedas poner a prueba tus conocimientos y habilidades matemáticas.



QUÉ DEBES SABER

Matrices y determinantes..... 6

- Matrices..... 6
- Determinantes..... 7
- Rango de una matriz 9
- Inversa de una matriz..... 9

Sistemas de ecuaciones..... 22

- Expresión matricial de un sistema..... 22
- Teorema de Rouché-Fröbenius..... 23
- Regla de Cramer 23
- Sistemas homogéneos 23

Producto escalar, vectorial y mixto..... 32

- Vectores en el espacio 32
- Producto escalar 33
- Producto vectorial..... 34
- Producto mixto..... 35

Rectas y planos 40

- Ecuaciones de la recta..... 40
- Ecuaciones del plano 40
- Posiciones relativas de dos rectas .. 41
- Posiciones relativas de recta y plano..... 42
- Posiciones relativas de dos planos. 42
- Posiciones relativas de tres planos. 43
- Ángulos..... 44
- Distancias..... 44

Límites. Continuidad 56

- Límite de una función en el infinito y en un punto 56
- Continuidad de una función 57
- Teorema de Bolzano 57
- Teorema de los valores intermedios..... 57



QUÉ DEBES SABER HACER

Matrices y determinantes..... 10

- Calcular un producto de matrices..... 10
- Calcular determinantes *haciendo ceros* 11
- Calcular el rango de una matriz 12 y 13
- Calcular la matriz inversa de una matriz..... 14 y 15
- Resolver ecuaciones matriciales 16 y 17

Sistemas de ecuaciones..... 24

- Resolver un sistema con el método de Gauss 24
- Resolver un sistema con parámetros con Gauss 25
- Clasificar un sistema mediante Rouché-Fröbenius..... 26
- Clasificar un sistema con parámetros mediante Rouché-Fröbenius 27
- Resolver un sistema mediante la regla de Cramer 28
- Resolver un sistema con parámetros con Cramer..... 29

Producto escalar, vectorial y mixto..... 36

- Calcular vectores linealmente independientes 36
- Calcular vectores perpendiculares a otro vector 36
- Calcular el área de un triángulo 37
- Calcular el volumen de un tetraedro 37

Rectas y planos 46

- Hallar la ecuación de una recta y un plano..... 46
- Comprobar si varios puntos están alineados 46
- Comprobar si varios puntos son coplanarios..... 47
- Calcular una recta perpendicular a un plano 47
- Calcular un plano perpendicular a una recta 47
- Calcular la proyección ortogonal de un punto sobre una recta y sobre un plano..... 48
- Calcular la proyección ortogonal de una recta sobre un plano 49
- Calcular el simétrico de un punto respecto de otro punto, de una recta o de un plano..... 50 y 51
- Calcular el plano de simetría de dos puntos..... 51

Límites. Continuidad 60

- Determinar si una función es continua en un punto..... 60
- Estudiar la continuidad de una función definida a trozos 60
- Determinar si una función se anula en un punto..... 61



QUÉ DEBES SABER

- Indeterminaciones..... 58
- Regla de L'Hôpital..... 59

Derivadas..... 66

- Derivada de una función en un punto..... 66
- Derivabilidad y continuidad..... 66
- Teorema de Rolle 66
- Teorema del valor medio 66
- Derivadas de funciones elementales 67
- Operaciones con derivadas..... 67

Funciones 74

- Dominio de una función 74
- Asíntotas. Ramas infinitas 74
- Monotonía de una función 75
- Curvatura de una función..... 75
- Simetrías 75
- Periodicidad..... 75

Integrales 86

- Integral de una función 86
- Integral definida. Regla de Barrow 86
- Integrales de funciones elementales 86

Probabilidad..... 98

- Combinatoria 98
- Espacio muestral. Sucesos 98
- Probabilidad condicionada 99
- Teorema de la probabilidad total.... 99
- Teorema de Bayes..... 99

Estadística..... 104

- Distribuciones discretas. Distribución binomial 104
- Distribuciones continuas. Distribución normal 105



QUÉ DEBES SABER HACER

- Aplicar el teorema de los valores intermedios..... 61
- Resolver límites con indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , ∞^0 o 0^0 62 y 63

Derivadas..... 68

- Determinar si una función es derivable en un punto..... 68
- Aplicar el teorema de Rolle 68
- Aplicar el teorema del valor medio..... 69
- Calcular la derivada de una función compuesta..... 69
- Calcular la derivada de funciones $h(x) = f(x)^{g(x)}$ 70
- Calcular la derivada de una función implícita 70
- Resolver problemas de optimización..... 71

Funciones 76

- Representar funciones polinómicas..... 76
- Representar funciones racionales 77
- Representar funciones con radicales..... 78
- Representar funciones exponenciales..... 79
- Representar funciones logarítmicas 80
- Representar funciones definidas a trozos 81

Integrales 88

- Resolver integrales racionales..... 88, 89 y 90
- Resolver una integral por partes..... 91
- Resolver una integral por cambio de variable 91
- Calcular el área entre una función y el eje X 92
- Calcular el área comprendida entre dos curvas..... 93

Probabilidad 100

- Resolver problemas con el teorema de la probabilidad total 100
- Resolver problemas con el teorema de Bayes..... 100

Estadística..... 106

- Determinar si una variable es binomial 106
- Calcular probabilidades en variables binomiales..... 106 y 107
- Calcular probabilidades en variables normales..... 108
- Aproximar una variable binomial a una normal..... 109



Matrices

Una **matriz de n filas y m columnas** es una tabla de $m \times n$ números reales ordenados en m filas y n columnas.

Los números a_{ij} son los **elementos** de la matriz, y en ellos el subíndice i indica la fila que ocupan, y el subíndice j , la columna.

La **dimensión** de una matriz de m filas y n columnas es $m \times n$. Decimos que una **matriz** es **cuadrada** cuando $m = n$, en caso contrario es **rectangular**.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow 1.^a \text{ fila} \\ \leftarrow 2.^a \text{ fila} \\ \leftarrow \dots \\ \leftarrow m.^a \text{ fila} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 1.^a \quad 2.^a \quad 3.^a \quad \dots \quad n.^a \end{array}$$

Columnas

Tipos de matrices

■ Matriz fila

$$A = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n})$$

■ Matriz columna

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

■ Matriz triangular superior

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

■ Matriz triangular inferior

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

■ Matriz diagonal

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Matriz identidad o matriz unitaria

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- Matriz nula

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

- Matriz traspuesta

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- Matriz simétrica $\rightarrow A = A^t$

- Matriz antisimétrica $\rightarrow -A = A^t$

Determinantes

- Determinante de orden 2

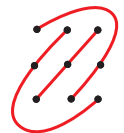
$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

- Determinante de orden 3

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$



Sumandos
con signo +



Sumandos
con signo -

- Adjunto de un elemento

El adjunto del elemento a_{ij} , A_{ij} , es el determinante de la submatriz cuadrada que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j , multiplicado por $(-1)^{i+j}$.

- Determinante de orden n

El **determinante** de una matriz cuadrada **de orden n** es igual a la suma de los productos de los elementos de una fila o una columna cualquiera por sus adjuntos correspondientes.

Por filas: $|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + \dots + a_{in}A_{in}$

Por columnas: $|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$



Propiedades de los determinantes

1. El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta.

$$|A| = |A^t|$$

2. Si en una matriz cuadrada intercambiamos dos de sus filas (o dos de sus columnas), su determinante cambia de signo.
3. Si en una matriz cuadrada multiplicamos por un mismo número todos los elementos de una misma fila (o columna), su determinante queda multiplicado por ese número.
4. Si una matriz cuadrada tiene una fila (o una columna) de ceros, su determinante es cero.
5. Si a una fila (o una columna) de una matriz cuadrada le sumamos una combinación lineal de las demás, su determinante no varía.
6. Si una matriz cuadrada tiene dos filas (o dos columnas) iguales, su determinante es cero.
7. Si una matriz cuadrada tiene dos filas (o dos columnas) proporcionales, su determinante es cero.
8. Si una matriz cuadrada tiene una fila (o una columna) que es combinación lineal de las demás, su determinante es cero.
9. Para cualquier fila o columna de un determinante se cumple que:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + a'_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a'_{33} \end{vmatrix}$$

10. El determinante del producto de dos matrices es igual al producto de sus determinantes.

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$



Rango de una matriz

El **rango de una matriz** A , $\text{Rango}(A)$, es el número de filas o de columnas no nulas linealmente independientes que tiene la matriz.

Se llama **menor de orden k** de una matriz A al determinante de orden k que está formado por los elementos que pertenecen a k filas y k columnas de la matriz A .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{Menor de orden 2} \rightarrow \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

El **rango de una matriz** coincide con el orden del mayor menor distinto de cero de la matriz.

Inversa de una matriz

La **matriz inversa** de una matriz cuadrada A de orden n es otra matriz A^{-1} del mismo orden que cumple que:

$$A \cdot A^{-1} = I_n$$

$$A^{-1} \cdot A = I_n$$

siendo I_n la matriz identidad de orden n .

Las matrices que tienen matriz inversa se llaman **matrices regulares** o **invertibles**, y las que no la tienen, **matrices singulares**.

Una matriz cuadrada, A , tiene matriz inversa, A^{-1} , si se cumple que $|A| \neq 0$.

En tal caso, la matriz inversa A^{-1} es la matriz traspuesta de los adjuntos de A dividida entre el determinante de A .

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A)^t$$

Propiedades

- La inversa de la matriz inversa es la matriz original.

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

- La inversa del producto de dos matrices es el producto de las inversas de las matrices cambiando su orden.

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

- La inversa de la traspuesta de una matriz es igual a la traspuesta de la matriz inversa.

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$



CALCULAR UN PRODUCTO DE MATRICES



Calcula el producto de estas matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

PRIMERO. Comprobamos que se pueden multiplicar: el número de columnas de la primera debe coincidir con el número de filas de la segunda.

Dimensión de A : 2×3

Dimensión de B : 3×2

El número de columnas de A coincide con el número de filas de B , por lo que las matrices se pueden multiplicar.

La matriz $A \cdot B$ tendrá el mismo número de filas que A y el número de columnas de B . Es decir, la matriz $A \cdot B$ será una matriz cuadrada de orden 2.

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

SEGUNDO. Efectuamos el producto de la primera fila de la matriz A por la primera columna de la matriz B . Obtenemos el primer elemento de la matriz producto.

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 4 + (-3) \cdot 0 + 4 \cdot 1 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 24 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

TERCERO. Multiplicamos la primera fila de la matriz A por el resto de columnas de la matriz B .

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 24 & 5 \cdot 2 + (-3) \cdot 5 + 4 \cdot 3 \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

CUARTO. Repetimos el proceso con el resto de filas de la primera matriz y de columnas de la segunda.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 0 \cdot 4 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

CALCULAR UN DETERMINANTE HACIENDO CEROS



Calcula este determinante.

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & -2 \\ -4 & 1 & 0 & -1 \\ 8 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

PRIMERO. Elegimos la línea (fila o columna) en la que nos será más sencillo hacer ceros. Para facilitar los cálculos, es conveniente que la línea elegida contenga al menos un 1.

↓ Elegimos la cuarta columna porque contiene un 1.

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & -2 \\ -4 & 1 & 0 & -1 \\ 8 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

SEGUNDO. Tomamos uno de los elementos de esa línea como referencia y realizamos las operaciones necesarias para que el resto de elementos de esa línea se conviertan en ceros.

En este caso, tomamos como referencia el 1 que figura como primer elemento de la cuarta columna.

Multiplicando la primera fila por el número adecuado, y sumándosela al resto de filas, obtenemos los ceros que buscamos.

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & -2 \\ -4 & 1 & 0 & -1 \\ 8 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 = F_2 + 2F_1 \\ F_3 = F_3 + F_1 \\ F_4 = F_4 + F_1}]{=} \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & 1 \\ 10 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 12 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

TERCERO. Desarrollamos el determinante por la línea que hemos elegido en la que solo tenemos un elemento distinto de 0.

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & -2 \\ -4 & 1 & 0 & -1 \\ 8 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & 1 \\ 10 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 12 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 10 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 12 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 10 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 12 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

CUARTO. Repetimos el proceso hasta obtener un determinante que sea sencillo de resolver.

En este caso podemos desarrollar por la segunda fila, pues solo tiene un elemento distinto de 0.

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & -2 \\ -4 & 1 & 0 & -1 \\ 8 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 10 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 12 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} = 2(20 - 0) = 40$$



CALCULAR EL RANGO DE UNA MATRIZ MEDIANTE EL MÉTODO DE GAUSS

**Determina el rango de esta matriz.**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

PRIMERO. Si $a_{11} = 0$, intercambiamos la primera fila con alguna fila cuyo primer elemento sea distinto de cero, si existe.

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

SEGUNDO. Realizamos operaciones en todas las filas, menos en la primera, para que el primer elemento de cada una de ellas sea cero.

El primer elemento de la segunda fila ya es cero. Hacemos cero el primer elemento de la tercera fila.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

TERCERO. Comprobamos que $a_{22} \neq 0$. Si no lo fuera, habría que intercambiar esta fila con alguna cuyo segundo elemento no sea cero, si existe.

En este caso no es necesario.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow a_{22} = -2 \neq 0$$

CUARTO. Como en el paso anterior, hacemos cero el segundo elemento de cada fila, excepto el de la primera y segunda filas.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 - \frac{1}{2}F_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

QUINTO. Repetimos el mismo proceso para el resto de filas de la matriz inicial hasta obtener una matriz en la que todos los elementos por debajo de su diagonal sean ceros. El número de filas no nulas que tiene la matriz es el rango de la matriz.

Hemos llegado a una matriz triangular superior.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Todos los elementos por debajo de la diagonal son cero.

En este caso obtenemos dos filas no nulas $\rightarrow \text{Rango}(A) = 2$

CALCULAR EL RANGO DE UNA MATRIZ UTILIZANDO DETERMINANTES



Calcula el rango de esta matriz.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 6 & -2 \\ 6 & 2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

PRIMERO. Si A es la matriz nula, $\text{Rango}(A) = 0$. En caso contrario, buscamos en la matriz un menor de orden 2 que sea distinto de 0. Si existe, $\text{Rango}(A) \geq 2$. Si todos los menores de orden 2 son nulos, $\text{Rango}(A) = 1$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 6 & -2 \\ 6 & 2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) \geq 2$$

SEGUNDO. Si tenemos que $\text{Rango}(A) \geq 2$, definimos menores de orden 3 añadiendo al menor encontrado las siguientes filas de la matriz, una a una, y las columnas que no figuran en él, también una a una. Si encontramos alguno distinto de 0, $\text{Rango}(A) \geq 3$. Si todos son nulos, $\text{Rango}(A) = 2$.

	3. ^a columna ↓	4. ^a columna ↓	5. ^a columna ↓
3. ^a fila →	$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$	$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0$	$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$
4. ^a fila →	$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$	$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) \geq 3$	

TERCERO. Si en el paso anterior hemos obtenido algún menor distinto de 0, elaboramos, a partir de este menor, determinantes de orden superior de la misma manera que en el paso anterior. El proceso termina cuando todos los determinantes son nulos o cuando llegamos al determinante de mayor orden que se pueda definir en la matriz.

	3. ^a columna ↓	5. ^a columna ↓
3. ^a fila →	$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 6 \\ 6 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$	$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & -2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

Como todos los menores de orden 4 son nulos, $\text{Rango}(A) < 4$. Del paso anterior sabemos que $\text{Rango}(A) \geq 3$; por tanto, tenemos que $\text{Rango}(A) = 3$.



CALCULAR LA MATRIZ INVERSA MEDIANTE EL MÉTODO DE GAUSS-JORDAN



Calcula, si es posible, la matriz inversa de esta matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \\ -6 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

PRIMERO. Escribimos la matriz A y la matriz identidad del mismo orden que A separadas por una línea. Si $a_{11} = 0$, intercambiamos la primera fila con alguna fila cuyo primer elemento sea distinto de cero.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{ Como } a_{11} \neq 0, \text{ no intercambiamos filas.}$$

SEGUNDO. Realizamos operaciones en todas las filas, menos en la primera, para que el primer elemento de cada una de ellas sea cero.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2 = F_2 - 2F_1 \\ F_3 = F_3 + 3F_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

TERCERO. Comprobamos que $a_{22} \neq 0$; si no lo fuera, habría que intercambiar la fila con alguna fila cuyo segundo elemento sea distinto de cero. De la misma manera, hacemos cero el segundo elemento de cada fila, excepto el de la segunda fila.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_1 = F_1 - F_2 \\ F_3 = F_3 + F_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 7 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

CUARTO. Repetimos el mismo proceso para el resto de filas de la matriz inicial.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 7 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_1 = F_1 + 7F_3 \\ F_2 = F_2 - 5F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 10 & 6 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & -7 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

QUINTO. Dividimos cada fila entre el elemento que figura en su diagonal para obtener la matriz identidad.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 10 & 6 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & -7 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_1 = \frac{1}{2}F_1 \\ F_2 = -F_2 \\ F_3 = -F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 3 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

SEXTO. Los elementos que figuran a la derecha de la línea forman la inversa de la matriz inicial.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & \frac{7}{2} \\ 7 & 4 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

CALCULAR LA MATRIZ INVERSA UTILIZANDO DETERMINANTES



Calcula la matriz inversa de esta matriz.

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

PRIMERO. Hallamos el determinante de la matriz. Si el determinante es igual a 0, la matriz no tiene inversa.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6 - 2 - 4 + 3 + 4 + 4 = -1$$

SEGUNDO. Si el determinante es distinto de 0, calculamos los adjuntos de la matriz.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -2$$

TERCERO. Definimos la matriz de los adjuntos y calculamos su traspuesta.

$$\text{Adj}(T) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Adj}(T)^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

CUARTO. Aplicamos la fórmula de la matriz inversa.

$$T^{-1} = \frac{1}{|T|} \text{Adj}(T)^t = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

QUINTO. Comprobamos el resultado viendo que el producto de la matriz inicial por su inversa es la identidad.

$$T \cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como obtenemos la matriz identidad, la matriz inversa de T es:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

RESOLVER ECUACIONES MATRICIALES DEL TIPO $AX = B$ 

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, resuelve la ecuación $AX = B$.

PRIMERO. Despejamos X multiplicando por A^{-1} por la izquierda.

$$AX = B \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \xrightarrow{A \cdot A^{-1} = I} IX = A^{-1}B \rightarrow X = A^{-1}B$$

SEGUNDO. Calculamos A^{-1} .

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 = F_1 - F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_1 = \frac{1}{2}F_1 \\ F_2 = -F_2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \quad A^{-1}$$

TERCERO. Resolvemos la ecuación.

$$X = A^{-1}B \rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

RESOLVER ECUACIONES MATRICIALES DEL TIPO $XA = B$ 

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, resuelve la ecuación $XA = B$.

PRIMERO. Despejamos X multiplicando por A^{-1} por la derecha.

$$XA = B \rightarrow XAA^{-1} = BA^{-1} \xrightarrow{A \cdot A^{-1} = I} XI = BA^{-1} \rightarrow X = BA^{-1}$$

SEGUNDO. Calculamos A^{-1} .

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 = F_2 - F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_1 = \frac{1}{2}F_1 \\ F_2 = -F_2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \quad A^{-1}$$

TERCERO. Resolvemos la ecuación.

$$X = BA^{-1} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{2} & -2 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

RESOLVER ECUACIONES MATRICIALES DEL TIPO $AX + B = C$



Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Resuelve la ecuación $AX + 3B = C$.

PRIMERO. Despejamos X .

$$AX + 3B = C \rightarrow AX = C - 3B \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(C - 3B)$$

$$\xrightarrow{A \cdot A^{-1} = I} X = A^{-1}(C - 3B)$$

SEGUNDO. Calculamos A^{-1} .

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_2 = F_2 + F_1 \\ F_3 = F_3 - 2F_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow[\substack{F_2 \leftrightarrow F_3 \\ F_1 = F_1 + F_2}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow[\substack{F_1 = F_1 + F_3 \\ F_2 = F_2 + 2F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{F_3 = -F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

A^{-1}

Por tanto: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

TERCERO. Resolvemos la ecuación.

Calculamos primero $C - 3B$ para simplificar los cálculos.

$$C - 3B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 6 & 2 \\ -1 & 5 & -5 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallamos el valor de X que hemos despejado en el primer paso.

$$X = A^{-1}(C - 3B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 & 6 & 2 \\ -1 & 5 & -5 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -3 \\ -5 & 11 & -8 \\ 10 & -11 & 3 \end{pmatrix}$$

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 1 & 0 & m \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$:

- a) Calcula los valores del parámetro m para los que A tiene inversa.
 b) Para $m = 0$, calcula A^3 y A^{25} .
 c) Para $m = 0$, calcula la matriz X que verifica $X \cdot A = B$, siendo $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

- a) **IDEA CLAVE.** Para que una matriz tenga inversa tiene que ser cuadrada y su rango debe ser igual a su orden.

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 1 & 0 & m \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2 = F_2 - mF_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 0 & 1 - m^2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - m^2 \end{pmatrix}$$

Si $1 - m^2 = 0 \rightarrow m = \pm 1 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2 \rightarrow A$ no tiene inversa.

Si $1 - m^2 \neq 0 \rightarrow m \neq \pm 1 \rightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Orden}(A) \rightarrow A$ tiene inversa.

- b) **IDEA CLAVE.** Para calcular una potencia elevada de una matriz, hallamos las potencias sucesivas: $A^2, A^3, A^4, \dots$, y estudiamos sus regularidades.

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

$$A^4 = A^3A = -IA = -A \quad A^6 = A^5A = -A^2A = -A^3 = I \quad A^8 = A^7A = AA = A^2$$

$$A^5 = A^4A = -AA = -A^2 \quad A^7 = A^6A = IA = A \quad A^9 = A^3 = -I$$

$$A^{10} = A^4 = -A \quad A^{25} = A \text{ porque el resto de dividir 25 entre 6 es 1.}$$

- c) **IDEA CLAVE.** Para resolver una ecuación matricial despejamos X , tal y como si fuera una ecuación numérica, teniendo en cuenta que el producto de matrices no es conmutativo.

$$XA = B \rightarrow XAA^{-1} = BA^{-1} \rightarrow X = BA^{-1}$$

Calculamos A^{-1} .

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 = -F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Procura que en la diagonal de la matriz no aparezca el parámetro. Para ello puedes intercambiar las filas de la matriz.

Si $A^p = I$, entonces:

$$A^q = A^r$$

donde r es el resto de la división de q entre p .

HAZLO TÚ

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & k & t \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

- a) Halla A^{10} .
- b) Calcula la matriz inversa de B .
- c) En el caso particular $k = 0$, halla B^{10} .

2. Sea A la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Para cada número natural n , halla A^n .
Calcula $A^{22} - 12A^2 + 2A$.

3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, halla las matrices X que satisfacen $XC + A = C + A^2$.

4. Encuentra las matrices A y B , sabiendo que verifican las ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} 2A + 3B = M \\ -A + B = N \end{cases} \text{ siendo } M = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix} \text{ y } N = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 6 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

5. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$:

- a) Comprueba que verifica que $A^3 - I = 0$, con I matriz identidad y 0 matriz nula.
- b) Calcula A^{13} .
- c) Basándote en los apartados anteriores y sin recurrir al cálculo de inversas, halla la matriz X que verifica la igualdad $A^2X + I = A$.

6. Sean A , B e I las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Estudia si existe algún valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ para el cual se satisfaga $(A - \lambda I)^2 = B$.

7. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & -1 & m+1 \end{pmatrix}$:

- a) Estudia, según los valores de m , el rango de A .
- b) Para $m = -1$, calcula la matriz X que verifica $XA + A = 2I$, siendo I la matriz unidad de orden 3.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ k & 2 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) Razonar para qué valores de k la matriz $B^t A^t$ tiene inversa.
b) Resolver la ecuación $(AB)^t X = I$, para $k = 0$, siendo I la matriz identidad.

a) **IDEA CLAVE.** Para que una matriz tenga inversa tiene que ser cuadrada y su determinante ha de ser distinto de 0.

Primero, calculamos las traspuestas y, después, el producto de las matrices:

$$A^t = \begin{pmatrix} -1 & k \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & k \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^t A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & k \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & k \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k-1 & k \\ 3 & k+2 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de $A^t B^t A^t$:

$$|B^t A^t| = \begin{vmatrix} 2k-1 & k \\ 3 & k+2 \end{vmatrix} = (2k-1) \cdot (k+2) - 3k = 2k^2 - 2$$

Iguamos a cero el valor del determinante de $B^t A^t$:

$$2k^2 - 2 = 0 \rightarrow k = \pm 1$$

La matriz $B^t A^t$ tiene inversa para todos los valores reales de k distintos de 1 y -1.

b) **IDEA CLAVE.** Para resolver una ecuación matricial se despeja la matriz incógnita tal y como si fuera una ecuación numérica, teniendo en cuenta que el producto de matrices no es conmutativo.

$$(AB)^t X = I \rightarrow ((AB)^t)^{-1} \cdot (AB)^t \cdot X = ((AB)^t)^{-1} I \rightarrow X = ((AB)^t)^{-1} I$$

Como $(AB)^t = B^t A^t$ y sabemos, por el apartado anterior, que $B^t A^t$ tiene inversa para $k = 0$, calculamos su inversa:

$$(AB)^t = B^t A^t = \begin{pmatrix} 2k-1 & k \\ 3 & k+2 \end{pmatrix} \xrightarrow{k=0} (AB)^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|(AB)^t| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$\text{Adj } ((AB)^t) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Adj } ((AB)^t)^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$((AB)^t)^{-1} = \frac{1}{|(AB)^t|} \text{Adj } ((AB)^t)^t = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matriz buscada es:

$$X = ((AB)^t)^{-1} I = ((AB)^t)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Las soluciones de la ecuación son los valores que hacen que el determinante sea 0.

Al calcular la inversa de una matriz utilizando determinantes recuerda que en el cálculo del adjunto A_{ij} hay que multiplicar su menor complementario por $(-1)^{i+j}$.

HAZLO TÚ

1. Sea $P(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 3 & 3 & x & 3 \\ 3 & 3 & 3 & x \end{vmatrix}$. Halla dos raíces de este polinomio de grado cuatro.

2. Utiliza las propiedades de los determinantes para desarrollar el siguiente:

$$\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 3x+2 \\ x & 2x+3 & 3x+4 \\ x & 2x+5 & 3x+6 \end{vmatrix}$$

Enuncia las propiedades que has utilizado.

3. Teniendo en cuenta que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 7$, calcula el valor del siguiente determinante sin desarrollarlo:

$$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix}$$

4. Halla los valores de k para que la matriz:

$$\begin{pmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ -k & 1 & 2 & 3 \\ -k & -k & 0 & -1 \\ -k & -k & -k & -1 \end{pmatrix}$$

a) No tenga inversa.

b) Tenga rango 3.

5. Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$:

a) Determina el rango de M según los valores del parámetro a .

b) Determina para qué valores de a existe matriz inversa de M . Calcula dicha matriz inversa para $a = 2$.

6. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Probar que la matriz T tiene inversa, T^{-1} , y calcular dicha inversa T^{-1} .

b) Dada la ecuación $A = T^{-1}BT$, con matriz incógnita B , calcular el determinante de la matriz B .

c) Obtener los elementos de la matriz B considerada en el apartado b).



Un **sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas** es el conjunto formado por m ecuaciones lineales con las mismas n incógnitas del que se quiere buscar una solución común. Lo representamos así:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\}$$

Los números reales a_{ij} se denominan **coeficientes del sistema**, y los números reales b_j , **términos independientes**.

Según su número de soluciones, los sistemas pueden ser:

- **Incompatibles:** si no tienen solución.
- **Compatibles:** si tienen solución.
 - Si la solución es única, el sistema es **determinado**.
 - Si existe más de una solución, el sistema es **indeterminado**.

Expresión matricial de un sistema

Dado un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\}$$

llamaremos **expresión matricial** de este sistema a la expresión:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Matriz de los Matriz Matriz
 coeficientes de las de los términos
 o matriz principal incógnitas independientes
 A · X = B

También llamaremos **matriz ampliada**, A^* , del sistema a la matriz formada por los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes de cada ecuación.

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$



Teorema de Rouché-Fröbenius

La condición necesaria y suficiente para que un sistema $A \cdot X = B$ tenga solución es que el rango de la matriz de los coeficientes del sistema, A , sea el mismo que el rango de su matriz ampliada, A^* .

El sistema es compatible si, y solo si, $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*)$.

Discusión de sistemas

- Si $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(A^*)$, el sistema es incompatible.
- Si $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = r$, el sistema es compatible.
 - Si $r =$ número de incógnitas, el sistema es compatible determinado.
 - Si $r <$ número de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado.

Regla de Cramer

Dado un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right\}$$

si se cumple que el determinante de la matriz de los coeficientes es no nulo, $|A| \neq 0$, entonces el sistema es compatible determinado, y su solución es:

$$x_i = \frac{|A_{x_i}|}{|A|}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n$$

siendo A_{x_i} la matriz que resulta de sustituir en la matriz A la columna de los coeficientes de x_i por la columna de los términos independientes.

Sistemas homogéneos

Si todos los términos independientes de un sistema de ecuaciones son ceros, diremos que es un **sistema homogéneo**.

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right\}$$

Un sistema homogéneo siempre tiene como solución $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$.



RESOLVER UN SISTEMA UTILIZANDO EL MÉTODO DE GAUSS

Resuelve este sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = -1 \\ -2x \quad \quad + 4z = -6 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

PRIMERO. Escribimos una matriz en la que los elementos de cada fila serán los coeficientes de las incógnitas y, separado por una línea vertical, el término independiente de la ecuación.

$$\begin{pmatrix} x & y & z & b_i \\ 1 & -3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

SEGUNDO. Si $a_{11} = 0$, intercambiamos la primera fila con alguna fila cuyo primer elemento sea distinto de 0. Realizamos operaciones en todas las filas, menos en la primera, para que el primer elemento de cada una de ellas sea 0.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 = F_2 + 2F_1 \\ F_3 = F_3 + F_1}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 8 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

TERCERO. Repetimos el mismo proceso para el resto de filas de la matriz, hasta obtener una matriz en la que todos los elementos por debajo de su diagonal sean 0.

Primero intercambiamos la segunda y la tercera filas para que los cálculos sean más sencillos.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 8 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 8 & -8 \end{pmatrix}$$

Hacemos cero el coeficiente a_{32} .

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 8 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 + 6F_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

CUARTO. Transformamos la matriz resultante en sistema de ecuaciones y lo resolvemos.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - 3y + 2z = -1 \\ y - z = 1 \\ 2z = -2 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = -1 \\ y - z = 1 \\ 2z = -2 \end{cases} \rightarrow z = -1$$

$$y - z = 1 \xrightarrow{z = -1} y + 1 = 1 \rightarrow y = 0$$

$$x - 3y + 2z = -1 \xrightarrow{y = 0, z = -1} x - 0 - 2 = -1 \rightarrow x = 1$$

RESOLVER UN SISTEMA CON PARÁMETROS UTILIZANDO EL MÉTODO DE GAUSS

Discute y resuelve, en función del parámetro m , este sistema:
$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 2 \\ 2x \quad \quad - 4z = -4 \\ -y + \lambda z = 1 \end{cases}$$

PRIMERO. Aplicamos el método de Gauss hasta obtener un sistema escalonado.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & | & 2 \\ 2 & 0 & -4 & | & -4 \\ 0 & -1 & \lambda & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 = F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & -6 & | & -6 \\ 0 & -1 & \lambda & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & -6 & | & -6 \\ 0 & 0 & \lambda - 6 & | & -5 \end{pmatrix}$$

SEGUNDO. Analizamos la última fila de la matriz y discutimos el sistema en función de los valores del parámetro.

- Si $\lambda = 6 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & -6 & | & -6 \\ 0 & 0 & 0 & | & -5 \end{pmatrix} \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $\lambda \neq 6 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & -6 & | & -6 \\ 0 & 0 & \lambda - 6 & | & -5 \end{pmatrix} \rightarrow$ Sistema compatible determinado

TERCERO. Resolvemos el sistema en los casos en los que sea compatible.

Si $\lambda \neq 6$:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 2 \\ y - 6z = -6 \\ (\lambda - 6)z = -5 \end{cases} \rightarrow z = -\frac{5}{\lambda - 6}$$

$$y - 6z = -6 \rightarrow y + \frac{30}{\lambda - 6} = -6 \rightarrow y = \frac{6 - 6\lambda}{\lambda - 6}$$

$$2x - y + 2z = 2 \rightarrow 2x - \frac{6 - 6\lambda}{\lambda - 6} - \frac{10}{\lambda - 6} = 2 \rightarrow x = \frac{2 - 2\lambda}{\lambda - 6}$$

$$\text{El sistema tiene solución única: } \begin{cases} x = \frac{2 - 2\lambda}{\lambda - 6} \\ y = \frac{6 - 6\lambda}{\lambda - 6} \\ z = -\frac{5}{\lambda - 6} \end{cases}$$



CLASIFICAR UN SISTEMA UTILIZANDO EL TEOREMA DE ROUCHÉ-FRÖBENIUS

Estudia el número de soluciones de estos sistemas.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \left. \begin{array}{l} x - 3y + z = 2 \\ -2x \quad + 2z = 0 \\ x - 4y - 3z = -2 \end{array} \right\} & \text{b)} \quad \left. \begin{array}{l} x - 3y + z = 2 \\ -2x \quad + 2z = 0 \\ -x - 3y + 3z = 2 \end{array} \right\} & \text{c)} \quad \left. \begin{array}{l} x - 3y + z = 2 \\ -2x \quad + 2z = 0 \\ -x - 3y + 3z = 8 \end{array} \right\} \end{array}$$

PRIMERO. Determinamos las matrices A y A^* .

$$\text{a)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{c)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & -3 & -2 \end{array} \right)$$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 3 & 2 \end{array} \right)$$

$$\text{b)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 3 & 8 \end{array} \right)$$

SEGUNDO. Calculamos el rango de ambas matrices.

$$\text{a)} \quad |A| = 28 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(A^*)$$

$$\text{b)} \quad |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Todos los menores de orden 3 de A^* son nulos:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango}(A^*) = 2$$

$$\text{c)} \quad |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\text{Como } \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 8 \end{vmatrix} = -36 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A^*) = 3$$

TERCERO. Aplicamos el teorema de Rouché-Fröbenius.

$$\text{a)} \quad \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 3 = n.^{\circ} \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Compatible determinado}$$

$$\text{b)} \quad \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 2 < n.^{\circ} \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Compatible indeterminado}$$

$$\text{c)} \quad \text{Rango}(A) = 2 \neq \text{Rango}(A^*) = 3 \rightarrow \text{Incompatible}$$

CLASIFICAR UN SISTEMA CON PARÁMETROS UTILIZANDO EL TEOREMA DE ROUCHÉ-FRÖBENIUS

Discute, en función del parámetro λ , este sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} x + y - z = \lambda \\ \lambda x + 2y - z = 3\lambda \\ 2x + \lambda y - z = 6 \end{cases}$$

PRIMERO. Calculamos el rango de A atendiendo a los valores del parámetro.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \lambda & 2 & -1 \\ 2 & \lambda & -1 \end{vmatrix} = -\lambda^2 + 2\lambda$$
$$-\lambda^2 + 2\lambda = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

- Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 2 \rightarrow \text{Rango}(A) = 3$
- Si $\lambda = 0$ o $\lambda = 2 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$

SEGUNDO. Calculamos el rango de A^* atendiendo a los valores del parámetro que hemos obtenido en el paso anterior.

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & \lambda \\ \lambda & 2 & -1 & 3\lambda \\ 2 & \lambda & -1 & 6 \end{array} \right)$$

- Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 2 \rightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(A^*)$
- Si $\lambda = 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 6 \end{array} \right) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A^*) = 3$$

- Si $\lambda = 2 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & 2 & -1 & 6 \end{array} \right) \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A^*) = 2$$

TERCERO. Aplicamos el teorema de Rouché-Fröbenius.

- Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 2 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 3 = \text{n.º de incógnitas}$.
Sistema compatible determinado.
- Si $\lambda = 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2 \neq \text{Rango}(A^*) = 3$.
Sistema incompatible.
- Si $\lambda = 2 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 2 < \text{n.º de incógnitas}$.
Sistema compatible indeterminado.



RESOLVER UN SISTEMA UTILIZANDO LA REGLA DE CRAMER

Resuelve este sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -2 \\ -2x \quad \quad - 2z = 0 \\ 3x - 2y - 3z = 4 \end{cases}$$

PRIMERO. Estudiamos que se cumplen las condiciones necesarias para aplicar la regla de Cramer:

- El número de ecuaciones es igual al número de incógnitas.
- El determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero.

En este caso, el sistema está compuesto por tres ecuaciones y tres incógnitas.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 32 \neq 0$$

SEGUNDO. Calculamos $|A_x|$.

En este caso, tenemos que hallar $|A_x|$, $|A_y|$ y $|A_z|$.

- Calculamos $|A_x|$, que es el determinante cuya primera columna está formada por los términos independientes de las tres ecuaciones, la segunda por los coeficientes de la variable y y la tercera por los coeficientes de z .

$$|A_x| = \begin{vmatrix} b_i & y & z \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 32$$

- Calculamos $|A_y|$, que es el determinante cuya primera columna está formada por los coeficientes de x , la segunda por los términos independientes de las tres ecuaciones y la tercera por los coeficientes de z .

$$|A_y| = \begin{vmatrix} x & b_i & z \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 32$$

- Calculamos $|A_z|$, que es el determinante cuya primera columna está formada por los coeficientes de x , la segunda por los coeficientes de y y la tercera por los términos independientes de las tres ecuaciones.

$$|A_z| = \begin{vmatrix} x & y & b_i \\ 2 & -3 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -32$$

TERCERO. Calculamos la solución del sistema.

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{32}{32} = 1$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{32}{32} = 1$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{-32}{32} = -1$$

La solución es $x = 1$, $y = 1$ y $z = -1$.

RESOLVER UN SISTEMA CON PARÁMETROS UTILIZANDO LA REGLA DE CRAMER

Resuelve, en función del parámetro λ , este sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} x + y - z = \lambda \\ \lambda x + 2y - z = 3\lambda \\ 2x + \lambda y - z = 6 \end{cases}$$

PRIMERO. Discutimos el sistema atendiendo a los valores del parámetro.

- Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 2 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = n.^\circ$ de incógnitas.
Sistema compatible determinado.
- Si $\lambda = 0 \rightarrow \text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(A^*)$.
Sistema incompatible.
- Si $\lambda = 2 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) < n.^\circ$ de incógnitas.
Sistema compatible indeterminado.

SEGUNDO. Resolvemos el sistema para los valores del parámetro en los que es compatible determinado.

Utilizamos la regla de Cramer en el caso de que $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 2$: $|A| = -\lambda^2 + 2\lambda$.

$$|A_x| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 3\lambda & 2 & -1 \\ 6 & \lambda & -1 \end{vmatrix} = -2\lambda^2 + \lambda + 6x \quad x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-2\lambda^2 + \lambda + 6}{-\lambda^2 + 2\lambda}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ \lambda & 3\lambda & -1 \\ 2 & 6 & -1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6y \quad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\lambda^2 - 5\lambda + 6}{-\lambda^2 + 2\lambda}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 2 & 3\lambda \\ 2 & \lambda & 6 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 12 \quad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 12}{-\lambda^2 + 2\lambda}$$

TERCERO. Resolvemos el sistema para los valores del parámetro en los que es compatible indeterminado.

Utilizamos la regla de Cramer en el caso de que $\lambda = 2$.

1.ª ecuación $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow$ Eliminamos la 3.ª ecuación y pasamos x al segundo miembro.

$$\begin{cases} y - z = 2 - x \\ 2y - z = 6 - 2x \end{cases} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 2 - x & -1 \\ 6 - 2x & -1 \end{vmatrix} = 4 - x \quad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 2 - x \\ 2 & 6 - 2x \end{vmatrix} = 2$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{4 - x}{1} = 4 - x \quad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{2}{1} = 2 \quad \text{Solución: } \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4 - \lambda \\ z = 2 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Considera la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix}$

a) Halla los valores del parámetro m para los que el rango de A es menor que 3.

b) Estudia si el sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tiene solución para cada uno de los valores de m obtenidos en el apartado anterior.

a) **IDEA CLAVE.** Si $|A| = 0 \rightarrow \text{Rango}(A) < 3$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_2 = C_2 - C_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ m & m^2 - m & m^2 \\ m & 0 & m^2 \end{vmatrix} = (m^2 - m) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & m^2 \end{vmatrix} = (m^2 - m)(m^2 - m) = (m^2 - m)^2$$

Hallamos los valores que anulan el determinante:

$$(m^2 - m)^2 = 0 \rightarrow m^2 - m = 0 \rightarrow m(m - 1) = 0 \rightarrow \left. \begin{matrix} m = 0 \\ m - 1 = 0 \end{matrix} \right\} \rightarrow m = 1$$

Estudiamos el rango de A para los valores que anulan el denominador:

■ Si $m \neq 1$ y $m \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 3$

■ Si $m = 1$ o $m = 0 \rightarrow \text{Rango}(A) < 3$

b) **IDEA CLAVE.** Tenemos que estudiar cuándo se verifica que $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*)$ para $m = 0$ y $m = 1$.

■ Si $m = 1$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Las tres filas son iguales $\rightarrow \text{Rango}(A) = 1$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \end{pmatrix} \text{ El rango de } A^* \text{ depende de si } a, b \text{ y } c \text{ son iguales o distintos.}$$

– Si $a = b = c \rightarrow \text{Rango}(A^*) = 1$

$\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 1 < n.^{\circ}$ de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

– Si a, b y c no son el mismo número $\rightarrow \text{Rango}(A^*) = 2$

$\text{Rango}(A) = 1 \neq \text{Rango}(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema incompatible

■ Si $m = 0$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Hay dos filas con todos sus elementos ceros $\rightarrow \text{Rango}(A) = 1$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \end{pmatrix} \text{ El rango de } A^* \text{ depende de si } b \text{ y } c \text{ son iguales a } 0.$$

– Si $b = c = 0 \rightarrow \text{Rango}(A^*) = 1$

$\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 1 < n.^{\circ}$ de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

– Si $b \neq c \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A^*) > 1$

$\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(A^*) \rightarrow$ Sistema incompatible

La conjunción «y» va asociada al signo $\neq$, y la conjunción «o» al signo $=$.

$$m \neq 1 \text{ y } m \neq 0$$

$$m = 1 \text{ o } m = 0$$

HAZLO TÚ

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, encuentra todas las matrices $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $AP = PA$.

2. Resuelve: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{pmatrix}$, $B = (a \ 2 \ 3)$ y $C = (4 \ 0 \ 2)$.

- a) Halla los valores x, y y z para los que A no tiene inversa.
- b) Determina los valores de a para los que el sistema $B \cdot A = C$ tiene solución.
- c) Resuelve el sistema anterior cuando sea posible.

4. Se considera el sistema $\left. \begin{array}{l} x - y + z = -1 \\ y + z = 2a \\ x + 2z = a^2 \end{array} \right\}$ donde a es un parámetro real.

- a) Discute el sistema en función del valor de a .
- b) Resuelve el sistema para $a = 0$.
- c) Resuelve el sistema para $a = 1$.

5. Dado el sistema dependiente del parámetro α :

$$\left. \begin{array}{l} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ x + y + \alpha z = 1 \end{array} \right\}$$

Se pide:

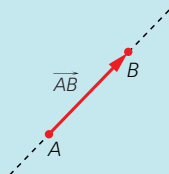
- a) Determinar, razonadamente, los valores de α para los que el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible.
 - b) Resolver el sistema cuando es compatible determinado.
 - c) Obtener, razonadamente, la solución del sistema cuando $\alpha = 0$.
6. Cierta país importa 21 000 vehículos de tres marcas A, B y C al precio de 10 000, 15 000 y 20 000 €, respectivamente. El total de la importación asciende a 332 millones de euros. Se ha observado que también hay 21 000 vehículos contando solamente los de la marca B y α veces los de la A .
- a) Plantea un sistema de ecuaciones con las condiciones del problema en función del número de vehículos de cada marca.
 - b) Establece el número de vehículos de cada marca suponiendo que $\alpha = 3$.
 - c) Estudia si existe algún valor α para el cual la situación no pueda darse en el campo de los números reales.



Vectores en el espacio

Un **vector** en el espacio, $\overrightarrow{AB}$, es un segmento orientado con origen en el punto A y extremo en B. Dicho vector queda determinado por:

- **Módulo:** es la longitud del segmento AB. Se escribe $|\overrightarrow{AB}|$.
- **Dirección:** es la recta que pasa por A y B.
Dos vectores tienen la misma dirección si están situados sobre la misma recta o rectas paralelas.
- **Sentido:** es la forma de recorrer el segmento AB, es decir, de fijar cuál de los puntos es el origen y cuál es el extremo.



- Llamamos **vector nulo**, $\vec{0}$, al vector en el que coinciden su origen y su extremo y, por tanto, su módulo es cero. Este vector no tiene dirección.
- Si el vector tiene módulo 1, diremos que es un **vector unitario**.
- Dos **vectores** son **iguales** si tienen el mismo módulo, la misma dirección (los vectores están situados sobre la misma recta o rectas paralelas) y el mismo sentido.

Coordenadas y módulo de un vector

- En el sistema de referencia canónico, las coordenadas de un vector $\overrightarrow{AB}$ son las coordenadas del punto extremo menos las del origen:

$$\left. \begin{array}{l} A(a_1, a_2, a_3) \\ B(b_1, b_2, b_3) \end{array} \right\} \rightarrow \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

- En este sistema de referencia, si $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, su módulo es:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Dependencia e independencia lineal de vectores

Dada una colección de n vectores en el espacio $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$:

- Son **linealmente independientes** cuando el rango de la matriz que forman sus coordenadas es n .
- Son **linealmente dependientes** cuando el rango de la matriz que forman sus coordenadas es estrictamente menor que n .

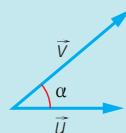
Dos vectores son **paralelos** si son linealmente dependientes, es decir, cuando sus coordenadas son proporcionales.

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \text{ es paralelo a } \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \text{ cuando } \frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3}.$$

Producto escalar

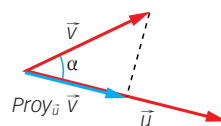
Se llama **producto escalar** de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y se escribe $\vec{u} \cdot \vec{v}$, al número real que resulta al multiplicar sus módulos por el coseno del ángulo que forman.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$$



Interpretación geométrica

El producto escalar de dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, equivale al producto del módulo de cualquiera de ellos por el módulo de la proyección del otro sobre él.



Expresión en coordenadas

En el sistema de referencia canónico, el producto escalar de dos vectores, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, es:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

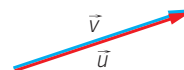
Propiedades

- El producto escalar de un vector por sí mismo es el cuadrado de su módulo: $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{v}| \cdot |\vec{v}| = |\vec{v}|^2$$

- El producto escalar de dos vectores no nulos es cero si, y solo si, los vectores son perpendiculares.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha = 0 \rightarrow \cos \alpha = 0 \rightarrow \alpha = 90^\circ \rightarrow \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ son perpendiculares.}$$

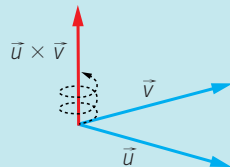




Producto vectorial

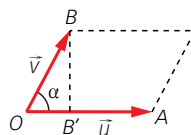
El **producto vectorial** de dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es otro vector $\vec{u} \times \vec{v}$ que tiene los siguientes elementos:

- **Módulo:** $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \text{sen } \alpha$, siendo α el menor ángulo entre los vectores.
- **Dirección:** la perpendicular de cualquier plano generado por ambos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
- **Sentido:** el del avance de un sacacorchos que gira de $\vec{u}$ a $\vec{v}$.



Interpretación geométrica

El módulo del producto vectorial de dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es igual al área del paralelogramo que definen ambos vectores.



Expresión en coordenadas

En el sistema de referencia canónico, el producto vectorial de dos vectores, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, es:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

Propiedades

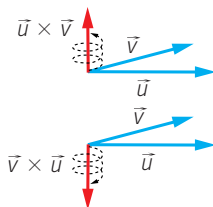
- El producto vectorial de un vector por sí mismo es cero.

$$|\vec{u} \times \vec{u}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cdot \text{sen } 0^\circ = |\vec{u}|^2 \cdot 0 = 0$$

- El producto vectorial de dos vectores no nulos es el vector nulo si, y solo si, los vectores son paralelos.

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = 0 \rightarrow |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \text{sen } \alpha = 0 \rightarrow \text{sen } \alpha = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha = 0^\circ \\ \alpha = 180^\circ \end{cases}$$

- Los vectores $\vec{u} \times \vec{v}$ y $\vec{v} \times \vec{u}$ son opuestos.



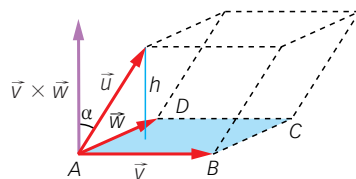
Producto mixto

Se llama **producto mixto** de tres vectores, $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, y se escribe $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, al número que se obtiene al calcular el producto escalar del primer vector por el producto vectorial de los otros dos.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

Interpretación geométrica

El valor absoluto del producto mixto de tres vectores, $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, es igual al volumen del paralelepípedo definido por ellos.



Expresión en coordenadas del producto mixto

En el sistema de referencia canónico, el producto mixto de tres vectores, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, es:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Propiedades

- El producto mixto cambia de signo si se permutan dos de los vectores.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}]$$

- El producto mixto de tres vectores no nulos es cero si, y solo si, los vectores son linealmente dependientes. Es decir, uno de ellos es combinación lineal de los otros dos.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$$

$$\vec{u} \perp (\vec{v} \times \vec{w})$$

$\vec{u}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.





CALCULAR VECTORES LINEALMENTE INDEPENDIENTES

Determina el número máximo de vectores linealmente independientes entre los siguientes, y elige vectores que lo sean.

$$\vec{v}_1 = (1, 2, 3) \quad \vec{v}_2 = (0, 1, -2) \quad \vec{v}_3 = (1, 3, 0) \quad \vec{v}_4 = (0, 2, -4)$$

PRIMERO. Hallamos el rango de la matriz de las coordenadas de los vectores.

Calculamos el rango haciendo ceros.

$$\text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

SEGUNDO. Identificamos los vectores de las filas que son distintas de cero.

Como el rango es 3, el número máximo de vectores independientes es 3.

Son independientes v_1 , v_2 y v_3 porque representan las filas de la matriz que son distintas de cero.

CALCULAR VECTORES PERPENDICULARES A OTRO VECTOR

Dado el vector $\vec{u} = (1, -1, 2)$, calcula los vectores perpendiculares a él.

PRIMERO. Escribimos la condición de perpendicularidad para un vector genérico $\vec{v}$.

$$\vec{u} = (1, -1, 2) \perp \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \rightarrow (1, -1, 2) \cdot (v_1, v_2, v_3) = v_1 - v_2 + 2v_3 = 0$$

SEGUNDO. Resolvemos la ecuación despejando una incógnita en función de las otras.

$$v_1 - v_2 + 2v_3 = 0 \rightarrow v_1 = v_2 - 2v_3$$

Haciendo $v_2 = \lambda$ y $v_3 = \mu$:

$$\text{Solución: } \begin{cases} v_1 = \lambda - 2\mu \\ v_2 = \lambda \\ v_3 = \mu \end{cases}$$

TERCERO. Escribimos la solución en forma vectorial y la descomponemos en suma de dos vectores, siendo cada uno dependiente de un parámetro.

$$(v_1, v_2, v_3) = (\lambda - 2\mu, \lambda, \mu) = (\lambda, \lambda, 0) + (-2\mu, 0, \mu)$$

CUARTO. Sacamos factor común a cada parámetro, obteniendo dos vectores que forman una base de los vectores perpendiculares al dado.

$$(\lambda, \lambda, 0) + (-2\mu, 0, \mu) = \lambda(1, 1, 0) + \mu(-2, 0, 1) \rightarrow \mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (-2, 0, 1)\}$$

Todo vector perpendicular a $\vec{u}$ es combinación lineal de los elementos de la base $\mathcal{B}$.

CALCULAR EL ÁREA DE UN TRIÁNGULO CONOCIDOS SUS VÉRTICES

Halla el área encerrada en el triángulo cuyos vértices son:

$$A(-1, 1, 1) \quad B(3, 0, 2) \quad C(1, 2, 3)$$

PRIMERO. Calculamos dos vectores que tengan como origen uno de los puntos y extremos en los otros dos.

Tomamos, por ejemplo, como origen A y extremos B y C :

$$\overrightarrow{AB} = (4, -1, 1) \quad \overrightarrow{AC} = (2, 1, 2)$$

SEGUNDO. Hallamos el producto vectorial de los dos vectores.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 6\vec{j} + 6\vec{k} = (-3, -6, 6)$$

TERCERO. Determinamos el módulo del producto vectorial (área del paralelogramo), y calculamos el área del triángulo dividiendo este módulo por 2.

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |(-3, -6, 6)| = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2 + 6^2} = \sqrt{81} = 9$$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{9}{2}$$

CALCULAR EL VOLUMEN DE UN TETRAEDRO CONOCIDOS SUS VÉRTICES

Halla el volumen del tetraedro cuyos vértices son:

$$A(-1, 2, 1) \quad B(3, 0, 2) \quad C(1, 2, 3) \quad D(-1, 0, 1)$$

PRIMERO. Calculamos tres vectores que tengan origen en uno de los puntos y extremo en los otros tres.

Tomamos, por ejemplo, como origen A y extremos B , C y D :

$$\overrightarrow{AB} = (4, -2, 1) \quad \overrightarrow{AC} = (2, 0, 2) \quad \overrightarrow{AD} = (0, -2, 0)$$

SEGUNDO. Hallamos el producto mixto de los tres vectores.

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 + 16 = 12$$

TERCERO. Aplicamos la fórmula para el cálculo del volumen del tetraedro.

$$\text{Volumen} = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

Considera los puntos:

$$A(1, 2, 3)$$

$$B(2, -3, 1)$$

$$C(0, -2, -1)$$

$$D(-1, 0, 2)$$

Se pide:

- Determinar el área del triángulo ABC .
- Determinar el valor de m para que el punto $E(m, -4, 0)$ esté alineado con los puntos A y D .

- a) IDEA CLAVE.** El área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo determinado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

Calculamos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = (1, -5, -2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-1, -4, -4)$$

Calculamos su producto vectorial.

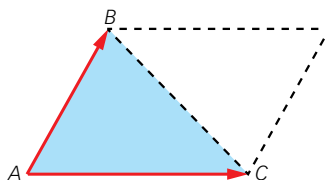
$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -5 & -2 \\ -1 & -4 & -4 \end{vmatrix} = 12\vec{i} + 6\vec{j} - 9\vec{k} = (12, 6, -9)$$

El módulo de este vector es el área del paralelogramo de lados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |(12, 6, -9)| = \sqrt{261} = 16,16$$

El área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo.

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = 8,08$$



Hay que tomar el mismo origen para los dos vectores.

- b) IDEA CLAVE.** Tres puntos, A , B y C , están alineados si los vectores que definen, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, son dependientes.

Calculamos $\overrightarrow{EA}$ y $\overrightarrow{ED}$.

$$\overrightarrow{EA} = (1 - m, 6, 3)$$

$$\overrightarrow{ED} = (-1 - m, 4, 2)$$

Para que los vectores sean dependientes, el rango de la matriz de sus coordenadas debe ser 1.

$$\text{Si } \text{Rango} \begin{pmatrix} 1-m & 6 & 3 \\ -1-m & 4 & 2 \end{pmatrix} = 1 \rightarrow \begin{vmatrix} 1-m & 6 \\ -1-m & 4 \end{vmatrix} = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1-m & 3 \\ -1-m & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-m & 6 \\ -1-m & 4 \end{vmatrix} = 2m + 10 = 0 \rightarrow m = -5$$

$$\begin{vmatrix} 1-m & 3 \\ -1-m & 2 \end{vmatrix} = m + 5 = 0 \rightarrow m = -5$$

Para que los tres puntos estén alineados es necesario que $m = -5$.

Dos vectores son dependientes si el rango de la matriz que determinan es 1.

HAZLO TÚ

1. Determina el valor de m para que el punto $M(m, m^2, 1)$ sea el punto medio del segmento AB , donde $A(-3, 1, -2)$ y $B(1, 1, 4)$.

2. Dados los vectores:

$$\vec{u} = (-1, 0, 2)$$

$$\vec{v} = (1, 1, 0)$$

$$\vec{w} = (0, -2, 4)$$

Se pide:

- Demostrar que los vectores son base del espacio tridimensional.
- Determinar en esa base las coordenadas del vector $-2\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w} - \vec{u}$.
- Expresar el vector $\vec{x} = (5, 4, -6)$ como combinación lineal de los vectores de la base anterior.

3. Dados los vectores:

$$\vec{u} = (3, -1, -1)$$

$$\vec{v} = (-m, m^2 + 1, m + 2)$$

Se pide:

- Para $m = -1$, encontrar un vector $\vec{w}$ para que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ formen base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.
- Para $m = -1$, ayudándote del apartado anterior, determinar una base ortonormal del espacio $\mathbb{R}^3$.

4. Determina el valor de k para el que los vectores:

$$\vec{u} = (-1, 3, 5)$$

$$\vec{v} = (2, 2, -1)$$

$$\vec{w} = (0, k - 2, k)$$

no forman base del espacio tridimensional.

5. Dados los puntos:

$$A(1, -1, 3)$$

$$B(2, 0, -1)$$

$$C(0, -3, 1)$$

Se pide:

- Determinar las coordenadas del vértice D del paralelogramo $ABCD$.
 - Determinar el área del paralelogramo $ABCD$ obtenido.
 - Calcular el área del triángulo BCD .
6. Determina el valor de m para el que el vector $\vec{w} = \left(1, \frac{m}{3}, -2\right)$ es dependiente del producto vectorial de los vectores $\vec{u} = (2, 0, 1)$ y $\vec{v} = (-1, 3, 0)$.
7. Considera el vector $\vec{u} = (5, -1, 3)$. Comprueba que $[\vec{u}, \vec{v}, 3\vec{u} - \vec{v}] = 0$ para cualquier vector $\vec{v}$. Razona el porqué.
8. Determina la altura del paralelepípedo generado por los vectores:

$$\vec{u} = (1, -2, -2)$$

$$\vec{v} = (0, 1, -1)$$

$$\vec{w} = (-3, 2, -1)$$

¿Cuál es su área?



Ecuaciones de la recta

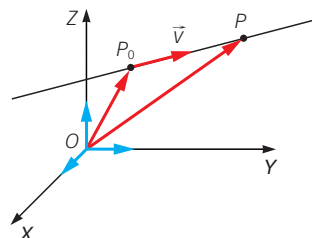
Ecuación vectorial

$$OP = OP_0 + t\vec{v}, \text{ donde } \begin{cases} P(x, y, z) & \text{Un punto de la recta} \\ \overrightarrow{OP_0} = (x_0, y_0, z_0) & \text{Vector de posición del punto } P_0 \\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) & \text{Vector director de la recta} \\ t & \text{Cualquier número real} \end{cases}$$

Expresándolo en coordenadas: $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3)$

Ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \\ z = z_0 + tv_3 \end{cases}, \text{ siendo } t \text{ un número real.}$$



Ecuación continua

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

Ecuación implícita (intersección de dos planos)

$$\begin{cases} v_2x - v_1y + (v_1y_0 - v_2x_0) = 0 \\ v_3x - v_1z + (v_1z_0 - v_3x_0) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Ecuaciones del plano

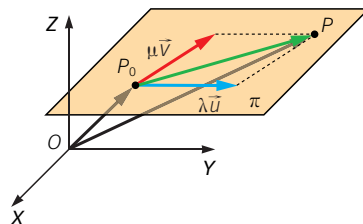
Ecuación vectorial

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \rightarrow \begin{cases} P(x, y, z) & \text{Un punto del plano} \\ \overrightarrow{OP_0} = (x_0, y_0, z_0) & \text{Vector de posición} \\ \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) & \text{Vectores directores del plano} \\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) & \text{Vectores directores del plano} \\ \lambda, \mu & \text{Dos números reales} \end{cases}$$

En coordenadas: $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \cdot (u_1, u_2, u_3) + \mu \cdot (v_1, v_2, v_3)$

Ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}, \text{ siendo } \lambda \text{ y } \mu \text{ números reales.}$$

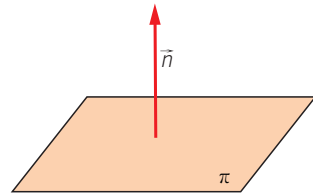


Ecuación general o implícita

$Ax + By + Cz + D = 0$, donde A, B, C y D son números reales.

Vector normal a un plano

Dado el plano $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$, el vector $\vec{n} = (A, B, C)$ es un vector perpendicular al plano π . A este vector se le llama **vector normal** del plano.



Vector director de una recta expresada por dos planos

$$\left. \begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \quad \left. \begin{aligned} A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2) \rightarrow \vec{v}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

Posiciones relativas de dos rectas

$$r: \begin{cases} P(a, b, c) \\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \end{cases} \quad s: \begin{cases} Q(a', b', c') \\ \vec{v}' = (v'_1, v'_2, v'_3) \end{cases}$$

Estas rectas en el espacio pueden ser:

Coincidentes

Las dos rectas son la misma.

Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{v}'$ y el vector $\overrightarrow{PQ}$ son proporcionales.

$$\text{Rango} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v'_1 & v'_2 & v'_3 \\ a' - a & b' - b & c' - c \end{pmatrix} = 1$$



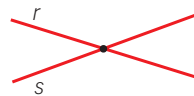
Secantes

Las dos rectas se cortan en un solo punto.

Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{v}'$ no son proporcionales y el vector $\overrightarrow{PQ}$ es combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{v}'$.

$$\text{Rango} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v'_1 & v'_2 & v'_3 \end{pmatrix} = 2$$

$$\text{Rango} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v'_1 & v'_2 & v'_3 \\ a' - a & b' - b & c' - c \end{pmatrix} = 2$$



Paralelas

Las dos rectas no tienen puntos comunes, pero están en el mismo plano.

Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{v}'$ son proporcionales, pero no son proporcionales a $\overrightarrow{PQ}$.

$$\text{Rango} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v'_1 & v'_2 & v'_3 \end{pmatrix} = 1$$

$$\text{Rango} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v'_1 & v'_2 & v'_3 \\ a' - a & b' - b & c' - c \end{pmatrix} = 2$$

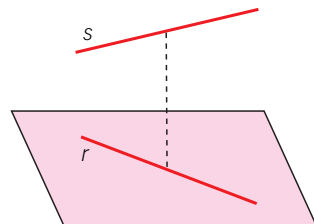


Rectas que se cruzan

Las dos rectas no tienen puntos comunes ni están en el mismo plano.

Los vectores $\vec{v}$, $\vec{v}'$ y $\overrightarrow{PQ}$ forman una base.

$$\text{Rango} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v'_1 & v'_2 & v'_3 \\ a' - a & b' - b & c' - c \end{pmatrix} = 3$$





Posiciones relativas de recta y plano

$$r: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A'_1x + B'_1y + C'_1z + D'_1 = 0 \end{cases} \quad \pi: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

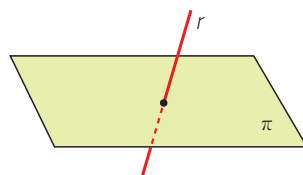
$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A'_1 & B'_1 & C'_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A'_1 & B'_1 & C'_1 & D'_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

Secantes

La recta y el plano se cortan en un punto.

El sistema es compatible determinado.

$$\text{Rango}(M) = 3 \quad \text{Rango}(M^*) = 3$$

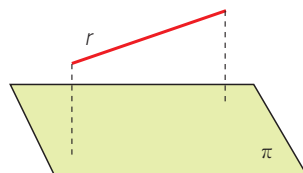


Paralelos

La recta y el plano no se cortan.

El sistema es incompatible.

$$\text{Rango}(M) = 2 \quad \text{Rango}(M^*) = 3$$

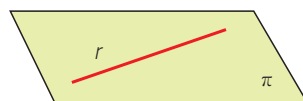


Recta contenida en el plano

La recta está contenida en el plano.

El sistema es compatible indeterminado.

$$\text{Rango}(M) = 2 \quad \text{Rango}(M^*) = 2$$



Posiciones relativas de dos planos

$$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

Coincidentes

La intersección es todo el plano.

El sistema es compatible indeterminado.

$$\text{Rango}(M) = 1 \quad \text{Rango}(M^*) = 1$$

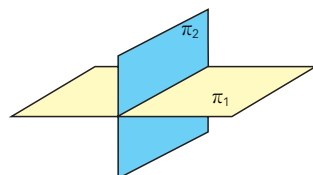


Secantes

La intersección de los planos es una recta.

El sistema es compatible indeterminado.

$$\text{Rango}(M) = 2 \quad \text{Rango}(M^*) = 2$$

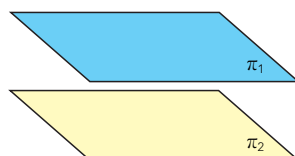


Paralelos

Los dos planos no tienen puntos en común.

El sistema es incompatible.

$$\text{Rango}(M) = 1 \quad \text{Rango}(M^*) = 2$$



Posiciones relativas de tres planos

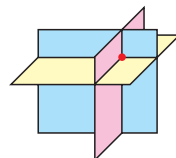
$$\begin{aligned} \pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ \pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \rightarrow M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{array} \right) \\ \pi_3: A_3x + B_3y + C_3z + D_3 &= 0 \end{aligned}$$

M

Se cortan en un punto

El sistema es compatible determinado.

$$\text{Rango}(M) = 3 \quad \text{Rango}(M^*) = 3$$

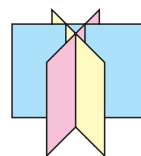


Se cortan dos a dos

Ninguno de los planos es paralelo a otro.

El sistema es incompatible.

$$\text{Rango}(M) = 2 \quad \text{Rango}(M^*) = 3$$

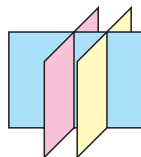


Dos planos paralelos cortan al tercero

Dos de los planos son paralelos.

El sistema es incompatible.

$$\text{Rango}(M) = 2 \quad \text{Rango}(M^*) = 3$$

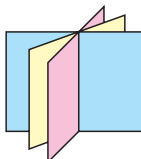


No coincidentes y se cortan en una recta

El sistema es compatible indeterminado.

No hay ecuaciones proporcionales.

$$\text{Rango}(M) = 2 \quad \text{Rango}(M^*) = 2$$

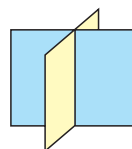


Dos planos coincidentes cortan al tercero

El sistema es compatible indeterminado.

Dos de las ecuaciones son proporcionales.

$$\text{Rango}(M) = 2 \quad \text{Rango}(M^*) = 2$$

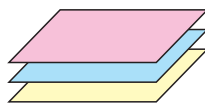


Tres planos paralelos

El sistema es incompatible.

Ninguna de las ecuaciones es proporcional.

$$\text{Rango}(M) = 1 \quad \text{Rango}(M^*) = 2$$

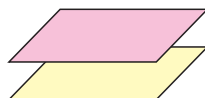


Dos planos coincidentes y paralelos al tercero

El sistema es incompatible.

Dos ecuaciones son proporcionales y la otra no.

$$\text{Rango}(M) = 1 \quad \text{Rango}(M^*) = 2$$

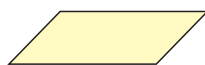


Tres planos coincidentes

El sistema es compatible indeterminado.

Sus ecuaciones son proporcionales.

$$\text{Rango}(M) = 1 \quad \text{Rango}(M^*) = 1$$



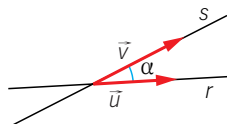


Ángulos

Ángulo entre dos rectas

El **ángulo que forman dos rectas**, r y s , es el menor ángulo que se puede formar entre sus vectores directores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Se calcula como:

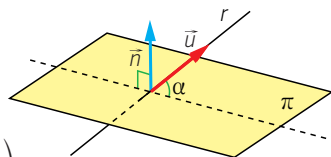
$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \rightarrow \alpha = \arccos \left(\frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \right)$$



Ángulo entre una recta y un plano

El **ángulo que forman una recta r y un plano π** es el complementario del menor ángulo formado por el vector director de la recta $\vec{u}$ y el vector normal al plano $\vec{n}$. Se calcula como:

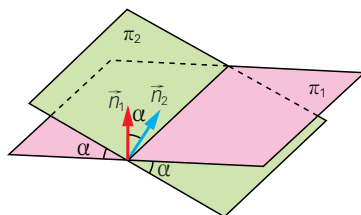
$$\cos (90^\circ - \alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} \rightarrow \alpha = 90^\circ - \arccos \left(\frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} \right)$$



Ángulo entre dos planos

El **ángulo que forman dos planos**, π_1 y π_2 , es el menor ángulo que se forma entre sus respectivos vectores normales, $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$. Se calcula como:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \rightarrow \alpha = \arccos \left(\frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \right)$$



Distancias

Distancia entre dos puntos

La **distancia entre dos puntos** $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$ en el espacio es el módulo del vector que tiene por extremos dichos puntos.

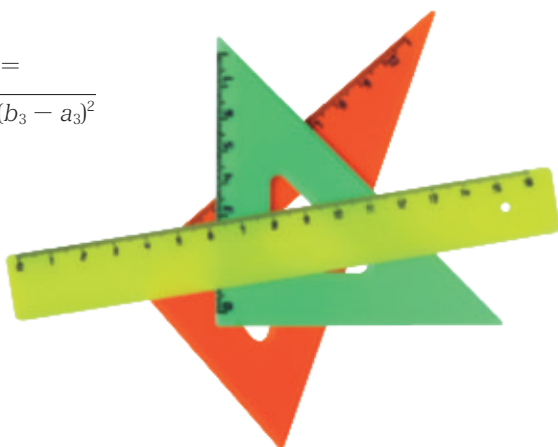
$$\begin{aligned} d(A, B) &= |\overrightarrow{AB}| \\ d(A, B) &= |(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)| = \\ &= \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2} \end{aligned}$$

Distancia de un punto a una recta

La **distancia de un punto P a una recta r** se puede calcular con la fórmula:

$$d(P, r) = \frac{|\vec{v}_r \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{v}_r|}$$

siendo $\vec{v}_r$ el vector director de la recta y A un punto cualquiera de la recta.



Distancia de un punto a un plano

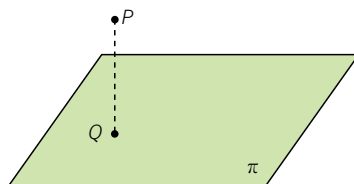
La **distancia de un punto P a un plano π** es la distancia entre el punto P y su proyección sobre el plano π .

Conocida la ecuación del plano:

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0$$

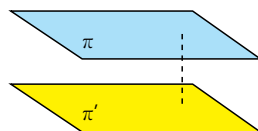
la distancia de un punto $P(x_1, y_1, z_1)$ al plano π se puede calcular mediante la expresión:

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



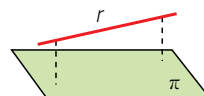
Distancia entre dos planos

- Si los planos son coincidentes o se cortan, la distancia es cero.
- Si los planos son paralelos, la distancia entre ambos es igual a la distancia entre cualquier punto P de uno de los planos al otro.



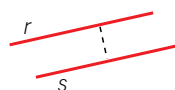
Distancia entre una recta y un plano

- Si la recta y el plano tienen algún punto en común, la distancia es cero.
- Si la recta y el plano son paralelos, la distancia entre ambos es igual a la distancia entre cualquier punto P de la recta al plano π .



Distancia entre rectas coincidentes, secantes o paralelas

- Si las rectas son secantes o son coincidentes, la distancia entre ambas rectas es cero.
- Si las rectas son paralelas, la distancia entre ellas es igual a la distancia entre cualquier punto de una a la otra.



Distancia entre dos rectas que se cruzan

La **distancia entre dos rectas, r y s** , que se cruzan se calcula con la fórmula:

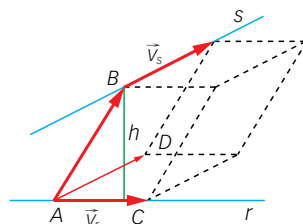
$$d(r, s) = \frac{|[\overline{AB}, \vec{v}_r, \vec{v}_s]|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|}$$

Siendo: $\vec{v}_r \rightarrow$ vector director de la recta r

$A \rightarrow$ punto de la recta r

$\vec{v}_s \rightarrow$ vector director de la recta s

$B \rightarrow$ punto de la recta s





HALLAR LA ECUACIÓN DE LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS

Halla la ecuación continua de la recta que pasa por los puntos $A(1, 1, 1)$ y $B(2, 0, 3)$.

PRIMERO. Calculamos el vector definido por los dos puntos.

$$\overrightarrow{AB} = (2 - 1, 0 - 1, 3 - 1) = (1, -1, 2) = \vec{v}$$

SEGUNDO. Escribimos la ecuación de la recta, conocidos un punto y el vector.

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3} \quad \frac{A(1, 1, 1)}{\vec{v} = (1, -1, 2)} \rightarrow \frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z - 1}{2} \rightarrow \text{Ecuación continua}$$

HALLAR LA ECUACIÓN DEL PLANO QUE PASA POR TRES PUNTOS

Calcula la ecuación general del plano que pasa por los puntos $A(1, -1, 0)$, $B(2, 0, 2)$ y $C(3, 0, 0)$.

PRIMERO. Calculamos dos vectores a partir de los tres puntos.

$$\overrightarrow{AB} = (1, 1, 2) \quad \overrightarrow{AC} = (2, 1, 0)$$

SEGUNDO. Desarrollamos el determinante que expresa su ecuación general e igualamos a cero.

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y + 1 & z \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4(y + 1) + z - 2z - 2(x - 1) \rightarrow 2x - 4y + z - 6 = 0$$

COMPROBAR SI VARIOS PUNTOS ESTÁN ALINEADOS

Determina si los puntos $A(2, 1, 0)$, $B(-1, 0, 2)$ y $C(5, 2, -2)$ están alineados.

PRIMERO. Definimos la ecuación de la recta que determinan dos de esos puntos.

$$\overrightarrow{AB} = (-1 - 2, 0 - 1, 2 - 0) = (-3, -1, 2)$$

$$A(2, 1, 0)$$

$$\text{Ecuación continua de } r \rightarrow \frac{x - 2}{-3} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z}{2}$$

SEGUNDO. Comprobamos si el resto de puntos pertenecen a esa recta.

$$\frac{x - 2}{-3} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z}{2} \quad \frac{C(5, 2, -2)}{\rightarrow} \frac{5 - 2}{-3} = \frac{2 - 1}{-1} = \frac{-2}{2} \rightarrow C \in r$$

Por tanto, los tres puntos están alineados.

COMPROBAR SI VARIOS PUNTOS SON COPLANARIOS

Determina si $A(2, 1, 0)$, $B(-1, 0, 2)$, $C(0, -2, -1)$ y $D(0, 3, -2)$ son coplanarios.

PRIMERO. Definimos la ecuación del plano que determinan tres de esos puntos.

$$\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-3, -1, 2) \\ \overrightarrow{AC} = (-2, -3, -1) \end{array} \quad \left| \begin{array}{ccc} x-2 & y-1 & z \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & -1 \end{array} \right| = 7x - 7y + 7z - 7 = 0$$

SEGUNDO. Comprobamos si el resto de puntos pertenecen al plano.

$$7x - 7y + 7z - 7 = 0 \xrightarrow{D(0, 3, -2)} 7 \cdot 0 - 7 \cdot 3 + 7 \cdot (-2) - 7 \neq 0 \rightarrow D \notin \pi$$

Los puntos A, B, C y D no son coplanarios.

CALCULAR UNA RECTA PERPENDICULAR A UN PLANO

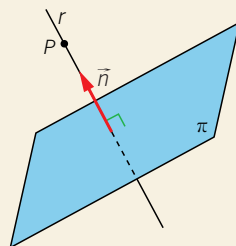
Halla la recta perpendicular al plano $\pi: 2x - 3y + z - 1 = 0$ que pasa por $P(0, 2, 0)$.

PRIMERO. Hallamos un vector normal al plano.

Un vector normal al plano π es $\vec{n} = (2, -3, 1)$.

SEGUNDO. Calculamos la ecuación de la recta que tiene por vector director el vector normal al plano y pasa por el punto pedido.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (2, -3, 1) \\ P(0, 2, 0) \end{array} \right\} \rightarrow r: \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{1}$$



CALCULAR UN PLANO PERPENDICULAR A UNA RECTA

Halla el plano perpendicular a la recta $r: \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{1}$ que contiene a $P(0, 2, 0)$.

PRIMERO. Hallamos un vector director de la recta.

Un vector director de la recta es $\vec{v} = (2, -3, 1)$.

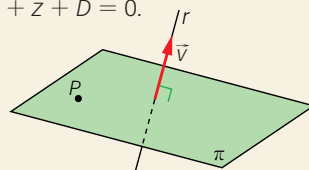
SEGUNDO. Calculamos la ecuación del plano que tiene por vector normal ese vector director.

$\vec{v} = (2, -3, 1) \rightarrow$ La ecuación del plano es de la forma $\pi: 2x - 3y + z + D = 0$.

TERCERO. Imponemos la condición de que el punto pertenezca al plano para calcular el valor de la constante D .

$$P(0, 2, 0) \rightarrow 2 \cdot 0 - 3 \cdot 2 + 0 + D = 0 \rightarrow D = 6$$

La ecuación del plano es: $\pi: 2x - 3y + z + 6 = 0$.





CALCULAR LA PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN PUNTO SOBRE UNA RECTA

Determina la proyección ortogonal de $P(0, 0, 0)$ sobre r : $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{-1}$.

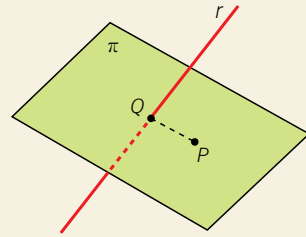
PRIMERO. Hallamos la ecuación del plano perpendicular a la recta que pasa por el punto.

Vector normal: $\vec{n} = (2, 1, -1)$
 Punto: $P(0, 0, 0)$ $\rightarrow 2(x-0) + 1(y-0) - 1(z-0) = 0 \rightarrow \pi: 2x + y - z = 0$

SEGUNDO. La proyección ortogonal es el punto de corte de la recta con el plano.

$$\left. \begin{aligned} \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{-1} \\ 2x + y - z = 0 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{Operando}} \begin{aligned} x - 2y &= -5 \\ x + 2z &= 1 \\ 2x + y - z &= 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \frac{-2}{3} \\ y = \frac{13}{6} \\ z = \frac{5}{6} \end{cases} \rightarrow Q\left(-\frac{2}{3}, \frac{13}{6}, \frac{5}{6}\right)$$



CALCULAR LA PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN PUNTO SOBRE UN PLANO

Determina la proyección ortogonal de $P(0, 0, 0)$ sobre π : $2x - 3y + z - 2 = 0$.

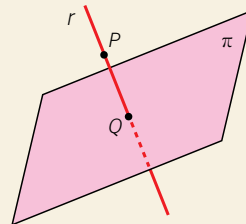
PRIMERO. Hallamos la ecuación de la recta perpendicular al plano que pasa por el punto.

Vector normal: $\vec{n} = (2, -3, 1)$
 Punto: $P(0, 0, 0)$ $\rightarrow r: \frac{x-0}{2} = \frac{y-0}{-3} = \frac{z-0}{1}$

SEGUNDO. La proyección ortogonal es el punto de corte del plano con la recta.

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{1} \\ 2x - 3y + z - 2 = 0 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{Operando}} \begin{aligned} 3x + 2y &= 0 \\ x - 2z &= 0 \\ 2x - 3y + z &= 2 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ y = \frac{-3}{7} \\ z = \frac{1}{7} \end{cases} \rightarrow Q\left(\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{1}{7}\right)$$



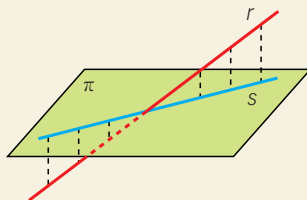
CALCULAR LA PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UNA RECTA SOBRE UN PLANO

Determina la proyección ortogonal de la recta:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{-1}$$

sobre el plano de ecuación $\pi: 2x - 3y + z - 2 = 0$.

PRIMERO. Hallamos el vector director de la recta, el vector normal al plano y un punto de la recta.



Vector director de r : $\vec{u} = (2, 1, -1)$

Vector normal a π : $\vec{n} = (2, -3, 1)$

Punto de r : $P(1, 3, 0)$

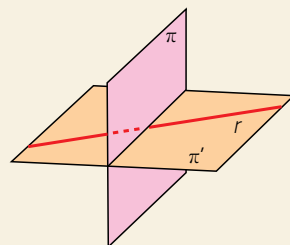
SEGUNDO. Calculamos el plano π' que pasa por el punto P y tiene como vectores directores el vector director de la recta y el vector normal al plano π .

$$\pi': \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi': -2(x-1) - 4(y-3) - 8z = 0$$

$$\pi': x + 2y + 4z - 7 = 0$$

El plano π' contiene a la recta r y es perpendicular al plano π .

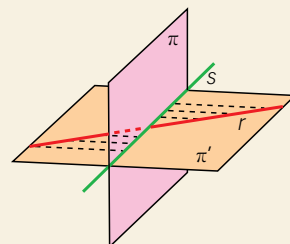


TERCERO. Hallamos el corte de los dos planos, π y π' , que es la recta s , proyección ortogonal de r sobre π .

$$s: \begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ x + 2y + 4z - 7 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Resolvemos}} \begin{cases} x = \frac{25}{7} - 2\lambda \\ y = \frac{12}{7} - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Luego la ecuación de la recta es:

$$s: \begin{cases} x = \frac{25}{7} - 2\lambda \\ y = \frac{12}{7} - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$





CALCULAR EL SIMÉTRICO DE UN PUNTO RESPECTO DE OTRO PUNTO

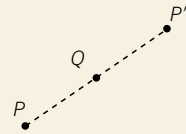
Halla el simétrico del punto $P(0, 2, -1)$ respecto del punto $Q(-1, 0, 2)$.

PRIMERO. Si el simétrico es $P'(a, b, c)$, hallamos el punto medio del segmento PP' .

$$P(0, 2, -1) \text{ y } P'(a, b, c) \rightarrow \text{Punto medio: } \left(\frac{a}{2}, \frac{2+b}{2}, \frac{-1+c}{2} \right)$$

SEGUNDO. Resolvemos el sistema que se forma al igualar el punto medio al punto Q .

$$(-1, 0, 2) = \left(\frac{a}{2}, \frac{2+b}{2}, \frac{-1+c}{2} \right) \rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -2 \\ c = 5 \end{cases} \rightarrow \text{El punto simétrico es } P'(-2, -2, 5).$$



CALCULAR EL SIMÉTRICO DE UN PUNTO RESPECTO DE UNA RECTA

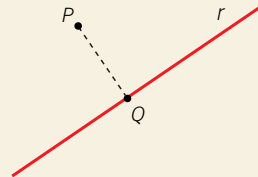
Halla el simétrico del punto $P(2, 1, 0)$ respecto de la recta $r: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$.

PRIMERO. Hallamos la proyección ortogonal, Q , del punto P sobre la recta r .

La ecuación del plano perpendicular es:

$$\begin{aligned} \text{Vector normal: } \vec{n} &= (1, 2, 1) \\ \text{Punto: } P(2, 1, 0) &\} \rightarrow \pi: x + 2y + z - 4 = 0 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1} \\ x + 2y + z - 4 = 0 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{Operando}} \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - z = -2 \\ x + 2y + z = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = \frac{7}{3} \end{cases} \rightarrow Q\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

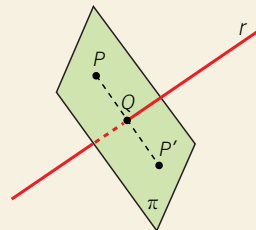


SEGUNDO. Calculamos el simétrico de P respecto de la proyección Q .

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{3} \right) = \left(\frac{2+a}{2}, \frac{1+b}{2}, \frac{c}{2} \right)$$

$$\text{Resolviendo: } a = -\frac{4}{3}, b = \frac{1}{3}, c = \frac{14}{3}$$

$$\text{El punto simétrico de } P \text{ respecto de } r \text{ es } P'\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{14}{3}\right).$$



CALCULAR EL SIMÉTRICO DE UN PUNTO RESPECTO DE UN PLANO

Halla el simétrico del punto $P(2, 1, 0)$ respecto del plano $\pi: 2x - 3y + z - 2 = 0$.

PRIMERO. Hallamos la proyección ortogonal, Q , del punto P sobre el plano π .

La ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto $P(2, 1, 0)$ es:

Vector normal: $\vec{n} = (2, -3, 1)$
 Punto: $P(2, 1, 0) \rightarrow r: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-0}{1}$

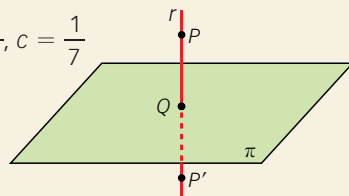
$$\left. \begin{aligned} \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z}{1} \\ 2x - 3y + z - 2 = 0 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{Operando}} \left. \begin{aligned} 3x + 2y = 8 \\ x - 2z = 2 \\ 2x - 3y + z = 2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{15}{7} \\ y = \frac{11}{14} \\ z = \frac{1}{14} \end{cases} \rightarrow Q\left(\frac{15}{7}, \frac{11}{14}, \frac{1}{14}\right)$$

SEGUNDO. Calculamos el simétrico de P respecto de la proyección Q .

$$\left(\frac{15}{7}, \frac{11}{14}, \frac{1}{14}\right) = \left(\frac{2+a}{2}, \frac{1+b}{2}, \frac{c}{2}\right) \rightarrow a = \frac{16}{7}, b = \frac{4}{7}, c = \frac{1}{7}$$

El punto simétrico del punto P respecto del plano π

es $P'\left(\frac{16}{7}, \frac{4}{7}, \frac{1}{7}\right)$.



CALCULAR EL PLANO DE SIMETRÍA DE DOS PUNTOS

Sean A y B los puntos del espacio, de coordenadas $A(3, 4, 1 + 2a)$ y $B(-3, 0, 1 - 2a)$. Se sabe que dichos puntos son simétricos respecto a un plano π . Halla de forma razonada la ecuación de dicho plano.

PRIMERO. Se hallan el punto medio del segmento AB y el vector $\overline{AB}$.

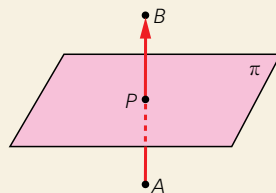
$$P\left(\frac{3-3}{2}, \frac{4+0}{2}, \frac{1+2a+1-2a}{2}\right) \rightarrow P(0, 2, 1)$$

$$\overline{AB} = (-3-3, 0-4, 1-2a-(1+2a)) = (-6, -4, -4a)$$

SEGUNDO. Se calcula la ecuación del plano que pasa por el punto P y cuyo vector normal es $\overline{AB}$.

La ecuación del plano es: $-6x - 4y - 4az + D = 0$

$$\left. \begin{aligned} P(0, 2, 1) \\ \overline{AB} = (-6, -4, -4a) \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} \pi: -6(x-0) - 4(y-2) - 4a(z-1) &= 0 \\ \pi: -6x - 4y - 4az + 4a + 8 &= 0 \end{aligned}$$



Dados la recta $r: \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi: 2x + y + mz - 3 = 0$:

- a) Estudiar la posición relativa de la recta r y el plano π según los valores del parámetro m .
 b) Hallar el punto de intersección de la recta r y el plano π en el caso de $m = 1$.

- a) **IDEA CLAVE.** Para estudiar la posición relativa, discutimos el sistema formado por las tres ecuaciones.

$$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \\ 2x + y + mz - 3 = 0 \end{cases}$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix} \quad |M| = 4 - m \quad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & m & -3 \end{pmatrix}$$

- Si $m \neq 4 \rightarrow \text{Rango}(M) = 3 = \text{Rango}(M^*)$

El sistema es compatible determinado. La recta y el plano se cortan en un punto.

- Si $m = 4 \rightarrow \text{Rango}(M) = 2$

$$\text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

El sistema tiene infinitas soluciones. La recta está contenida en el plano.

- b) **IDEA CLAVE.** Calcular un punto de corte equivale a resolver un sistema; en este caso, el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano.

$$\text{Para } m = 1, \text{ el sistema es: } \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \\ 2x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

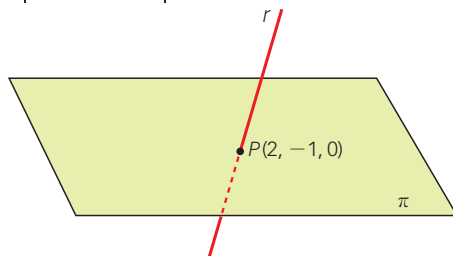
La solución del sistema es el punto de corte.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{6}{3} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{3} = -1$$

Luego el punto de corte es $P(2, -1, 0)$.

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{3} = 0$$



Para estudiar la posición relativa entre una recta y un plano, conviene escribir la recta como intersección de dos planos.

Como el rango de la matriz de coeficientes es 3, para resolver el sistema se puede aplicar la regla de Cramer.

HAZLO TÚ

1. Responde a estas cuestiones.

- a) ¿Están alineados los puntos $A(1, 0, -1)$, $B(-1, 1, 2)$ y $C(3, 0, 1)$? Justifica la respuesta.
 b) En caso afirmativo, determina la ecuación de la recta que los contiene. En caso negativo, determina la ecuación del plano que pasa por los tres puntos.

2. Encuentra las ecuaciones paramétricas de la recta: $r: \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$

¿Existe algún valor de s tal que el punto $(-3, s, s)$ pertenezca a la recta?

Razona la respuesta tanto en caso afirmativo como negativo.

3. Calcula la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano

$\pi: x + y - z + 6 = 0$ con la recta $s: \frac{x}{3} = y - 2 = z + 1$ y es paralela a la recta

$$r: \begin{cases} 3x + y - 4 = 0 \\ 4x - 3y + z - 1 = 0 \end{cases}.$$

4. Considera este plano y esta recta:

$$\pi: x + y + mz = 3$$

$$r: x = y - 1 = \frac{z - 2}{2}$$

- a) Halla m para que r y π sean paralelos.
 b) ¿Existe algún valor de m para que la recta r esté contenida en el plano π ?

5. Estudia la posición relativa de los planos:

$\pi: x + y + 2z = 2$ $\beta: 2x + my + 2mz = 2 + m$ $\alpha: mx + 2y + (2 + m)z = 0$
 según los valores de m .

6. Dadas las rectas:

$$r: \frac{x - 1}{-1} = \frac{y + 1}{1} = \frac{z - k}{1}$$

$$s: \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 3x + z = 1 \end{cases}$$

- a) Halla el valor de k para que las dos rectas estén contenidas en el mismo plano.
 b) Para el valor de k obtenido en el apartado anterior, determina la ecuación general del plano que las contiene.

7. Sean r la recta definida por $\frac{x - 2}{3} = \frac{y - k}{4} = \frac{z}{5}$ y s la recta definida

$$\text{por } \frac{x + 2}{-1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 3}{3}.$$

- a) Halla k sabiendo que las rectas r y s se cortan en un punto.
 b) Determina la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s .

8. Calcula el valor de a para que la recta:

$$r: \begin{cases} 5x - y + z = 0 \\ x - y - z = -4 \end{cases} \text{ sea paralela al plano } \pi: ax - 6y + 4z = 5.$$

Dadas las rectas en el espacio:

$$r: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$$

$$s: \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

a) Halla la distancia entre las dos rectas.

b) Determina la ecuación de la perpendicular común a r y s .

a) **IDEA CLAVE.** La distancia entre dos rectas depende de su posición relativa.

$$r: \begin{cases} P(2, 1, 0) \\ \vec{v}_r = (3, -2, 1) \end{cases} \quad s: \begin{cases} Q(-1, -2, 1) \\ \vec{v}_s = (2, -1, 2) \end{cases} \quad \overrightarrow{PQ} = (-3, -3, 1)$$

$$\text{Consideramos las matrices: } M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Estudiamos sus rangos:

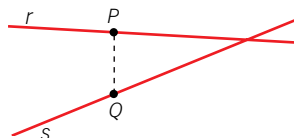
Rango (M) = 2 y Rango (N) = 3 $\rightarrow r$ y s se cruzan.

Aplicamos la fórmula para calcular la distancia entre dos rectas que se cruzan:

$$[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{PQ}] = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 22 \quad v_r \times v_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-3, -4, 1)$$

$$d(r, s) = \frac{|[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{PQ}]|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{22}{\sqrt{9+16+1}} = \frac{22}{\sqrt{26}} = \frac{11\sqrt{26}}{13}$$

Una representación gráfica de la situación ayuda a entender y resolver el problema.



b) **IDEA CLAVE.** La perpendicular común tiene como vector director el producto vectorial de los vectores directores de las rectas.

Determinamos el vector director de la perpendicular común t : $\vec{v}_t = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = (-3, -4, 1)$

Un punto genérico de r es: $P_r = (2 + 3\lambda, 1 - 2\lambda, \lambda)$

Un punto genérico de s es: $P_s = (-1 + 2\mu, -2 - \mu, 1 + 2\mu)$

$$\overrightarrow{P_r P_s} = (-3 + 2\mu - 3\lambda, -3 - \mu + 2\lambda, 1 + 2\mu - \lambda)$$

Se impone la condición de que los vectores $\vec{v}_t$ y $\overrightarrow{P_r P_s}$ son proporcionales:

$$k \cdot \vec{v}_t = \overrightarrow{P_r P_s} \rightarrow \begin{cases} k(-3) = -3 + 2\mu - 3\lambda \\ k(-4) = -3 - \mu + 2\lambda \\ k = 1 + 2\mu - \lambda \end{cases} \rightarrow k = \frac{11}{13}, \mu = -\frac{3}{13}, \lambda = -\frac{4}{13}$$

Por tanto, sustituyendo estos valores obtenemos los puntos de la perpendicular.

Para $\lambda = -\frac{4}{13}$, el punto de intersección con r es $P\left(\frac{14}{13}, \frac{21}{13}, \frac{-4}{13}\right)$ y la ecuación vectorial de la recta perpendicular es:

$$(x, y, z) = \left(\frac{14}{13}, \frac{21}{13}, \frac{-4}{13}\right) + \beta \cdot (-3, -4, 1)$$

HAZLO TÚ

- Define e interpreta el producto vectorial de vectores.
 - Calcula los vectores unitarios perpendiculares a $\vec{u} = (1, -2, 2)$ y $\vec{v} = (1, 0, 1)$.
 - Halla la distancia al origen del plano determinado por el punto $(1, 1, 1)$ y los vectores del apartado anterior.
- Halla el valor de a de forma que $A(1, 0, 1)$, $B(1, 1, 1)$ y $C(1, 6, a)$ sean los vértices de un triángulo de área $\frac{3}{2}$.

- Se consideran la recta $r: \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ y el punto $P(1, 2, -1)$.

- Halla la ecuación del plano que contiene a P y es perpendicular a r .
- Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano hallado y los ejes cartesianos.

- Dados los puntos:

$$A(1, 2, 0) \quad B(-1, 0, 0) \quad C(0, -2, 0) \quad D(0, 0, 1)$$

Se pide:

- Ecuación de la recta que contiene a B y C .
 - Área del triángulo ABC .
 - Volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D .
- Sea r la recta que pasa por $A(0, 0, 0)$ y $B(80, 10, 0)$ y sea s la recta que pasa por $C(0, 0, 10)$ y $D(m, 10, 10)$. Obtén la distancia entre las rectas r y s y justifica, geoméricamente, que la distancia es independiente del valor de m .
 - Calcula los valores de a para los cuales estas rectas son perpendiculares.

$$r: \begin{cases} 3x + ay - 6az + 1 = 0 \\ -x + y + 3z = 0 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 1 + a\lambda \end{cases}$$

- Para $a = 1$, calcula la recta que pasa por $(1, 1, 1)$ y se apoya en r y s .

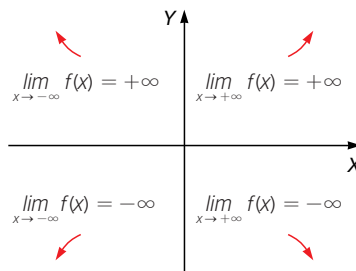
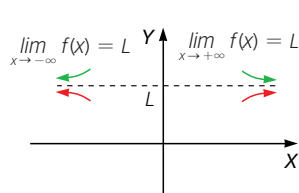
- ¿Cuál es la posición relativa de las rectas r_1 y r_2 siguientes?

$$r_1: \begin{cases} x = 0 \\ y = 2z \end{cases} \quad r_2: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

- ¿Es posible encontrar un plano que sea perpendicular a la recta r_1 y que, además, contenga la recta r_2 ? Justifica tu respuesta.
- Calcula la ecuación general del plano π que contiene a las dos rectas r_1 y r_2 .
- Calcula la ecuación paramétrica de una recta r_3 perpendicular al plano π y tal que: distancia $(r_1, r_3) = \text{distancia}(r_2, r_3) = \sqrt{105}$.



Límite de una función en el infinito



Operaciones con límites

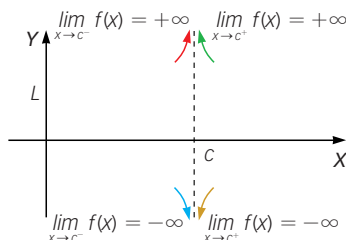
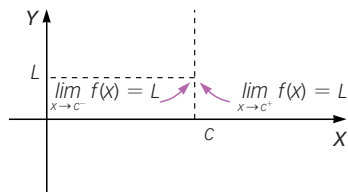
Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones y existen sus límites, se cumple que:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)}$, siempre que $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \neq 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[p]{f(x)} = \sqrt[p]{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)}$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x))^p = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)\right)^p$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a f(x) = \log_a \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)\right)^{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)}$, si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq 0$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \neq 0$

Límite de una función en un punto

El **límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a un punto c** es un número real L , y lo escribimos como $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$, si:

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$$



Continuidad de una función en un punto

Una **función** $f(x)$ es **continua en un punto** $x = x_0$ si se cumple que:

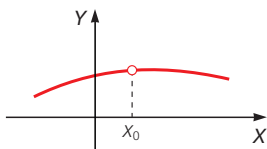
$$1.^{\circ} \text{ Existe } f(x_0). \quad 2.^{\circ} \text{ Existe } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x). \quad 3.^{\circ} f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Si una función no es continua en un punto, decimos que la función presenta una **discontinuidad** en ese punto.

Tipos de discontinuidad

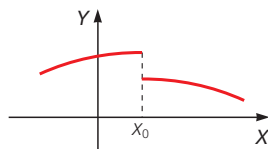
■ Discontinuidad evitable

$$f(x_0) \neq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$



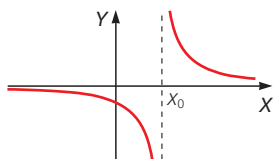
■ Discontinuidad de salto finito

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$



■ Discontinuidad de salto infinito

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$



Teorema de Bolzano

Si una función $f(x)$ es continua en un intervalo $[a, b]$ y el signo de $f(a)$ es distinto del signo de $f(b)$, entonces existe al menos un número $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Teorema de los valores intermedios

Si $f(a) < m < f(b)$, existe un número $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = m$.





Indeterminaciones

Sumas

Un número más infinito	Infinito más infinito
$k + (+\infty) = +\infty$ $k + (-\infty) = -\infty$	$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$ $(+\infty) + (-\infty) \rightarrow$ Indeterminación del tipo $\infty - \infty$ $(-\infty) + (+\infty) \rightarrow$ Indeterminación del tipo $\infty - \infty$

Restas

Un número menos infinito	Infinito menos infinito
$k - (+\infty) = -\infty$ $k - (-\infty) = +\infty$	$(+\infty) - (-\infty) = +\infty$ $(-\infty) - (+\infty) = -\infty$ $(+\infty) - (+\infty) \rightarrow$ Indeterminación del tipo $\infty - \infty$ $(-\infty) - (-\infty) \rightarrow$ Indeterminación del tipo $\infty - \infty$

Productos

Infinito por un número $k \neq 0$	Infinito por infinito	Infinito por cero
$k \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{si } k > 0 \\ -\infty & \text{si } k < 0 \end{cases}$ $k \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty & \text{si } k > 0 \\ +\infty & \text{si } k < 0 \end{cases}$	$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$ $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$ $(-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$ $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$	$0 \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot 0$ $0 \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot 0$ Indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$

Cocientes

Infinito entre un número $k \neq 0$	Un número $k \neq 0$ entre infinito	Infinito entre infinito	
$\frac{+\infty}{k} = \begin{cases} +\infty & \text{si } k > 0 \\ -\infty & \text{si } k < 0 \end{cases}$ $\frac{-\infty}{k} = \begin{cases} -\infty & \text{si } k > 0 \\ +\infty & \text{si } k < 0 \end{cases}$	$\frac{k}{+\infty} = 0$ $\frac{k}{-\infty} = 0$	$\frac{+\infty}{+\infty}$ $\frac{+\infty}{-\infty}$ $\frac{-\infty}{+\infty}$ $\frac{-\infty}{-\infty}$	$\frac{+\infty}{-\infty}$ $\frac{-\infty}{+\infty}$ Indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$
Un número $k \neq 0$ y cero	Cero entre cero	Infinito y cero	Cero entre infinito
$\frac{k}{0} = \infty$ $\frac{0}{k} = 0$	$\frac{0}{0} \rightarrow$ Indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$	$\frac{+\infty}{0} = \infty$ $\frac{-\infty}{0} = \infty$	$\frac{0}{+\infty} = 0$ $\frac{0}{-\infty} = 0$

Potencias

Un número $k \neq 0$ elevado a cero	Cero elevado a un número $k \neq 0$	Cero elevado a cero
$k^0 = 1$	$0^k = \begin{cases} 0 & \text{si } k > 0 \\ \infty & \text{si } k < 0 \end{cases}$	$0^0 \rightarrow$ Indeterminación del tipo 0^0
Un número elevado a infinito		Infinito elevado a un número $k \neq 0$
$k^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{si } k > 1 \\ \text{Indeterminación } 1^\infty & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } -1 < k < 1 \\ \text{No existe} & \text{si } k \leq -1 \end{cases}$ $k^{-\infty} = \frac{1}{k^{+\infty}} = \begin{cases} 0 & \text{si } k > 1 \\ \text{Indeterminación } 1^\infty & \text{si } k = 1 \\ +\infty & \text{si } 0 < k < 1 \\ \text{No existe} & \text{si } -1 \leq k \leq 0 \\ 0 & \text{si } k < -1 \end{cases}$		$(+\infty)^k = \begin{cases} +\infty & \text{si } k > 0 \\ 0 & \text{si } k < 0 \end{cases}$ $(-\infty)^k = \begin{cases} +\infty & \text{si } k > 0 \text{ y } k \text{ par} \\ -\infty & \text{si } k > 0 \text{ y } k \text{ impar} \\ 0 & \text{si } k < 0 \end{cases}$
Infinito elevado a infinito		Cero elevado a infinito
$(+\infty)^{(+\infty)} = +\infty$ $(-\infty)^{(+\infty)} \rightarrow$ No existe $(+\infty)^{(-\infty)} = 0$		$0^{(+\infty)} = 0$ $0^{(-\infty)} = \infty$
		Infinito elevado a cero
		$(+\infty)^0 \rightarrow$ Indeterminación del tipo ∞^0 $(-\infty)^0 \rightarrow$ Indeterminación del tipo ∞^0

Raíces

Raíz k -ésima de infinito	
$\sqrt[k]{+\infty} = \pm\infty$	$\sqrt[k]{-\infty} = \begin{cases} -\infty & \text{si } k \text{ impar} \\ \text{No existe} & \text{si } k \text{ par} \end{cases}$

Regla de L'Hôpital

Sean f y g dos funciones derivables en un intervalo $(x_0 - h, x_0 + h)$.

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ y existe $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces también existe $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ y su valor es:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$



DETERMINAR SI UNA FUNCIÓN ES CONTINUA EN UN PUNTO

Comprueba si la función $f(x) = \frac{x+5}{x-1}$ es continua en $x = 0$ y $x = 1$.

PRIMERO. Calculamos, si existe, $f(x_0)$. Si no existe, no es continua en ese punto.

$$f(0) = \frac{0+5}{0-1} = -5 \rightarrow \text{Existe } f(0). \quad f(1) = \frac{1+5}{1-1} = \infty \rightarrow \text{No existe } f(1). \\ \text{No es continua en } x = 1.$$

SEGUNDO. Calculamos $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Si no existe, no es continua en ese punto.

$$\text{En } x = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+5}{x-1} = \frac{0+5}{0-1} = -5 \rightarrow \text{Existe límite.}$$

TERCERO. Si existen $f(x_0)$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, comprobamos si son iguales.

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -5 \quad \text{La función es continua en } x = 0.$$

ESTUDIAR LA CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN DEFINIDA A TROZOS

Estudia la continuidad de esta función: $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x^2+x} & \text{si } x \leq 3 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x > 3 \end{cases}$

PRIMERO. Estudiamos la continuidad de las distintas funciones en el intervalo en el que están definidas.

■ Si $x < 3 \rightarrow f(x) = \frac{x+1}{x^2+x}$

No está definida cuando el denominador se anula: $x^2 + x = 0 \rightarrow x = -1, x = 0$.

La función no es continua en $x = -1$ y $x = 0$.

■ Si $x > 3 \rightarrow f(x) = \sqrt{x+1}$

No está definida cuando el radicando es negativo: $x + 1 < 0 \rightarrow x < -1$.

Como $x > 3$, $f(x)$ es continua en $(3, +\infty)$.

SEGUNDO. Estudiamos la continuidad en los puntos en los que la función pasa de una expresión algebraica a otra.

$$\text{Para } x = 3 \rightarrow f(3) = \frac{3+1}{3^2+3} = \frac{1}{3} \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+1}{x^2+x} = \frac{3+1}{3^2+3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x+1} = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \rightarrow f(x) \text{ no es continua en } x = 3.$$

DETERMINAR SI UNA FUNCIÓN SE ANULA EN UN PUNTO

Estudia si la función $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{e^x} + \frac{\cos x}{x-1}$ se anula en algún punto del intervalo $(4, 6)$.

PRIMERO. Estudiamos la continuidad de la función en el intervalo cerrado.

$$\frac{\sqrt{x+1}}{e^x} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} \text{ está definida en } [4, 6]. \\ e^x \text{ no se anula en } [4, 6]. \end{cases} \rightarrow \text{Es continua en } [4, 6].$$

$$\frac{\cos x}{x-1} \rightarrow \begin{cases} \cos x \text{ está definida en } [4, 6]. \\ x-1 \text{ no se anula en } [4, 6]. \end{cases} \rightarrow \text{Es continua en } [4, 6].$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{e^x} + \frac{\cos x}{x-1} \rightarrow \begin{array}{l} \text{Es suma de funciones continuas en } [4, 6]. \\ \text{Es continua en } [4, 6]. \end{array}$$

SEGUNDO. Estudiamos el signo de $f(a)$ y $f(b)$.

$$f(4) = \frac{\sqrt{4+1}}{e^4} + \frac{\cos 4}{4-1} = -0,177 < 0 \qquad f(6) = \frac{\sqrt{6+1}}{e^6} + \frac{\cos 6}{6-1} = 0,199 > 0$$

TERCERO. Si se cumplen las condiciones, aplicamos el teorema de Bolzano.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \text{ continua en } [4, 6] \\ f(4) < 0 \text{ y } f(6) > 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Bolzano}} \text{Existe } c \in (4, 6) \text{ tal que } f(c) = 0.$$

Es decir, la función se anula al menos en un punto del intervalo.

APLICAR EL TEOREMA DE LOS VALORES INTERMEDIOS A UNA FUNCIÓN

Dada la función $f(x) = (1 - x^2)\cos \pi x$, demuestra que existe $c \in (1, 2)$ tal que $f(c) = -2$.

PRIMERO. Comprobamos que la función es continua en el intervalo.

$$f(x) = (1 - x^2)\cos \pi x \rightarrow \text{Composición de una función polinómica y otra trigonométrica. Continuas en todo } \mathbb{R}.$$

SEGUNDO. Calculamos el valor de la función en los extremos del intervalo.

$$f(1) = (1 - 1^2)\cos (\pi \cdot 1) = 0 \cdot (-1) = 0$$

$$f(2) = (1 - 2^2)\cos (\pi \cdot 2) = (-3)\cos 2\pi = -3$$

TERCERO. Aplicamos el teorema de los valores intermedios.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \text{ continua } [1, 2] \\ f(2) < -2 < f(1) \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{intermedios}]{\text{Valores}} \text{Existe un número } c \in (1, 2) \text{ tal que } f(c) = -2.$$

RESOLVER LÍMITES CON INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$

Calcula estos límites: a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2 3x}{3x^2}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^3 - 2x}$

PRIMERO. Comprobamos si el límite presenta una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2 3x}{3x^2} \rightarrow \frac{0}{0} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^3 - 2x} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$$

SEGUNDO. Aplicamos la regla de L'Hôpital y resolvemos el límite si no hay indeterminación.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2 3x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\text{sen}} 3x \cdot \cos 3x}{\cancel{3}x} \rightarrow \frac{0}{0}$$

L'Hôpital

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^3 - 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{3x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3x^3 - 2x} = 0$$

L'Hôpital

TERCERO. Si obtenemos una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, aplicamos de nuevo L'Hôpital.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2 3x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\text{sen}} 3x \cdot \cos 3x}{\cancel{3}x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\cos^2 3x - 3\text{sen}^2 3x}{1} = 3$$

L'Hôpital L'Hôpital

RESOLVER LÍMITES CON INDETERMINACIÓN DEL TIPO $0 \cdot \infty$

Calcula este límite: $\lim_{x \rightarrow 2} [(x - 2) \ln (x - 2)]$

PRIMERO. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x))$ presenta la indeterminación $0 \cdot \infty$, lo escribimos como $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ para obtener la indeterminación $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} [(x - 2) \ln (x - 2)] \rightarrow 0 \cdot \infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} [(x - 2) \ln (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln (x - 2)}{\frac{1}{x - 2}} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$$

SEGUNDO. Aplicamos la regla de L'Hôpital a esta expresión.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln (x - 2)}{\frac{1}{x - 2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x - 2)^2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (-x + 2) = 0$$

L'Hôpital

RESOLVER LÍMITES CON INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\infty - \infty$

Calcula este límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} \right)$

PRIMERO. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x))$ presenta una indeterminación del tipo $\infty - \infty$, lo escribimos

como $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}}$ para obtener la indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} \right) &\rightarrow \infty - \infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cancel{\operatorname{sen} x}} - \frac{1}{\cancel{1/x}}}{\frac{1}{\cancel{x \operatorname{sen} x}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x \operatorname{sen} x} \rightarrow \frac{0}{0} \end{aligned}$$

SEGUNDO. Aplicamos la regla de L'Hôpital a esta expresión.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x \operatorname{sen} x} &\rightarrow \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x + x \cos x} \rightarrow \frac{0}{0} \\ &\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos x - x \operatorname{sen} x} = \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

RESOLVER LÍMITES CON INDETERMINACIÓN DEL TIPO 1^∞ , ∞^0 y 0^0

Calcula este límite: $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\operatorname{sen} x}$

PRIMERO. Si presenta una indeterminación del tipo 1^∞ , ∞^0 o 0^0 tomamos logaritmos neperianos.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{\operatorname{sen} x} \rightarrow 0^0 \rightarrow \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} x^{\operatorname{sen} x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{sen} x \cdot \ln x) \rightarrow 0 \cdot \infty$$

SEGUNDO. Realizamos las transformaciones necesarias y aplicamos la regla de L'Hôpital.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{sen} x \cdot \ln x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} \rightarrow \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{-x \cos x} \rightarrow \frac{0}{0} \\ &\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x}{-\cos x + x \operatorname{sen} x} = 0 \end{aligned}$$

TERCERO. Determinamos el límite inicial aplicando las propiedades de los logaritmos.

$$\ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} x^{\operatorname{sen} x} \right) = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x^{\operatorname{sen} x} = e^0 = 1$$

Dada la función $f(x) = \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6}$, se pide:

- Encontrar los puntos de discontinuidad de f .
- Determinar, razonadamente, si alguna de las discontinuidades es evitable.

a) IDEA CLAVE. Los puntos de discontinuidad de una función racional coinciden con los valores en los que se anula su denominador.

Determinamos los puntos que anulan el denominador:

$$1 - x^6 = 0 \rightarrow x^6 = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$f(x)$ no es continua en $x = 1$, porque no existe $f(1)$.

$f(x)$ no es continua en $x = -1$, porque no existe $f(-1)$.

HACIA LA UNIVERSIDAD

b) IDEA CLAVE. En los casos en los que no existe $f(a)$, el tipo de discontinuidad depende de la existencia o no del límite de la función en ese punto.

■ Para $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} \rightarrow \frac{0}{0}$$

Factorizamos el polinomio del numerador y del denominador para resolver la indeterminación:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 \cancel{(x-1)} (-x^2 - x - 1)}{\cancel{(x-1)} (x+1) (-x^4 - x^2 - 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 (-x^2 - x - 1)}{(x+1) (-x^4 - x^2 - 1)} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por tanto, no existe $f(1)$, pero sí existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

La discontinuidad es evitable.

Y la discontinuidad podría evitarse definiendo $f(1) = \frac{1}{2}$.

■ Para $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} = \frac{(-1)^5 - (-1)^8}{1 - (-1)^6} = \frac{-2}{0} = \infty$$

Calculamos los límites laterales:

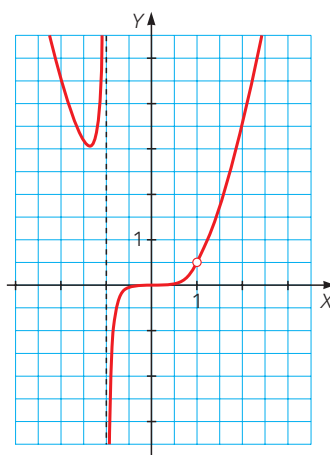
$$\text{Si } x > -1 \rightarrow \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} < 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} = -\infty$$

$$\text{Si } x < -1 \rightarrow \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} > 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} = +\infty$$

Como los dos límites laterales son infinitos, es una discontinuidad de salto infinito.

Las raíces de índice par siempre tienen dos soluciones, un número y su opuesto.

Las raíces de índice impar tienen solución única.



HAZLO TÚ

1. Calcula:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 - 5n + 4} - n)$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n - 8}{2^{n+1}}$

2. Determina el valor de a para el cual $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{ax} = e$.

3. Estudia si la función:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq -1 \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ -3 & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

es continua en los puntos $x = -1$ y $x = 2$.

4. Determina los valores de a y b para que la función siguiente sea continua en todos los puntos.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x < 0 \\ x - a & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{a}{x} + b & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

5. Busca algún criterio que te permita afirmar que la ecuación:

$$x^3 + x^2 - 7x + 1 = 0$$

tiene al menos una solución en el intervalo $(0, 1)$. ¿Qué te dice ese criterio para el intervalo $(-1, 0)$? Razona la respuesta.

6. Demuestra que la ecuación $x^3 + x - 5 = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo $(1, 2)$.

7. Determina el valor de a para el cual:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{4x^2 + ax + 1}) = 1$$

8. Determina el valor de a para el cual:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{ax} = e$$

9. Halla los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{\sin x^2}}$

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\ln 4x^2}$

10. Determina los valores de a y b para los cuales se cumple esta igualdad:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - \cos x}{\sin x^2} = 1$$



Derivada de una función en un punto

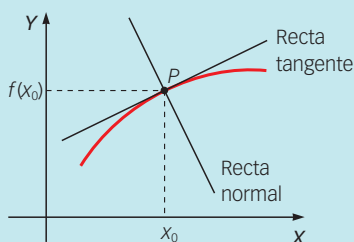
La **derivada de la función $f(x)$ en un punto de abscisa x_0** se denota por $f'(x_0)$, y es

el valor de este límite, si existe y es finito: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal

- La ecuación de la recta tangente en el punto $P(x_0, f(x_0))$ es: $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$
- La **recta normal** a la gráfica de la función en el punto $P(x_0, f(x_0))$ es la recta perpendicular a la recta tangente, y su ecuación es:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$



Derivabilidad en un punto

Existe la derivada de una función continua en un punto, si sus derivadas laterales existen

y son iguales: $f'(x_0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0^-) = f'(x_0)$

Derivabilidad y continuidad

Toda función $f(x)$ derivable en un punto de abscisa x_0 es necesariamente continua en dicho punto: $f(x_0)$ derivable $\rightarrow f(x_0)$ continua

Teorema de Rolle

Si una función f es continua en el intervalo $[a, b]$, derivable en el intervalo (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe algún punto c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

Teorema del valor medio

Si una función f es continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b) , entonces existe algún punto c en (a, b) tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Derivadas de funciones elementales

Tipo	Función	Derivada
Función constante	$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
Función identidad	$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
Función potencial	$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
Función exponencial	$f(x) = a^x$ $f(x) = e^x$	$f'(x) = a^x \ln a$ $f'(x) = e^x$
Función logarítmica	$f(x) = \log_a x$ $f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$ $f'(x) = \frac{1}{x}$
Función seno	$f(x) = \operatorname{sen} x$	$f'(x) = \operatorname{cos} x$
Función coseno	$f(x) = \operatorname{cos} x$	$f'(x) = -\operatorname{sen} x$
Función tangente	$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 x}$
Función arco seno	$f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Función arco coseno	$f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{cos} x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Función arco tangente	$f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Operaciones con derivadas

	Función	Derivada
Suma y resta de funciones	$f(x) \pm g(x)$	$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
Producto de un número por una función	$kf(x)$	$[kf(x)]' = kf'(x)$
Producto de funciones	$f(x) \cdot g(x)$	$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Cociente de funciones	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$
Función f compuesta con g (Regla de la cadena)	$g \circ f(x)$	$[g \circ f(x)]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$



DETERMINAR SI UNA FUNCIÓN ES DERIVABLE EN UN PUNTO

Determina si la función $f(x) = |x - 1|$ es derivable en el punto $x = 3$.

PRIMERO. Estudiamos la continuidad de la función en ese punto. Si la función no es continua en ese punto, no es derivable.

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x - 1) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x - 1) = f(3) = 2$$

La función es continua en $x = 3$.

SEGUNDO. Si la función es continua, comprobamos si las derivadas laterales existen y son iguales.

$$f'(3^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(3 + h - 1) - (3 - 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$f'(3^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(3 + h - 1) - (3 - 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h}{h} = 1$$

Por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = 3$.

APLICAR EL TEOREMA DE ROLLE

Comprueba si $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ cumple las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo $[0, 1]$. Si es así, ¿para qué valores de c resulta que $f'(c) = 0$?

PRIMERO. Estudiamos la continuidad de la función en el intervalo $[a, b]$.

f es polinómica $\rightarrow f$ continua en $[0, 1]$

SEGUNDO. Estudiamos la derivabilidad de la función en el intervalo (a, b) .

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 \rightarrow f$ derivable en $(0, 1)$

TERCERO. Comprobamos si la función toma el mismo valor en los extremos de $[a, b]$.

$$f(0) = 0^3 - 2 \cdot 0^2 + 0 = 0$$

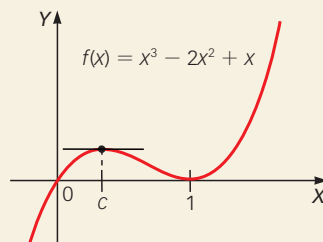
$$f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 = 0$$

CUARTO. Si se cumplen las condiciones del teorema, calculamos los puntos c .

Se cumplen las condiciones del teorema. Entonces existe algún c tal que $f'(c) = 0$.

$$f'(c) = 0 \rightarrow 3c^2 - 4c + 1 = 0 \rightarrow c = 1, c = \frac{1}{3}$$

Como $c = 1$ es extremo de $[0, 1]$, tenemos que para $c = \frac{1}{3}$ resulta que $f'\left(\frac{1}{3}\right) = 0$.



APLICAR EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Comprueba si la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4$ cumple las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[1, 3]$. En caso afirmativo, determina la derivada que da el teorema y los valores de c correspondientes.

PRIMERO. Estudiamos la continuidad de la función en el intervalo $[a, b]$.

f es polinómica $\rightarrow f$ continua en $[1, 3]$

SEGUNDO. Estudiamos la derivabilidad de la función en el intervalo (a, b) .

$f'(x) = 3x^2 - 6x \rightarrow f$ derivable en $(1, 3)$

TERCERO. Si se cumplen las condiciones, calculamos la derivada que da el teorema.

Se cumplen las condiciones del teorema. Entonces existe algún c tal que:

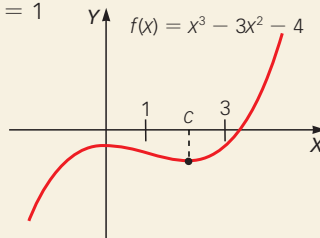
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \rightarrow f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{-4 + 6}{2} = 1$$

CUARTO. Hallamos los puntos c .

Como $f'(x) = 3x^2 - 6x$ y $f'(c) = 1$, si igualamos ambos resultados tenemos que:

$$3x^2 - 6x = 1 \rightarrow x = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}, \quad x = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{3}$$

Así, tenemos que $c = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$, ya que el otro valor de x no está en $[1, 3]$.



CALCULAR LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA

Calcula la derivada de la función $y = \arcsen x^3$.

PRIMERO. Escribimos la función como la función compuesta de otras funciones, f y g .

$$\begin{array}{l} (g \circ f)(x) = g(f(x)) \\ x \rightarrow f(x) = x^3 \rightarrow g(x^3) = \arcsen x^3 \end{array}$$

SEGUNDO. Determinamos la derivada de estas funciones.

$f(x)$ es una función potencial $\rightarrow f'(x) = 3x^2$

$g(x)$ es una función arco seno $\rightarrow g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

TERCERO. Aplicamos la regla de la cadena.

$$[(g \circ f)(x)]' = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 - (x^3)^2}}}_{g'(x^3)} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{\sqrt{1 - x^6}}$$



CALCULAR LA DERIVADA DE LAS FUNCIONES DEL TIPO $h(x) = f(x)^{g(x)}$

Calcula la derivada de la siguiente función:

$$h(x) = x^{x^2+3}$$

PRIMERO. Aplicamos logaritmos a los dos miembros de la función.

$$\ln f(x) = \ln x^{x^2+3} \rightarrow \ln f(x) = (x^2 + 3)\ln x$$

SEGUNDO. Derivamos los dos miembros. En el primer miembro, al derivar $\ln f(x)$ aplicamos la regla de la cadena, y en el segundo, hay que derivar un producto de funciones.

$$\ln f(x) = (x^2 + 3)\ln x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2x \ln x + \frac{x^2 + 3}{x}$$

TERCERO. Despejamos $f'(x)$ y sustituimos $f(x)$ por su valor.

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2x \ln x + \frac{x^2 + 3}{x}$$

$$f'(x) = \left(2x \ln x + \frac{x^2 + 3}{x}\right) \cdot f(x) = x^{x^2+3} \left(2x \ln x + \frac{x^2 + 3}{x}\right)$$

CALCULAR LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN IMPLÍCITA EN UN PUNTO

Halla las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 6y = 0$ en el punto $(0, 0)$.

PRIMERO. Derivamos la función respecto de la variable x .

$$2x + 2yy' - 6 - 6y' = 0$$

SEGUNDO. Despejamos la derivada y' .

$$(2y - 6)y' = -2x + 6 \rightarrow y' = \frac{-2x + 6}{2y - 6}$$

TERCERO. Sustituimos el punto en la expresión de y' teniendo en cuenta que, como el resultado anterior depende de x y de y , para determinar la derivada en un punto necesitamos sus dos coordenadas.

$$y'(0, 0) = \frac{-2 \cdot 0 + 6}{2 \cdot 0 - 6} = -1$$

CUARTO. Hallamos las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal en el punto.

$$\text{Recta tangente en } P(x_0, f(x_0)): y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \xrightarrow{P(0, 0)} y = -x$$

$$\text{Recta normal en } P(x_0, f(x_0)): y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) \xrightarrow{P(0, 0)} y = x$$

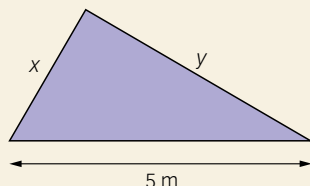
RESOLVER PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

De todos los triángulos rectángulos de 5 m de hipotenusa, halla el que tiene área máxima.

PRIMERO. Identificamos los datos.

Si los catetos del triángulo rectángulo son x e y , por el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$x^2 + y^2 = 25 \rightarrow y = \sqrt{25 - x^2}$$



SEGUNDO. Expresamos, en función de las variables, la magnitud que tenemos que optimizar.

En este caso, vamos a maximizar el área del triángulo. Por tanto, la función es:

$$f(x) = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{x \cdot \sqrt{25 - x^2}}{2}$$

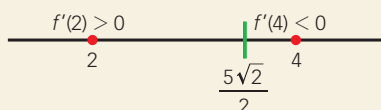
TERCERO. Hallamos la derivada de la función y determinamos para qué valores se anula.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{25 - 2x^2}{2\sqrt{25 - x^2}} = 0 \rightarrow 25 - 2x^2 = 0 \\ &\rightarrow x = \frac{5\sqrt{2}}{2}, x = -\frac{5\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

CUARTO. Decidimos si se trata de un máximo o un mínimo.

En este caso, la solución negativa no tiene sentido por tratarse de una medida.

Para comprobar si $f(x)$ alcanza un máximo en $x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, analizamos su crecimiento en las proximidades del punto.



$f(x)$ creciente a la izquierda de $x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ y decreciente a la derecha $\rightarrow x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ máximo

QUINTO. Interpretamos la solución.

$$x = \frac{5\sqrt{2}}{2} \rightarrow y = \sqrt{25 - \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Por tanto, de todos los triángulos rectángulos cuya hipotenusa mide 5 m, el que tiene área

máxima es el triángulo cuyos catetos miden $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ m y $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ m.

Para la función dada por: $f(x) = \begin{cases} (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) \cdot e^{-x+1} & \text{si } x > 1 \\ \text{sen}(x - 1) & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$

encuentra los valores de α , β y γ que hacen que $f(x)$ sea continua, y admita primera y segunda derivada en el punto $x = 1$.

IDEA CLAVE. Imponiendo las condiciones de continuidad, derivabilidad primera y segunda a la función en $x = 1$, obtendremos un sistema de ecuaciones donde las incógnitas serán α , β y γ .

- Si la función es continua en $x = 1$, debe cumplir que:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

$$\begin{cases} f(1) = \text{sen}(1 - 1) = \text{sen } 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) \cdot e^{-x+1} = (\alpha \cdot 1^2 + \beta \cdot 1 + \gamma) \cdot e^{-1+1} = \alpha + \beta + \gamma \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \text{sen}(x - 1) = \text{sen}(1 - 1) = \text{sen } 0 = 0 \end{cases}$$

Por tanto, es continua en $x = 1$ si $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

- Si la función tiene derivada primera en $x = 1$, se debe cumplir que: $f'(1^+) = f'(1^-)$

Como la función $f(x)$ es derivable para $x \neq 1$, la función derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} (2\alpha x + \beta)e^{-x+1} - e^{-x+1}(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) & \text{si } x > 1 \\ \cos(x - 1) & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Así se tiene que:

$$\begin{cases} f'(1^+) = (2\alpha + \beta) - (\alpha + \beta + \gamma) = \alpha - \gamma \\ f'(1^-) = \cos 0 = 1 \end{cases}$$

Por tanto, tiene derivada primera en $x = 1$ si $\alpha - \gamma = 1$.

- Si la función tiene derivada segunda en $x = 1$, debe ocurrir que: $f''(1^+) = f''(1^-)$

Como la función $f'(x)$ es derivable, su derivada es:

$$f''(x) = \begin{cases} 2\alpha e^{-x+1} - (2\alpha x + \beta)e^{-x+1} + e^{-x+1}(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) - e^{-x+1}(2\alpha x + \beta) & \text{si } x > 1 \\ -\text{sen}(x - 1) & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Así se tiene que:

$$\begin{cases} f''(1^+) = 2\alpha - (2\alpha + \beta) + (\alpha + \beta + \gamma) - (2\alpha + \beta) = -\alpha - \beta + \gamma \\ f''(1^-) = -\text{sen } 0 = 0 \end{cases}$$

Por tanto, $f(x)$ tiene derivada segunda en $x = 1$ si $-\alpha - \beta + \gamma = 0$.

Se resuelve el sistema formado por las ecuaciones obtenidas.

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \gamma = 1 \\ -\alpha - \beta + \gamma = 0 \end{cases} \xrightarrow{E_3 = E_1 + E_3} \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \gamma = 1 \\ 2\gamma = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \alpha = 1 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

La función que buscamos es:

$$f(x) = \begin{cases} (x^2 - x) \cdot e^{-x+1} & \text{si } x > 1 \\ \text{sen}(x - 1) & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

Una función $f(x)$ es continua en x_0 cuando:

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

Una función $f(x)$ tiene primera derivada en x_0 si:

$$f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$$

Una función $f(x)$ tiene segunda derivada en x_0 si:

$$f''(x_0^-) = f''(x_0^+)$$

HAZLO TÚ

1. Determina en qué puntos de la gráfica de la función $y = x^3 - 3x^2 + x + 17$ la recta tangente a la misma es paralela a la recta $y = x + 7$.
2. Determina la función $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ sabiendo que su derivada segunda es constante e igual a 3 y que la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa $x = 1$ es $5x - y - 3 = 0$.

3. Calcula, simplificando el resultado todo lo posible, la derivada de la función:

$$f(x) = \ln \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

4. Considera las funciones definidas para $x \geq 0$:

$$f(x) = \arcsen \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad g(x) = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Calcula $f'(x)$ y $g'(x)$ y exprésalas del modo más simplificado posible. Compara los resultados y deduce justificadamente la diferencia entre $f(x)$ y $g(x)$.

5. Sea la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 8 & \text{si } x \leq -2 \\ 2x + 4 & \text{si } -2 < x \leq 0 \\ \arccos x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- a) Estudia su continuidad en toda la recta real en función de a .
- b) Estudia su derivabilidad en toda la recta real en función de a .

6. Sea $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ la función definida por: $f(x) = x^2 - |x|$. Estudia la derivabilidad de f .

7. La potencia $f(x)$ en vatios consumida por cierto aparato eléctrico, en función de su resistencia (x) en ohmios, viene dada por la expresión $f(x) = \frac{4x}{(x+12)^2}$. Halla la potencia máxima y el correspondiente valor de x .

8. Dada la función $f(x) = \frac{1}{x}$, se pide:

- a) Hallar la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto $(a, f(a))$ para $a > 0$.
- b) Calcular los puntos de corte de la recta tangente hallada en el apartado a) con los dos ejes coordenados.
- c) Calcular el valor de $a > 0$ que hace que la distancia entre los dos puntos hallados sea mínima.

9. Demuestra que la función $f(x) = x^3 - x + a$ cumple la hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, 1]$ cualquiera que sea el valor de a . Encuentra el punto en el cual se cumple la tesis.

10. Utiliza el teorema del valor medio del cálculo diferencial para demostrar que para cualesquiera números reales $x < y$ se verifica que $\cos y - \cos x \leq y - x$.



Dominio de una función

Dada una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$, el **dominio de la función**, $\text{Dom } f$, es el conjunto $D \subset \mathbb{R}$ de los valores para los que está definida.

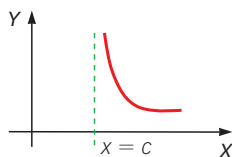
Puntos de corte

- **Cortes con el eje X:** son los puntos de la forma $(x, 0)$. Sus abscisas se obtienen resolviendo la ecuación $f(x) = 0$.
- **Corte con el eje Y:** es el punto $(0, f(0))$ si $f(x)$ está definida en $x = 0$.

Asíntotas. Ramas infinitas

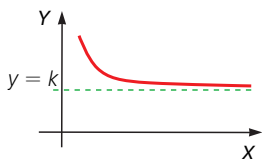
Asíntotas verticales

$x = c$ es una asíntota vertical de la función $f(x)$ si $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$.



Asíntotas horizontales

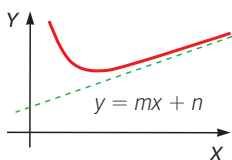
$y = k$ es una asíntota horizontal de la función $f(x)$ si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$.



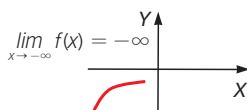
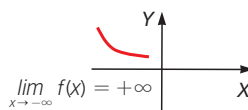
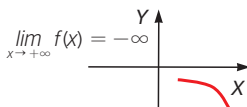
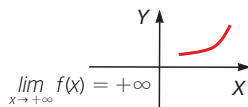
Asíntotas oblicuas

$y = mx + n$ es una asíntota oblicua de la función $f(x)$ si: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = n$$



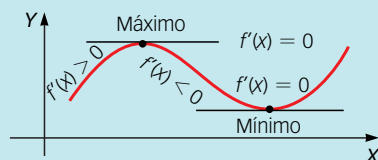
Ramas parabólicas



Una función tiene ramas parabólicas si no tiene asíntotas horizontales ni oblicuas.

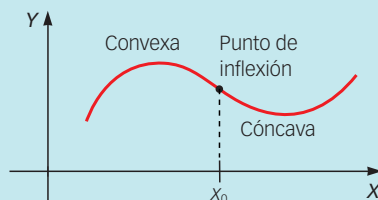
Monotonía de una función

- Si $f'(x_0) > 0 \rightarrow f(x)$ es **creciente** en $x = x_0$.
- Si $f'(x_0) < 0 \rightarrow f(x)$ es **decreciente** en $x = x_0$.
- Si $f'(x_0) = 0 \rightarrow f(x)$ presenta un **máximo** o un **mínimo** en $x = x_0$.



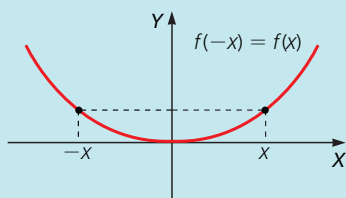
Curvatura de una función

- Si $f''(x_0) > 0 \rightarrow f(x)$ es **cóncava** en $x = x_0$.
- Si $f''(x_0) < 0 \rightarrow f(x)$ es **convexa** en $x = x_0$.
- Si $f''(x_0) = 0 \rightarrow f(x)$ presenta un **punto de inflexión** en $x = x_0$.

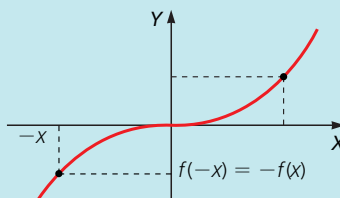


Simetrías

- Una **función** es **simétrica respecto del eje Y** si para cualquier punto x del dominio de la función: $f(-x) = f(x)$

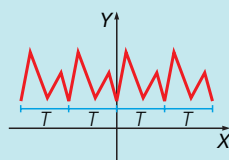


- Una **función** es **simétrica respecto del origen de coordenadas** si para cualquier punto x del dominio de la función: $f(-x) = -f(x)$



Periodicidad

Una **función** f es **periódica**, de período T ($T > 0$), si para cualquier valor x del dominio de la función se cumple que:
 $f(x) = f(x + T) = f(x + 2T) = \dots = f(x + kT)$, con k un número entero.





REPRESENTAR FUNCIONES POLINÓMICAS

Representa esta función polinómica: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

PRIMERO. Determinamos el dominio de $f(x)$.

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}$$

SEGUNDO. Hallamos los puntos de corte con los ejes.

- Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow x = 0, x = 3$
Puntos de corte con el eje X: (0, 0) y (3, 0).
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = 0$
Punto de corte con el eje Y: (0, 0).

TERCERO. Estudiamos las asíntotas y las ramas parabólicas de la función.

Como $f(x)$ es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x) = -\infty$$

CUARTO. Determinamos el crecimiento y el decrecimiento.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \rightarrow x = 1, x = 3$$

Es creciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ y es decreciente en $(1, 3)$.

- $f(x)$ creciente a la izquierda de $x = 1$ y decreciente a la derecha $\rightarrow x = 1$ máximo
 $x = 1 \rightarrow f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 = 4 \rightarrow (1, 4)$ máximo
- $f(x)$ decreciente a la izquierda de $x = 3$ y creciente a la derecha $\rightarrow x = 3$ mínimo
 $x = 3 \rightarrow f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 0 \rightarrow (3, 0)$ mínimo

QUINTO. Determinamos la concavidad y la convexidad.

$$f''(x) = 6x - 12 \rightarrow 6x - 12 = 0 \rightarrow x = 2$$

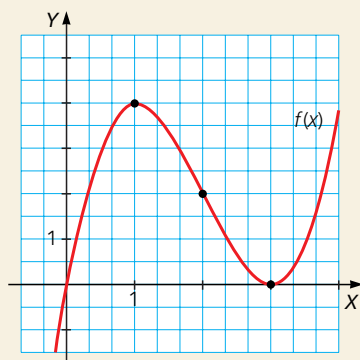
Es convexa en $(-\infty, 2)$ y es cóncava en $(2, +\infty)$.

$f(x)$ convexa a la izquierda de $x = 2$ y cóncava a la derecha.

$x = 2$ punto de inflexión

$$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 = 2 \rightarrow (2, 2)$$

SEXTO. Dibujamos la gráfica de la función a partir de los datos obtenidos.



REPRESENTAR FUNCIONES RACIONALES

Representa esta función racional: $f(x) = \frac{x^2 + 8x}{x - 1}$

PRIMERO. Determinamos el dominio de $f(x)$.

$$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow \text{Dom } f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

SEGUNDO. Hallamos los puntos de corte con los ejes.

- Cortes con el eje X : $f(x) = 0 \rightarrow x = 0, x = -8 \rightarrow (0, 0)$ y $(-8, 0)$
- Corte con el eje Y : $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

TERCERO. Estudiamos las asíntotas y las ramas parabólicas de la función.

- Asíntotas verticales: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 8x}{x - 1} = \frac{1^2 + 8 \cdot 1}{1 - 1} = \infty \rightarrow x = 1$
- Asíntotas horizontales no tiene: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

- Asíntotas oblicuas: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 8x}{x(x - 1)} = 1 \neq 0 \rightarrow m = 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 + 8x}{x - 1} - x \right] = 9 \rightarrow y = x + 9$$

- Ramas parabólicas no tiene por existir dos asíntotas oblicuas.

CUARTO. Determinamos el crecimiento y el decrecimiento.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{(x - 1)^2} \rightarrow \frac{x^2 - 2x - 8}{(x - 1)^2} = 0 \rightarrow x = -2, x = 4$$

Es creciente en $(-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$ y es decreciente en $(-2, 1) \cup (1, 4)$.

$$x = -2 \text{ máximo} \rightarrow f(-2) = 4 \rightarrow (-2, 4)$$

$$x = 4 \text{ mínimo} \rightarrow f(4) = 16 \rightarrow (4, 16)$$

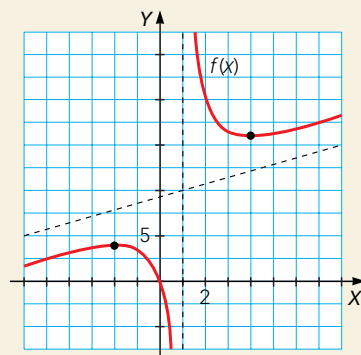
QUINTO. Determinamos la concavidad y la convexidad.

$$f''(x) = \frac{18}{(x - 1)^3} \rightarrow \text{No se anula.}$$

Es convexa en $(-\infty, 1)$ y es cóncava en $(1, +\infty)$.

No tiene puntos de inflexión, pues en $x = 1$ la función no está definida.

SEXTO. Dibujamos la gráfica de la función a partir de los datos obtenidos.





REPRESENTAR FUNCIONES CON RADICALES

Representa esta función con radicales: $f(x) = \sqrt{x^2 - 10x}$

PRIMERO. Determinamos el dominio de $f(x)$.

$$x^2 - 10x \geq 0 \rightarrow x \leq 0 \text{ y } x \geq 10 \rightarrow \text{Dom } f = (-\infty, 0] \cup [10, +\infty)$$

SEGUNDO. Hallamos los puntos de corte con los ejes.

- Cortes con el eje X : $f(x) = 0 \rightarrow x = 0, x = 10 \rightarrow (0, 0)$ y $(10, 0)$
- Corte con el eje Y : $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

TERCERO. Estudiamos las asíntotas y las ramas parabólicas de la función.

- Asíntotas verticales no tiene, ya que en los extremos del dominio está definida.

- Asíntotas horizontales no tiene: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

- Asíntotas oblicuas: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 10x}}{x} = 1 \neq 0 \rightarrow m = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - 10x} - x] = -5 \rightarrow y = x - 5$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 10x}}{x} = -1 \neq 0 \rightarrow m = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2 - 10x} + x] = 5 \rightarrow y = -x + 5$$

- Ramas parabólicas no tiene por existir dos asíntotas oblicuas.

CUARTO. Determinamos el crecimiento y el decrecimiento.

$$f'(x) = \frac{x - 5}{\sqrt{x^2 - 10x}} \rightarrow \frac{x - 5}{\sqrt{x^2 - 10x}} = 0 \rightarrow x = 5 \text{ no está en el dominio.}$$

Es creciente en $(10, +\infty)$ y es decreciente en $(-\infty, 0)$.

No tiene máximos ni mínimos.

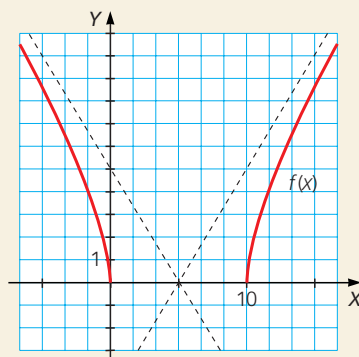
QUINTO. Determinamos la concavidad y la convexidad.

$$f''(x) = \frac{-25}{(x^2 - 10x)\sqrt{x^2 - 10x}} \rightarrow \text{No se anula.}$$

Es convexa en $(-\infty, 0) \cup (10, +\infty)$.

No tiene puntos de inflexión.

SEXTO. Dibujamos la gráfica de la función a partir de los datos obtenidos.



REPRESENTAR FUNCIONES EXPONENCIALES

Representa esta función exponencial: $f(x) = e^{-x^2}$

PRIMERO. Determinamos el dominio de $f(x)$.

El exponente es una función polinómica $\rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R}$

SEGUNDO. Hallamos los puntos de corte con los ejes.

- Cortes con el eje X : no tiene.
- Corte con el eje Y : $x = 0 \rightarrow f(0) = 1 \rightarrow (0, 1)$

TERCERO. Estudiamos las asíntotas y las ramas parabólicas de la función.

- Asíntotas horizontales: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \rightarrow y = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \rightarrow y = 0$
- Asíntotas oblicuas y ramas parabólicas no tiene, ya que hay una asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

CUARTO. Determinamos el crecimiento y el decrecimiento.

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} \rightarrow -2xe^{-x^2} = 0 \rightarrow x = 0$$

Es creciente en $(-\infty, 0)$ y es decreciente en $(0, +\infty)$.

$f(x)$ creciente a la izquierda de $x = 0$ y decreciente a la derecha $\rightarrow x = 0$ máximo

$$x = 0 \rightarrow f(0) = 1 \rightarrow (0, 1)$$

QUINTO. Determinamos la concavidad y la convexidad.

$$f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2} \rightarrow (4x^2 - 2)e^{-x^2} = 0 \rightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Es convexa en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y es cóncava en $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$.

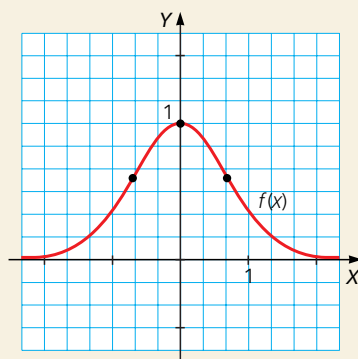
$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ punto de inflexión.

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{e}}{e} \rightarrow \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{e}}{e}\right)$$

$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ punto de inflexión.

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{e}}{e} \rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{e}}{e}\right)$$

SEXTO. Dibujamos la gráfica de la función a partir de los datos obtenidos.





REPRESENTAR FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Representa esta función logarítmica: $f(x) = \ln(x^2 - 9)$

PRIMERO. Determinamos el dominio de $f(x)$.

$$x^2 - 9 > 0 \rightarrow x < -3 \text{ y } x > 3 \rightarrow \text{Dom } f = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$$

SEGUNDO. Hallamos los puntos de corte con los ejes.

- Cortes con el eje X : $f(x) = 0 \rightarrow x = -\sqrt{10}, x = \sqrt{10} \rightarrow (-\sqrt{10}, 0) \text{ y } (\sqrt{10}, 0)$
- Corte con el eje Y : no tiene, ya que la función no está definida en $x = 0$.

TERCERO. Estudiamos las asíntotas y las ramas parabólicas de la función.

- Asíntotas verticales: $\lim_{x \rightarrow -3} \ln(x^2 - 9) = -\infty \rightarrow x = -3$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \ln(x^2 - 9) = -\infty \rightarrow x = 3$$

- Asíntotas horizontales no tiene: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

- Asíntotas oblicuas no tiene: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - 9)}{x} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 - 9)}{x} = 0$$

- Tiene ramas parabólicas, pues no hay asíntotas horizontales ni oblicuas.

CUARTO. Determinamos el crecimiento y el decrecimiento.

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 9} \rightarrow \frac{2x}{x^2 - 9} = 0 \rightarrow x = 0 \text{ no está en el dominio.}$$

Es creciente en $(3, +\infty)$ y es decreciente en $(-\infty, -3)$.

No tiene máximos ni mínimos.

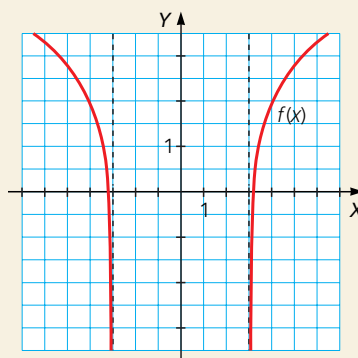
QUINTO. Determinamos la concavidad y la convexidad.

$$f''(x) = \frac{-2x^2 - 18}{(x^2 - 9)^2} \rightarrow \text{No se anula.}$$

Es convexa en $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$.

No tiene puntos de inflexión.

SEXTO. Dibujamos la gráfica de la función a partir de los datos obtenidos.



REPRESENTAR FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

Representa esta función: $f(x) = \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 9x & \text{si } x \leq 3 \\ \ln(x^2 - 9) & \text{si } 3 < x \end{cases}$

PRIMERO. Determinamos el dominio y la continuidad de $f(x)$.

- Las funciones que definen $f(x)$ en los intervalos correspondientes son continuas.
- Comprobamos qué ocurre en $x = 3$.

$$f(3) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^3 - 6x^2 + 9x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x^2 - 9) = -\infty$$

Existe $f(3)$, $\text{Dom } f = \mathbb{R}$.

Sin embargo, $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \rightarrow f(x)$ no es continua en $x = 3$.

SEGUNDO. Hallamos los puntos de corte con los ejes.

- Cortes con el eje X : $(0, 0)$, $(3, 0)$ y $(\sqrt{10}, 0)$
- Corte con el eje Y : $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

TERCERO. Estudiamos las asíntotas y las ramas parabólicas de la función.

- Asíntotas verticales: $\lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x^2 - 9) = -\infty \rightarrow x = 3$
- Asíntotas horizontales no tiene: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- Asíntotas oblicuas no tiene: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$
- Ramas parabólicas: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

CUARTO. Determinamos el crecimiento y el decrecimiento.

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 12x + 9 & \text{si } x < 3 \\ \frac{2x}{x^2 - 9} & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 1$$

Es creciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ y decreciente en $(1, 3)$.

$$x = 1 \text{ máximo} \rightarrow f(1) = 4 \rightarrow (1, 4)$$

QUINTO. Determinamos la concavidad y la convexidad.

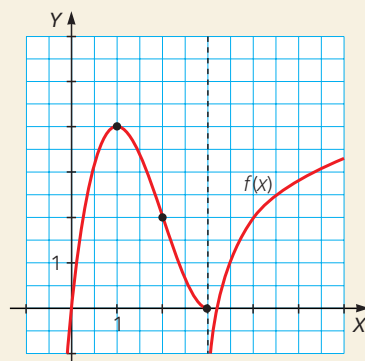
$$f''(x) = \begin{cases} 6x - 12 & \text{si } x < 3 \\ \frac{-2x^2 - 18}{(x^2 - 9)^2} & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow x = 2$$

Convexa en $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$ y cóncava en $(2, 3)$.

$$x = 2 \text{ punto de inflexión} \rightarrow f(2) = 2 \rightarrow (2, 2)$$

SEXTO. Dibujamos la gráfica de la función a partir de los datos obtenidos.



Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + 1} & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leq x \leq 3, \text{ con } a \text{ y } b \in \mathbb{R} \\ x - 5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

- a) Calcula los valores de a y b para que la función sea continua.
b) Dibuja la gráfica de la función en todo $\mathbb{R}$.

a) **IDEA CLAVE.** Imponiendo las condiciones de continuidad a la función en $x = 0$ y $x = 3$, obtendremos un sistema de ecuaciones donde las incógnitas serán a y b .

Las tres funciones que definen $f(x)$ son continuas en sus intervalos. Estudiamos la continuidad en $x = 0$ y $x = 3$:

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= a \cdot 0 + b = b \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2 + 1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax + b) = b \end{aligned} \right\} \rightarrow f(x) \text{ es continua en } x = 0 \text{ si } b = 1.$$

$$\left. \begin{aligned} f(3) &= a \cdot 3 + b = 3a + b \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} (ax + b) = 3a + b \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} (x - 5) = -2 \end{aligned} \right\} \rightarrow f(x) \text{ es continua en } x = 3 \text{ si } 3a + b = -2.$$

$$\left. \begin{aligned} b &= 1 \\ 3a + b &= -2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ 3a + 1 = -2 \rightarrow a = -1 \end{cases}$$

b) **IDEA CLAVE.** Como se trata de una función definida a trozos, tenemos que dibujar cada una de las funciones que la definen en los intervalos correspondientes.

$y = -x + 1 \rightarrow$ Recta que pasa por $(0, 1)$ y $(1, 0)$.

$y = x - 5 \rightarrow$ Recta que pasa por $(5, 0)$ y $(0, -5)$.

Estudiamos las características de $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ en $(-\infty, 0)$:

■ Puntos de corte con el eje X : $f(x) = 0 \rightarrow \frac{1}{x^2 + 1} = 0 \rightarrow$ No corta.

■ Asíntotas verticales: no tiene.

■ Asíntotas horizontales: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 0 \rightarrow y = 0$

■ Crecimiento: $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow x = 0$

Crece en $(-\infty, 0)$.

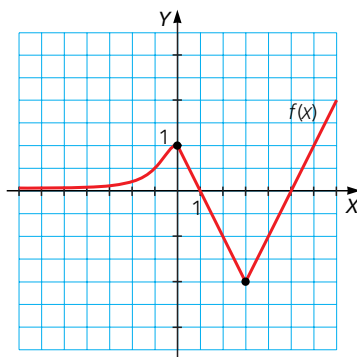
■ Concavidad y convexidad: $f''(x) = \frac{2(3x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^3} = 0$
 $\rightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{3}, x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

En $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ presenta un punto de inflexión.

Una función $f(x)$ es continua en x_0 cuando:

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

Como $y = -x + 1$ e $y = x - 5$ son rectas, hay que determinar dos puntos por los que pasan para representarlas.

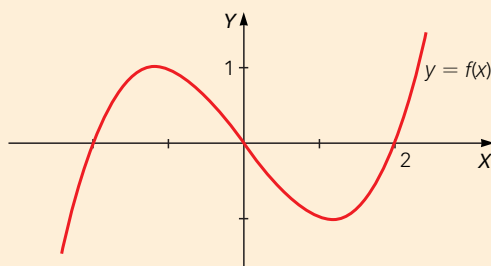


HAZLO TÚ

1. Dada la función: $f(x) = e^{-x^2+2x}$

- Encuentra su dominio y las posibles intersecciones con los ejes.
- Encuentra los intervalos donde crece y decrece y los extremos relativos.
- Encuentra sus posibles asíntotas.
- Haz la representación gráfica aproximada de la función.

2. Si la gráfica de una función $f(x)$ es:



representa aproximadamente la gráfica de la derivada de $f'(x)$.

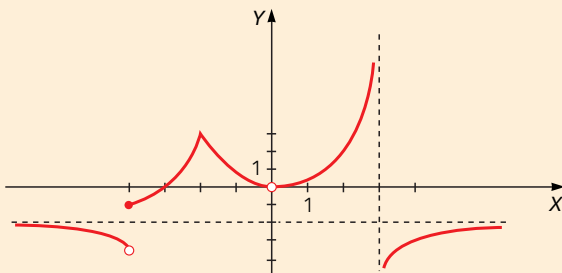
3. Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{4-x}$, se pide:

- Dominio y cortes con el eje X .
- Asíntotas verticales (calculando los límites laterales). Asíntotas horizontales y oblicuas.
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos.
- Representación gráfica aproximada.

4. Representa gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 8 & \text{si } x \leq -2 \\ 2x + 4 & \text{si } -2 < x \leq 0 \\ 4 \cos x & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

5. Considera las funciones $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ y $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definidas por $f(x) = e^{x-1}$ y $g(x) = e^{1-x}$. Esboza las gráficas de f y g y determina su punto de corte.

6. Determina el dominio, recorrido, puntos de corte con los ejes coordenados, asíntotas, máximos y mínimos, puntos de inflexión e intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad de la siguiente función.



Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, siendo $\ln$ la función logaritmo neperiano.

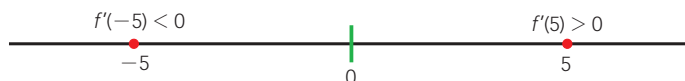
- Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de f (puntos donde se alcanza el mayor y el menor valor de la función).
- Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de inflexión de abscisa negativa.

- a) IDEA CLAVE.** Para determinar el crecimiento y el decrecimiento de la función estudiamos el signo de la derivada f' . Si dicha derivada se anula en un punto, este será un posible máximo o mínimo de la función.

La derivada de la función es: $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

Para hallar los posibles máximos y mínimos de la función resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{2x}{x^2 + 1} = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$$



Así, la función decrece en el intervalo $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$.

En $x = 0$ la función tiene un mínimo.

Su gráfica presenta un mínimo en el punto $(0, f(0))$, es decir, en el punto $(0, 0)$.

Al dar valores en la derivada, estos deben pertenecer al dominio de la función.

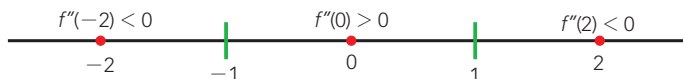
Si la función alcanza un mínimo en $x = a$, su gráfica toma ese valor en el punto $(a, f(a))$.

- b) IDEA CLAVE.** Calculamos el punto por el que pasa la recta tangente a la gráfica y determinamos su ecuación.

- El punto por el que pasa es el punto de inflexión de abscisa negativa.

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow -2x^2 + 2 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$



En $x_0 = -1$ tiene un punto de inflexión con abscisa negativa.

- La ecuación de la recta tangente en un punto x_0 es: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) \rightarrow f(-1) = \ln((-1)^2 + 1) = \ln 2$$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \rightarrow f'(-1) = \frac{2 \cdot (-1)}{((-1)^2 + 1)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es: $y - \ln 2 = -\frac{1}{2}(x + 1)$

Para determinar el punto de inflexión tenemos que hallar para qué valores se anula la derivada segunda y analizar si cambia el sentido de la concavidad de la función.

HAZLO TÚ

- Dada la función $y = x^4 e^{-x}$:
 - Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
 - Halla, si existen, los máximos, mínimos y puntos de inflexión.
- Determina a y b para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 - x + 2$ tenga un mínimo en $x = 2$ y un punto de inflexión en $x = \frac{1}{3}$.
- De la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que tiene un máximo en $x = -1$, que su gráfica corta al eje X en el punto de abscisa $x = -2$ y tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 0$. Calcula a , b , c y d sabiendo, además, que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ tiene pendiente 9.
- La potencia $f(x)$ en vatios consumida por cierto aparato eléctrico, en función de su resistencia (x) en ohmios, viene dada por la expresión: $f(x) = \frac{4x}{(x+12)^2}$. Halla la potencia máxima y el correspondiente valor de x .
- Dada la función $f(x) = \frac{1}{x}$, se pide:
 - Encontrar la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto $(a, f(a))$ para $a > 0$.
 - Encontrar los puntos de corte de la recta tangente hallada en el apartado a) con los dos ejes coordenados.
 - Hallar el valor de $a > 0$ que hace que la distancia entre los dos puntos hallados sea mínima.
- Sea f la función definida, para $x \neq 0$, por $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$. Determina las asíntotas de la gráfica de f .
- Sean las funciones:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \rightarrow x^3$	$x \rightarrow x $	$x \rightarrow \operatorname{sen} x$

 Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos de inflexión de $f(x)$.
- Sea $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$.
 - Calcula el máximo y el mínimo absolutos de $f(x)$.
 - Estudia si $f(x)$ es una función simétrica respecto al eje Y .
- Halla el máximo relativo, el mínimo relativo y la asíntota oblicua de la función $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$.
- Calcula el valor de los parámetros a y $b \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = (x^2 - a)e^x + bx$ tenga un punto de inflexión en $x = 0$ y un mínimo relativo en $x = 1$.



Integral de una función

$F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ cuando $F'(x) = f(x)$.

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$: $\int f(x) dx = F(x) + k$ con $k \in \mathbb{R}$.

Integral definida. Regla de Barrow

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Integrales de funciones elementales

Tipo	Función	Integral
Función constante	$f(x) = c$	$\int c dx = cx + k$ con $k \in \mathbb{R}$
Función potencial	$f(x) = x^n$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$
		$\int f(x)^n \cdot f'(x) dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + k$
	$f(x) = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + k$
		$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + k$
Función exponencial	$f(x) = a^x$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + k$
		$\int a^{f(x)} \cdot f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + k$
	$f(x) = e^x$	$\int e^x dx = e^x + k$
		$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = e^{f(x)} + k$

Tipo	Función	Integral
Funciones trigonométricas	$f(x) = \operatorname{sen} x$	$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + k$
		$\int \operatorname{sen} f(x) \cdot f'(x) \, dx = -\cos f(x) + k$
	$f(x) = \cos x$	$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + k$
		$\int \cos f(x) \cdot f'(x) \, dx = \operatorname{sen} f(x) + k$
	$f(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$\int (1 + \operatorname{tg}^2 x) \, dx = \operatorname{tg} x + k$
		$\int [1 + \operatorname{tg}^2 f(x)] \cdot f'(x) \, dx = \operatorname{tg} f(x) + k$
	$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + k$
		$\int \frac{1}{\cos^2 f(x)} \cdot f'(x) \, dx = \operatorname{tg} f(x) + k$
Funciones arco	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x + k$
		$\int \frac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}} \cdot f'(x) \, dx = \operatorname{arc} \operatorname{sen} f(x) + k$
	$f(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \operatorname{arc} \cos x + k$
		$\int \frac{-1}{\sqrt{1-f(x)^2}} \cdot f'(x) \, dx = \operatorname{arc} \cos f(x) + k$
	$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + k$
		$\int \frac{1}{1+f(x)^2} \cdot f'(x) \, dx = \operatorname{arc} \operatorname{tg} f(x) + k$



RESOLVER UNA INTEGRAL RACIONAL EN LA QUE EL DENOMINADOR TIENE RAÍCES SIMPLES Y MÚLTIPLES

Calcula esta integral: $\int \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 3x + 2} dx$

PRIMERO. Factorizamos el polinomio del denominador.

Para determinar las raíces enteras de un polinomio de grado mayor que 2, podemos utilizar la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & -3 & 2 \\
 1 & & 1 & 1 & -2 \\
 \hline
 & 1 & 1 & -2 & 0 \\
 1 & & 1 & 2 & \\
 \hline
 & 1 & 2 & 0 &
 \end{array}$$

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2) \rightarrow \begin{cases} x = 1 & \text{Raíz doble} \\ x = -2 & \text{Raíz simple} \end{cases}$$

SEGUNDO. Descomponemos la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ como una suma de fracciones

en la que los numeradores son constantes y los denominadores son los factores correspondientes a las raíces simples y múltiples de $Q(x)$.

$$\begin{aligned}
 \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 3x + 2} &= \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x + 2} \\
 \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 3x + 2} &= \frac{A(x - 1)(x + 2) + B(x + 2) + C(x - 1)^2}{(x - 1)^2(x + 2)}
 \end{aligned}$$

TERCERO. Calculamos las constantes, igualando los numeradores.

$$\begin{aligned}
 2x^2 + 1 &= A(x - 1)(x + 2) + B(x + 2) + C(x - 1)^2 \\
 2x^2 + 1 &= (A + C)x^2 + (A + B - 2C)x + (-2A + 2B + C)
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2 = A + C \\ 0 = A + B - 2C \\ 1 = -2A + 2B + C \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = 1 \end{cases}$$

$$\text{Así, tenemos: } \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 3x + 2} = \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2} + \frac{1}{x + 2}$$

CUARTO. Resolvemos la integral, aplicando la descomposición obtenida.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 3x + 2} dx &= \int \frac{1}{x - 1} dx + \int \frac{1}{(x - 1)^2} dx + \int \frac{1}{x + 2} dx = \\
 &= \ln |x - 1| - \frac{1}{x - 1} + \ln |x + 2| + k
 \end{aligned}$$

RESOLVER UNA INTEGRAL RACIONAL EN LA QUE EL DENOMINADOR TIENE RAÍCES NO REALES

Calcula esta integral: $\int \frac{2x^2 - x - 3}{x^4 + x^2} dx$

PRIMERO. Factorizamos el polinomio del denominador.

$$x^4 + x^2 = x^2(x^2 + 1) \rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{Raíz doble} \\ x^2 + 1 & \text{Raíces no reales} \end{cases}$$

Si en la factorización obtenemos algún polinomio que no tiene raíces reales lo dejamos tal y como está.

SEGUNDO. Descomponemos la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ como una suma de fracciones, teniendo en cuenta que a cada factor irreducible de segundo grado de $Q(x)$ le corresponde un numerador de primer grado, $Mx + N$.

$$\frac{2x^2 - x - 3}{x^4 + x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Mx + N}{x^2 + 1}$$

$$\frac{2x^2 - x - 3}{x^4 + x^2} = \frac{Ax(x^2 + 1) + B(x^2 + 1) + (Mx + N)x^2}{x^2(x^2 + 1)}$$

TERCERO. Calculamos las constantes, igualando los numeradores.

$$2x^2 - x - 3 = Ax(x^2 + 1) + B(x^2 + 1) + (Mx + N)x^2$$

$$2x^2 - x - 3 = (A + M)x^3 + (B + N)x^2 + Ax + B$$

$$\begin{cases} 0 = A + M \\ 2 = B + N \\ -1 = A \\ -3 = B \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = -3 \\ M = 1 \\ N = 5 \end{cases}$$

Así, tenemos:

$$\frac{2x^2 - x - 3}{x^4 + x^2} = -\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{x + 5}{x^2 + 1}$$

CUARTO. Resolvemos la integral, utilizando la descomposición obtenida.

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - x - 3}{x^4 + x^2} dx &= -\int \frac{1}{x} dx - \int \frac{3}{x^2} dx + \int \frac{x + 5}{x^2 + 1} dx = \\ &= -\ln|x| + \frac{3}{x} + \int \frac{x}{x^2 + 1} dx + \int \frac{5}{x^2 + 1} dx = \\ &= -\ln|x| + \frac{3}{x} + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx + 5 \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \\ &= -\ln|x| + \frac{3}{x} + \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + 5 \operatorname{arctg} x + k \end{aligned}$$



RESOLVER UNA INTEGRAL RACIONAL EN LA QUE EL GRADO DEL NUMERADOR ES MAYOR O IGUAL QUE EL GRADO DEL DENOMINADOR

Calcula esta integral: $\int \frac{2x^4 - 4x^2 + 4x + 1}{x^3 - 3x + 2} dx$

PRIMERO. Dividimos el numerador entre el denominador y descomponemos $\frac{P(x)}{Q(x)}$
 como: $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$

$$\begin{array}{r} 2x^4 - 4x^2 + 4x + 1 \quad | \quad x^3 - 3x + 2 \\ -2x^4 + 6x^2 - 4x \quad | \quad 2x \\ \hline 2x^2 + 1 \end{array}$$

$$\frac{2x^4 - 4x^2 + 4x + 1}{x^3 - 3x + 2} = 2x + \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 3x + 2}$$

SEGUNDO. Resolvemos la $\int \frac{R(x)}{Q(x)}$ en la que el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

Factorizamos el polinomio del denominador.

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2) \rightarrow \begin{cases} x = 1 & \text{Raíz doble} \\ x = -2 & \text{Raíz simple} \end{cases}$$

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 3x + 2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x + 2}$$

$$2x^2 + 1 = A(x - 1)(x + 2) + B(x + 2) + C(x - 1)^2$$

$$\begin{cases} 2 = A + C \\ 0 = A + B - 2C \\ 1 = -2A + 2B + C \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = 1 \end{cases}$$

$$\frac{2x^2 + 1}{x^3 - 3x + 2} = \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2} + \frac{1}{x + 2}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 3x + 2} dx &= \int \frac{1}{x - 1} dx + \int \frac{1}{(x - 1)^2} dx + \int \frac{1}{x + 2} dx = \\ &= \ln |x - 1| - \frac{1}{x - 1} + \ln |x + 2| + k \end{aligned}$$

TERCERO. Utilizamos este resultado para resolver la integral inicial.

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^4 - 4x^2 + 4x + 1}{x^3 - 3x + 2} dx &= \int 2x dx + \int \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 3x + 2} dx = \\ &= x^2 + \ln |x - 1| - \frac{1}{x - 1} + \ln |x + 2| + k \end{aligned}$$

RESOLVER UNA INTEGRAL POR PARTES

Calcula esta integral: $\int x \ln x \, dx$

PRIMERO. Determinamos los dos factores en la función que hay que integrar, teniendo en cuenta que uno de ellos, la función dv , debe ser fácil de integrar.

En este caso, si $dv = \ln x \, dx \rightarrow v = \int \ln x \, dx$, que no sabemos calcular.

Por tanto, elegimos $dv = x \, dx$ y $u = \ln x$.

SEGUNDO. Calculamos v y du .

$$dv = x \, dx \rightarrow v = \int x \, dx = \frac{x^2}{2} \qquad u = \ln x \rightarrow du = [\ln x]' = \frac{1}{x} \, dx$$

TERCERO. Aplicamos la fórmula para la integración por partes: $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

$$\int x \ln x \, dx = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{x}{2} \, dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + k$$

RESOLVER UNA INTEGRAL POR CAMBIO DE VARIABLE

Calcula la integral de la función $\frac{1}{x \ln x} \, dx$.

PRIMERO. Definimos t , teniendo en cuenta que parte de la función que vamos a integrar tendrá que responder a la derivada de t .

Como $\frac{1}{x}$ es la derivada de $\ln x$, tomamos: $t = \ln x \rightarrow dt = \frac{1}{x} \, dx$

SEGUNDO. Sustituimos t y dt en la integral.

$$\int \frac{1}{x \ln x} \, dx = \int \frac{1}{\ln x} \cdot \underbrace{\frac{1}{x} \, dx}_{\frac{1}{t} \, dt} = \int \frac{1}{t} \, dt$$

TERCERO. Resolvemos la integral de variable t que obtenemos.

$$\int \frac{1}{x \ln x} \, dx = \int \frac{1}{t} \, dt = \ln |t| + k$$

CUARTO. Reemplazamos, en la primitiva que hemos obtenido, t por su expresión en x .

$$\int \frac{1}{x \ln x} \, dx = \int \frac{1}{t} \, dt = \ln |t| + k = \ln |\ln x| + k$$

$\uparrow$
 $t = \ln x$



CALCULAR EL ÁREA ENTRE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN Y EL EJE X

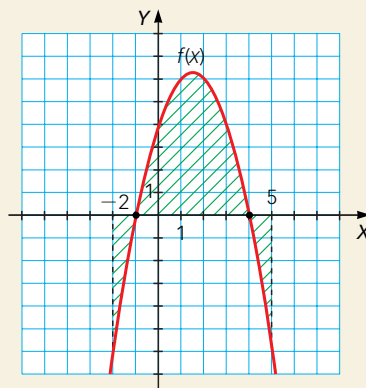
Halla el área encerrada entre la función $f(x) = -x^2 + 3x + 4$, el eje x y las rectas $x = -2$ y $x = 5$.

PRIMERO. Calculamos los puntos de corte de la función con el eje x , resolviendo la ecuación $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\rightarrow -x^2 + 3x + 4 = 0 \\ &\rightarrow x_1 = -1, x_2 = 4 \end{aligned}$$

SEGUNDO. Hallamos una primitiva de $f(x)$.

$$\begin{aligned} \int (-x^2 + 3x + 4) dx &= \\ &= -\int x^2 dx + 3 \int x dx + \int 4 dx = \\ &= -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x \end{aligned}$$



TERCERO. Determinamos el valor de esa primitiva en los extremos del intervalo (rectas que delimitan el área) y en los puntos de corte que pertenecen al intervalo.

$$\begin{aligned} F(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x \quad \xrightarrow{a = -2} \quad F(-2) &= -\frac{(-2)^3}{3} + \frac{3(-2)^2}{2} + 4(-2) = \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{x_1 = -1} \quad F(-1) &= -\frac{(-1)^3}{3} + \frac{3(-1)^2}{2} + 4(-1) = \\ &= -\frac{13}{6} \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{x_2 = 4} \quad F(4) = -\frac{4^3}{3} + \frac{3 \cdot 4^2}{2} + 4 \cdot 4 = \frac{56}{3}$$

$$\xrightarrow{b = 5} \quad F(5) = -\frac{5^3}{3} + \frac{3 \cdot 5^2}{2} + 4 \cdot 5 = \frac{95}{6}$$

CUARTO. Calculamos las integrales definidas entre cada par de valores consecutivos, tomando el valor absoluto de su resultado.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \left| \int_{-2}^{-1} (-x^2 + 3x + 4) dx \right| + \left| \int_{-1}^4 (-x^2 + 3x + 4) dx \right| + \left| \int_4^5 (-x^2 + 3x + 4) dx \right| = \\ &= |F(-1) - F(-2)| + |F(4) - F(-1)| + |F(5) - F(4)| = \\ &= \left| -\frac{13}{6} - \frac{2}{3} \right| + \left| \frac{56}{3} - \left(-\frac{13}{6} \right) \right| + \left| \frac{95}{6} - \frac{56}{3} \right| = \frac{53}{2} \end{aligned}$$

CALCULAR EL ÁREA COMPRENDIDA ENTRE DOS CURVAS

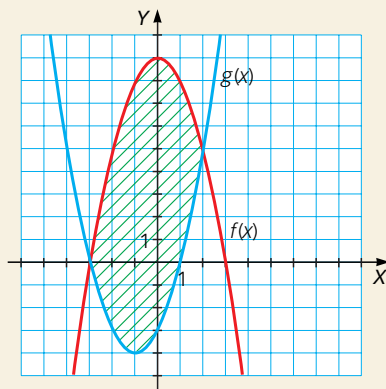
Halla el área comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2 + 9$ y $g(x) = (x + 1)^2 - 4$.

PRIMERO. Calculamos los puntos de corte entre las dos funciones resolviendo la ecuación $f(x) = g(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\rightarrow -x^2 + 9 = (x + 1)^2 - 4 \\ &\rightarrow -x^2 + 9 = x^2 + 2x + 1 - 4 \\ &\rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

SEGUNDO. Determinamos la función $(f - g)(x)$ y buscamos una de sus primitivas.

$$\begin{aligned} (f - g)(x) &= (-x^2 + 9) - ((x + 1)^2 - 4) = \\ &= -x^2 + 9 - (x^2 + 2x + 1 - 4) = \\ &= -x^2 + 9 - x^2 - 2x + 3 = \\ &= -2x^2 - 2x + 12 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \int (-2x^2 - 2x + 12) dx &= -2 \int x^2 dx - 2 \int x dx + \int 12 dx = \\ &= -\frac{2x^3}{3} - x^2 + 12x \end{aligned}$$

TERCERO. Hallamos el valor de esa primitiva para los puntos de corte de las funciones.

$$\begin{aligned} F(x) = -\frac{2x^3}{3} - x^2 + 12x \xrightarrow{x_1 = -3} F(-3) &= -\frac{2(-3)^3}{3} - (-3)^2 + 12(-3) = \\ &= \frac{54}{3} - 9 - 36 = -27 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{x_2 = 2} F(2) &= -\frac{2 \cdot 2^3}{3} - 2^2 + 12 \cdot 2 = \\ &= -\frac{16}{3} - 4 + 24 = \frac{44}{3} \end{aligned}$$

CUARTO. Calculamos las integrales definidas de $(f - g)(x)$ entre cada par de valores consecutivos, tomando el valor absoluto de su resultado.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \left| \int_{-3}^2 (-2x^2 - 2x + 12) dx \right| = \left| \left[-\frac{2x^3}{3} - x^2 + 12x \right]_{-3}^2 \right| = \\ &= |F(2) - F(-3)| = \\ &= \left| \frac{44}{3} - (-27) \right| = \frac{125}{3} \end{aligned}$$

- a) Halla la función $f(x)$ tal que $f''(x) = \frac{1}{x^2}$, $f(1) = 0$ y $f(e) = -1$.
- b) Halla la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sabiendo que $f''(x) = 12x - 6$ y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ tiene de ecuación $4x - y - 7 = 0$.

a) **IDEA CLAVE.** Al calcular la integral de $f''(x)$ obtenemos todas las $f'(x)$ posibles, y al calcular la integral de $f'(x)$ obtenemos todas las $f(x)$ posibles.

$$f'(x) = \int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + k = -\frac{1}{x} + k$$

$$f(x) = \int \left(-\frac{1}{x} + k\right) dx = -\int \frac{1}{x} dx + \int k dx = -\ln|x| + kx + c$$

La función $f(x)$ depende de dos constantes, k y c ; para determinarlas aplicamos las condiciones que nos da el enunciado: $f(1) = 0$ y $f(e) = -1$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -\ln|x| + kx + c \xrightarrow{f(1)=0} -\ln 1 + k \cdot 1 + c = 0 \\ f(x) = -\ln|x| + kx + c \xrightarrow{f(e)=1} -\ln e + k \cdot e + c = -1 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} k + c = 0 \\ ek + c = 0 \end{cases}$$

Obtenemos un sistema con dos ecuaciones y dos incógnitas, k y c .

$$\left. \begin{array}{l} k + c = 0 \\ ek + c = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\cdot (-1)} \left. \begin{array}{l} k + \cancel{c} = 0 \\ -ek - \cancel{c} = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{(1-e)k} \begin{array}{l} k + \cancel{c} = 0 \\ -ek - \cancel{c} = 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} k = 0 \\ k + c = 0 \xrightarrow{k=0} c = 0 \end{array}$$

Así, resulta: $f(x) = -\ln|x| + kx + c \xrightarrow{k=0, c=0} f(x) = -\ln|x|$

b) **IDEA CLAVE.** La pendiente de la recta tangente en el punto $x = a$ es el valor de $f'(x)$. Sustituyendo por $x = a$ en la ecuación de la tangente, obtenemos $f(a)$.

$$f'(x) = \int (12x - 6) dx = \int 12x dx - \int 6 dx = \frac{12x^2}{2} - 6x + k = 6x^2 - 6x + k$$

$$f(x) = \int (6x^2 - 6x + k) dx = \int 6x^2 dx - \int 6x dx + \int k dx = \frac{6x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + kx + c = 2x^3 - 3x^2 + kx + c$$

La recta tangente en $x = 2$ es:

$$4x - y - 7 = 0 \rightarrow y = 4x - 7 \rightarrow \text{Pendiente} = 4 \rightarrow f'(2) = 4$$

$$4x - y - 7 = 0 \xrightarrow{x=2} 8 - y - 7 = 0 \rightarrow y = 1 \rightarrow f(2) = 1$$

Aplicamos a f' y f las condiciones que hemos obtenido: $f'(2) = 4$ y $f(2) = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 6x^2 - 6x + k \xrightarrow{f'(2)=4} 6 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + k = 4 \\ f(x) = 2x^3 - 3x^2 + kx + c \xrightarrow{f(2)=1} 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2k + c = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} k = -8 \\ c = 13 \end{cases}$$

Así, resulta:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + kx + c \xrightarrow{k=-8, c=13} f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x + 13$$

Al integrar f'' obtenemos una constante k , y al integrar f' obtenemos otra constante diferente, c .

HAZLO TÚ

1. Dada la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{5x^2 - 4}}$:

a) Calcula la integral $\int f(x) dx$.

b) Halla la primitiva F de f que cumple que $F(1) = 1$.

2. Determina $f(x)$ sabiendo que $f'''(x) = 24x$, $f''(0) = 2$, $f'(0) = 1$ y $f(0) = 0$.

3. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x - 1)e^{2x}$. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1, e^2)$.

4. Dada la función $f: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$, calcula una función primitiva de $f(x)$ que pase por el punto $P(e, 2)$.

5. Dada la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(1 + x^2)$, halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas.

6. Halla una primitiva de la función $f(x) = xe^x$.

7. Calcula la siguiente integral:

$$\int \frac{x}{(x+1)^3} dx$$

8. Resuelve esta integral racional:

$$\int \frac{2x}{x^3 - 3x^2 - x + 3} dx$$

9. Calcula la primitiva que sigue:

$$\int \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 4} dx$$

10. Calcula esta integral racional:

$$\int \frac{x+5}{x^2 + 4x + 3} dx$$

11. Utilizando el cambio de variable $t = \ln x$, calcula:

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x} dx$$

12. Dados a y b dos números reales, calcula la integral indefinida:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{(a + b \cos x)^2} dx$$

Presta atención a las posibilidades $a = 0$ y $b = 0$.

Dada la función $f(x) = ax^2 + bxcos x + c$, determina las constantes a , b y c de manera que simultáneamente:

1. Su gráfica pase por el punto $(0, 1)$.
2. La recta tangente en ese punto $(0, 1)$ sea paralela a la recta $y = x$.
3. Se verifique que $\int_0^{\pi} f(x) dx = \pi \left(\frac{2\pi^2}{3} + 1 \right) - 2$.

- 1. IDEA CLAVE.** Las coordenadas de los puntos que pertenecen a una función son de la forma $(x, f(x))$. Así, si la función pasa por el punto $(0, 1) \rightarrow f(0) = 1$.

$$f(x) = ax^2 + bxcos x + c \xrightarrow{f(0)=1} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 \cdot \cos 0 + c = 1 \rightarrow c = 1$$

- 2. IDEA CLAVE.** Dos rectas paralelas tienen la misma pendiente, y la pendiente de la recta tangente en un punto x_0 es $f'(x_0)$.

La derivada de $f(x)$ es: $f'(x) = 2ax + b \cos x - b \sin x$

La pendiente de la recta tangente en $x = 0$ es: $f'(0) = 2a \cdot 0 + b \cdot \cos 0 - b \cdot 0 \cdot \sin 0 = b$

Y la pendiente de la recta $y = x$ es 1.

Como la recta $y = x$ es paralela a la tangente en $x = 0$, la pendiente de la tangente en $x = 0$ es también 1.

Es decir, $f'(0) = 1$.

$$\text{Así, tenemos que: } \begin{cases} f'(0) = b \\ f'(0) = 1 \end{cases} \rightarrow b = 1$$

La ecuación explícita de la recta es:

$$y = mx + n$$

donde m es la pendiente de la recta y n es la ordenada en el origen.

- 3. IDEA CLAVE.** Calculando la integral definida obtenemos su valor en función del parámetro a , e igualando este valor al resultado que nos da el enunciado, obtenemos a .

Calculamos una primitiva de la función $f(x)$:

$$\begin{aligned} \int (ax^2 + x \cos x + 1) dx &= \int ax^2 dx + \int x \cos x dx + \int 1 dx = \\ &\quad u = x \rightarrow du = 1 \\ &\quad dv = \cos x dx \rightarrow v = \sin x \\ &= \frac{ax^3}{3} + \left(x \sin x - \int \sin x dx \right) + x = \\ &= \frac{ax^3}{3} + x \sin x + \cos x + x \end{aligned}$$

Hallamos el valor de la integral definida:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} (ax^2 + x \cos x + 1) dx &= \left[\frac{ax^3}{3} + x \sin x + \cos x + x \right]_0^{\pi} = \\ &= \left(\frac{a\pi^3}{3} + \pi \sin \pi + \cos \pi + \pi \right) - \left(\frac{a \cdot 0^3}{3} + 0 \cdot \sin 0 + \cos 0 + 0 \right) = \frac{a\pi^3}{3} + \pi - 2 \end{aligned}$$

Igualemos el valor hallado en la integral con el valor que nos da el enunciado:

$$\frac{a\pi^3}{3} + \pi - 2 = \pi \left(\frac{2\pi^2}{3} + 1 \right) - 2 \rightarrow a\pi^3 + 3\pi = 2\pi^3 + 3\pi \rightarrow a = 2$$

HAZLO TÚ

1. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = e^{-2x}$.

a) Justifica que la recta de ecuación $y = -2e^x$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -\frac{1}{2}$.

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f , el eje de ordenadas y la recta tangente del apartado anterior.

2. Dada la función $f(x) = x^2 - 2x + 2$:

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$.

b) Calcula el área del recinto acotado limitado por la gráfica de f , la recta tangente obtenida en el apartado a) y el eje Y .

3. a) Para cada valor de $c > 0$, calcula el área de la región acotada entre la gráfica de la función $f(x) = cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1$, el eje X y las rectas $x = 0, x = 1$.

b) Halla el valor de c para el cual el área obtenida en el apartado a) es mínima.

4. Razona si para $F(x) = \frac{\int_0^{x^2} t^2 dt}{x^4}$ se satisface que $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} F'(x)$.

5. Dada la función $f(t) = at + b$ (con a y b constantes reales), se define

$F(x) = x \int_1^{x+1} f(t) dt$. Se pide obtener razonadamente:

a) La integral $\int_1^{x+1} f(t) dt$.

b) La expresión de la derivada de $F(x)$ de la función $F(x)$.

c) La relación entre los valores a y b para la que se verifica: $F''(0) = 0$.

6. Sea R el rectángulo del plano con vértices en los puntos $V_1(0, 0)$, $V_2(3, 0)$, $V_3(3, 9)$ y $V_4(0, 9)$. Demuestra que para todo valor de A la curva de ecuación $y = Ax^2 + (3 - 3A)x$ pasa por los vértices V_1 y V_3 y divide el rectángulo en dos regiones.

Calcula el área de dichas regiones y encuentra el valor de A para que la región situada por encima de la curva tenga un área doble que la situada por debajo de la curva.

7. Dada la función $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -\sqrt{2} \\ -x^2 + 2 & \text{si } x > -\sqrt{2} \end{cases}$, calcula el área de la región del plano limitada por las gráficas de $g(x)$ y $h(x) = |x|$.

8. En un plano, el trazado de una carretera discurre según la ecuación $y = \frac{x^2}{4} - x$, siendo un río el eje X .

En el terreno entre el río y la carretera hay un pinar. Si expresamos las distancias en kilómetros, ¿cuánto vale el pinar si la hectárea se paga a 60 €?



Combinatoria

- **Variaciones**

$$V_{n,m} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

- **Variaciones con repetición**

$$VR_{n,m} = n^m$$

- **Permutaciones**

$$P_n = V_{n,n} = n!$$

- **Combinaciones**

$$C_{n,m} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Distinción entre variaciones, permutaciones y combinaciones

¿Influye el orden?	No	Combinaciones			
	Sí	¿Se trabaja con todos los elementos?	Sí	Permutaciones	
			No	¿Se pueden repetir los elementos?	
					Sí
					Variaciones con repetición
					No
					Variaciones

Espacio muestral. Sucesos

El **espacio muestral**, E , de un experimento aleatorio está formado por todos los posibles resultados que se pueden producir al realizar el experimento.

- Un **suceso elemental** es cada uno de los posibles resultados del espacio muestral.
- Un **suceso compuesto** es el que está formado por dos o más sucesos elementales.
- El **suceso contrario** o **complementario** de un suceso A es otro suceso, que escribimos como $\bar{A}$, formado por todos los sucesos elementales del espacio muestral que no están en A .

Cuando dos sucesos pueden ocurrir simultáneamente, decimos que son **compatibles**; en caso contrario, se dice que son **incompatibles**.

Un **suceso** es **seguro** cuando ocurre siempre y un **suceso** es **imposible** cuando no ocurre nunca.

Operaciones con sucesos

- La **unión de dos sucesos**, A y B , es otro suceso formado por los sucesos elementales que hay en A y en B , y se escribe $A \cup B$.
- La **intersección de dos sucesos**, C y D , es otro suceso que está formado por los sucesos elementales comunes de C y de D , y se escribe $C \cap D$.

Propiedades de la probabilidad

- La probabilidad de cualquier suceso es igual a 1 menos la probabilidad de su contrario.

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

- Cuando dos sucesos son incompatibles, la probabilidad de su unión es la suma de sus probabilidades.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- Para dos sucesos cualesquiera, A y B , se verifica siempre que la probabilidad de su unión es igual a la suma de sus probabilidades menos la de la intersección.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Probabilidad condicionada

La probabilidad de B condicionado a A , utilizando la regla de Laplace, es:

$$P(B/A) = \frac{\text{n.º de casos en } A \cap B}{\text{n.º de casos en } A}$$

Teorema de la probabilidad total

Si tenemos una serie de sucesos, $A_1, A_2, \dots, A_n$, tales que:

- Son incompatibles entre sí: $A_i \cap A_j = \emptyset$, si $i \neq j$
- Su unión es el espacio muestral: $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$

Entonces podemos calcular la probabilidad de cualquier suceso B como:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) P(B/A_i)$$

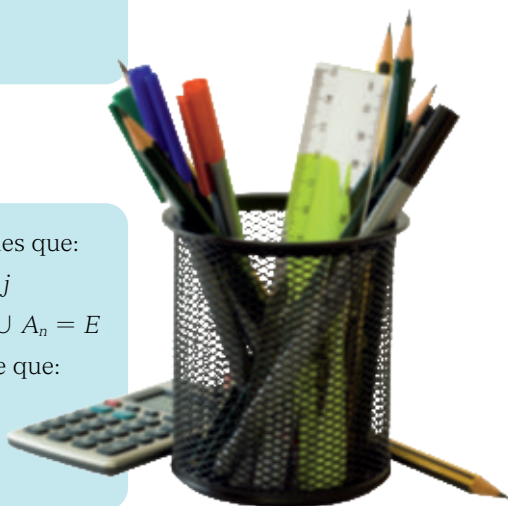
Teorema de Bayes

Si tenemos una serie de sucesos, $A_1, A_2, \dots, A_n$, tales que:

- Son incompatibles entre sí: $A_i \cap A_j = \emptyset$, si $i \neq j$
- Su unión es el espacio muestral: $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$

Sabiendo que ha ocurrido un suceso B , se cumple que:

$$P(A_j/B) = \frac{P(A_j) P(B/A_j)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) P(B/A_i)}$$





RESOLVER PROBLEMAS UTILIZANDO EL TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

Una entidad bancaria concede tres tipos de créditos: hipotecarios, para industria y personales. Se sabe que el 50 % de los créditos que concede son hipotecarios, el 20 % son para industria y el 30 % restantes son personales.

Han resultado impagados el 15 % de los créditos hipotecarios, el 25 % de los créditos para industria y el 30 % de los créditos personales.

Seleccionado un crédito al azar, calcula la probabilidad de que no se pague.



PRIMERO. Se comprueba si se puede aplicar el teorema de la probabilidad total.

- Existen $A_1, A_2, \dots, A_n$ incompatibles entre sí: $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$
- La unión de estos sucesos es el total: $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$

Definimos los sucesos:

A_1 = «Créditos hipotecarios»

A_2 = «Créditos para industria»

A_3 = «Créditos personales»

- Si un crédito es de una clase, no puede serlo de otra (los sucesos son incompatibles entre sí).
- Al escoger un crédito al azar, será de uno de los tipos anteriores (la unión de los sucesos es el total).

SEGUNDO. Calculamos la probabilidad de cada suceso.

$$P(A_1) = 0,5$$

$$P(A_2) = 0,2$$

$$P(A_3) = 0,3$$

TERCERO. Se aplica el teorema de la probabilidad total para calcular las probabilidades pedidas.

B = «Que el crédito no se pague»

$$P(B/A_1) = 0,15$$

$$P(B/A_2) = 0,25$$

$$P(B/A_3) = 0,3$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^3 P(A_i) \cdot P(B/A_i) = 0,5 \cdot 0,15 + 0,2 \cdot 0,25 + 0,3 \cdot 0,3 = 0,215$$

El 21,5 % de los créditos no se pagan.

RESOLVER PROBLEMAS UTILIZANDO EL TEOREMA DE BAYES

En una empresa de auditorías se ha contratado a tres personas para inspeccionar a las empresas bancarias realizando las correspondientes auditorías.

La primera de ellas se encarga de efectuar el 30 %, la segunda el 45 % y la tercera el 25 % restante. Se ha comprobado que de las inspecciones realizadas por la primera persona, el 1 % son erróneas; la segunda comete errores en el 3 % de los casos y la tercera en el 2 % de los casos.

Al elegir una inspección incorrecta, ¿cuál es la probabilidad de que la haya realizado la segunda persona?



PRIMERO. Se comprueba si se puede aplicar el teorema de Bayes.

- Existen $A_1, A_2, \dots, A_n$ incompatibles entre sí: $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$
- La unión de estos sucesos es el total: $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$

Definimos los sucesos:

A_1 = «Inspección del auditor 1»

A_2 = «Inspección del auditor 2»

A_3 = «Inspección del auditor 3»

- La auditoría solo la realiza un auditor (los sucesos son incompatibles entre sí).
- Al escoger una inspección al azar, habrá sido inspeccionada por uno de los auditores (la unión de los sucesos es el total).

SEGUNDO. Calculamos la probabilidad de cada suceso.

$$P(A_1) = 0,3$$

$$P(A_2) = 0,45$$

$$P(A_3) = 0,25$$

TERCERO. Se aplica el teorema de Bayes para calcular la probabilidad condicionada pedida.

B = «Inspección incorrecta»

$$P(B/A_1) = 0,01$$

$$P(B/A_2) = 0,03$$

$$P(B/A_3) = 0,02$$

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2) \cdot P(B/A_2)}{\sum_{i=1}^3 P(A_i) \cdot P(B/A_i)} = \frac{0,45 \cdot 0,03}{0,3 \cdot 0,01 + 0,45 \cdot 0,03 + 0,25 \cdot 0,02} = 0,554$$

El 55,4 % de las inspecciones incorrectas las hace el auditor 2.

En una ciudad en la que hay el doble de hombres que de mujeres, se declara una epidemia. Un 4% de los habitantes son hombres enfermos y el 3% son mujeres enfermas. Elegido un solo habitante de la ciudad, calcula:

- Probabilidad de que sea hombre.
- Si es hombre, probabilidad de que esté enfermo.
- Probabilidad de que sea mujer o esté sana.

a) IDEA CLAVE. La suma de las probabilidades de un suceso y su complementario es 1:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Definimos los sucesos que intervienen en el problema:

H = «Ser hombre en la ciudad»

M = «Ser mujer en la ciudad»

En = «Estar enfermo»

Hay el doble de hombres que de mujeres $\rightarrow P(H) = 2 \cdot P(M)$

H es el suceso complementario de $M \rightarrow P(H) + P(M) = 1$

$$2 \cdot P(M) + P(M) = 1 \rightarrow 3 \cdot P(M) = 1 \rightarrow P(M) = \frac{1}{3} = 0,33 \text{ y } P(H) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Luego la probabilidad pedida es $P(H) = \frac{2}{3} = 0,67$.

Es importante definir al inicio del problema los sucesos que van a intervenir en él y calcular sus probabilidades.

b) IDEA CLAVE. Cuando sabemos que ha ocurrido un suceso y nos piden la probabilidad de que ocurra otro, estamos ante un problema de probabilidad condicionada. Si ha ocurrido A , calcular la probabilidad de $B \rightarrow P(B/A)$.

Identificamos las probabilidades que nos da el problema:

El 4% de habitantes son hombres enfermos $\rightarrow P(H \cap En) = 0,04$

El 3% de habitantes son mujeres enfermas $\rightarrow P(M \cap En) = 0,03$

Aplicamos la definición de probabilidad condicionada:

$$P(En/H) = \frac{P(En \cap H)}{P(H)} = \frac{0,04}{0,67} = 0,06$$

No confundas la probabilidad de dos sucesos que se verifican a la vez, $A \cap B$, con la probabilidad condicionada, A/B .

c) IDEA CLAVE. La probabilidad de la unión de dos sucesos es la suma de sus probabilidades menos la probabilidad de su intersección: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Nos piden calcular $P(M \cup \bar{En})$.

$$P(M \cup \bar{En}) = P(M) + P(\bar{En}) - P(M \cap \bar{En})$$

Determinamos las probabilidades que faltan, haciendo uso de la tabla de contingencia.

	M	H	
En	0,03	0,04	0,07
$\bar{En}$	0,3	0,63	0,93
	0,33	0,67	1

$$\text{Así: } P(M \cup \bar{En}) = P(M) + P(\bar{En}) - P(M \cap \bar{En}) = 0,33 + 0,93 - 0,3 = 0,96$$

HAZLO TÚ

- En un experimento aleatorio que consiste en lanzar simultáneamente tres dados equilibrados de seis caras, se pide calcular la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos.
 - Obtener tres unos.
 - Obtener al menos un dos.
 - Obtener tres números distintos.
 - Obtener una suma de cuatro.
- Sean A y B dos sucesos tales que: $P(A) = \frac{1}{2}$ $P(\bar{B}) = \frac{2}{5}$ $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{3}{4}$
Calcula: a) $P(B/A)$ b) $P(\bar{A}/B)$
- En una urna hay cuatro bolas blancas y dos rojas. Se lanza una moneda; si sale cara se extrae una bola de la urna y, si sale cruz, se extraen, sin reemplazamiento, dos bolas de la urna. Halla la probabilidad de que se hayan extraído dos bolas rojas. Halla la probabilidad de que no se haya extraído ninguna bola roja.
- En la urna A hay 15 bolas, numeradas del 1 al 15, y en la urna B hay 10 bolas numeradas del 1 al 10. Si al extraer al azar una bola de cada urna la suma de los números es 12, ¿cuál es la probabilidad de que el número extraído de A fuera par?
- En una comunidad de vecinos el 30 % tiene microondas y lavavajillas, y el 50 % tiene microondas pero no lavavajillas. Finalmente, de los que tienen lavavajillas, el 75 % tiene microondas.
 - ¿Qué porcentaje de vecinos tiene microondas?
 - Entre los vecinos que tienen microondas, ¿qué porcentaje tiene lavavajillas?
 - ¿Qué porcentaje de vecinos tiene lavavajillas?
- En una granja de patos en la que solo hay dos tipos, unos de pico rojo y otros de pico amarillo, se observa que el 40 % son machos y con pico amarillo; el 20 % de todos los patos tienen el pico rojo; el 35 % de los patos que tienen el pico rojo son machos, mientras que solo el 15 % de los machos tienen el pico rojo. Elegido un pato al azar, calcula la probabilidad de que sea macho. Si el pato elegido ha sido hembra, ¿cuál es la probabilidad de que tenga el pico rojo?
- En una prueba teórica se plantean 4 tipos de examen: A , B , C y D . Se ha comprobado que la probabilidad de aprobar es 0,4 si el examen es del tipo A ; 0,6 si es del tipo B ; 0,56 si es del tipo C y 0,75 si es del tipo D . El número de alumnos que realiza cada tipo de examen es el mismo.
 - ¿Cuál es la probabilidad de suspender el examen?
 - Si se sabe que el alumno elegido al azar ha aprobado, ¿cuál es la probabilidad de que haya realizado el examen del tipo B ?
- Una urna A contiene 5 bolas blancas y 3 negras; otra urna B contiene 3 blancas y 4 negras. Se elige una urna al azar y se extrae una bola.
 - Probabilidad de que la bola extraída sea negra.
 - Si la bola extraída fue blanca, probabilidad de haber sido elegida de la urna A .



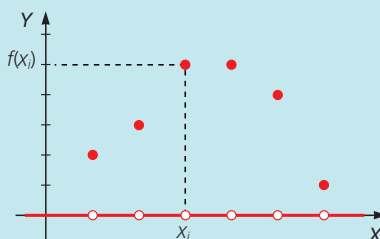
Distribuciones discretas

La forma de asignar las probabilidades a cada valor que toma la variable aleatoria, X , se llama **distribución de probabilidad**.

Una **distribución discreta** queda determinada si conocemos cualquiera de las siguientes funciones:

- La **función de probabilidad**, $f(x)$, que asigna a cada valor su probabilidad.

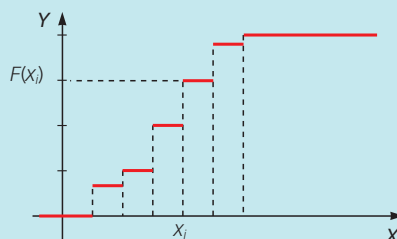
$$f(x_i) = P(X = x_i) \xrightarrow{\text{Verifica}} \begin{cases} f(x_i) \geq 0 \\ \sum_{i=1}^n f(x_i) = 1 \end{cases}$$



- La **función de distribución**, $F(x)$, que asigna a cada valor la probabilidad de que la variable tome valores menores o iguales que él.

$$F(x_i) = P(X \leq x_i) = \sum_{j=1}^i P(X = x_j)$$

$$F(x_i) \xrightarrow{\text{Verifica}} \begin{cases} F(x_i) = \sum_{j=1}^i f(x_j) \\ \text{Discontinua de salto finito} \end{cases}$$



Distribución binomial

Una variable aleatoria, X , sigue una **distribución de probabilidad binomial**, y lo escribimos como $X \equiv B(n, p)$, cuando:

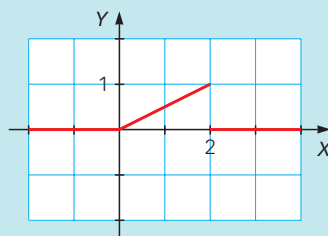
- La variable cuenta el número de veces que ocurre un suceso, A , al realizar el experimento aleatorio n veces.
- Depende de dos parámetros, n y p .
 - n = número de veces que se realiza el experimento
 - p = probabilidad de que ocurra el suceso A
- Las n veces que se realiza el experimento son independientes, es decir, lo que ocurra en una de ellas no influye en el resto de experimentos.
- Su función de probabilidad es: $f(x_i) = P(X = x_i) = \binom{n}{i} p^i (1 - p)^{n-i}$

Distribuciones continuas

Cuando la variable aleatoria es continua, su distribución de probabilidad es también continua. Una **distribución continua** queda determinada si conocemos cualquiera de las siguientes funciones:

- Una **función de densidad**, $f(x)$, es una función que cumple que $f(x) \geq 0$ para cualquier valor de x .
El área encerrada entre la función y el eje de abscisas es 1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

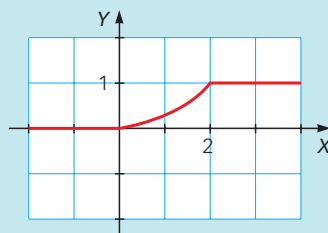


- La **función de distribución**, $F(x)$, asigna a cada valor la probabilidad de que la variable tome valores menores o iguales que él.

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

Su recorrido es: $\text{Im } F = [0, 1]$.

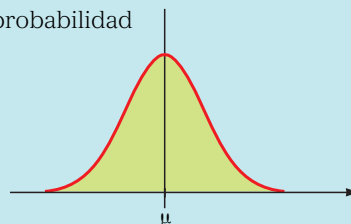
Es una función creciente.



Distribución normal

Una variable aleatoria, X , sigue una **distribución** de probabilidad **normal**, y lo escribimos como $X \equiv N(\mu, \sigma)$, cuando:

- La variable es una variable aleatoria continua.
- Depende de dos parámetros, μ y σ .
 μ = media de la variable aleatoria
 σ = desviación típica de la variable aleatoria
- Su función de densidad es simétrica respecto de la media.



Tipificación

Para **tipificar un valor** de una variable aleatoria X , primero se le resta la media de la variable, y el resultado se divide entre la desviación típica.

$$x \xrightarrow{\text{Tipificar}} \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Con el proceso de tipificación logramos transformar una variable en otra variable que tiene media $\mu = 0$ y desviación típica $\sigma = 1$.



DETERMINAR SI UNA VARIABLE ALEATORIA SIGUE UNA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Determina si la variable aleatoria que cuenta el número de caras, al lanzar tres veces una moneda, sigue una distribución binomial.

PRIMERO. Comprobamos que es una variable discreta.

La variable es discreta, pues solo puede tomar los valores 0, 1, 2 y 3.

SEGUNDO. Determinamos el experimento y contamos las veces que lo realizamos.

Lanzamos tres veces la moneda $\rightarrow n = 3$

TERCERO. Identificamos el suceso, calculamos su probabilidad y comprobamos que no varía cada vez que realizamos el experimento (experimentos independientes).

$$A = \text{«Salir cara»} \quad P(A) = \frac{1}{2} \text{ en cualquiera de las monedas}$$

Los experimentos son independientes, porque lo que sucede en una tirada no influye en la siguiente tirada. La variable sigue una distribución binomial.

CALCULAR PROBABILIDADES EN VARIABLES ALEATORIAS BINOMIALES

Un examen tipo test consta de 10 preguntas, cada una de las cuales tiene 4 posibles respuestas de las que solo una es correcta. Si contestamos al azar, calcula la probabilidad de acertar 7 respuestas.

PRIMERO. Definimos la variable aleatoria discreta que vamos a utilizar.

$X = \text{«Número de aciertos en el examen»}$

SEGUNDO. Calculamos los parámetros de la distribución.

n es el número de veces que realizamos el experimento, es decir, las preguntas que contestamos al azar, $10 \rightarrow n = 10$

p es la probabilidad de obtener un acierto cuando contestamos

$$\text{a una pregunta al azar} \rightarrow p = P(\text{Acertar pregunta}) = \frac{1}{4} = 0,25$$

Tenemos entonces que $X \equiv B(10; 0,25)$.

TERCERO. Escribimos el suceso en función de los valores de la variable aleatoria.

Acertar 7 respuestas $\rightarrow X = 7$

CUARTO. Calculamos la probabilidad pedida con ayuda de la función de probabilidad.

$$P(X = x_i) = \binom{10}{i} 0,25^i \cdot 0,75^{10-i} \quad P(X = 7) = \binom{10}{7} 0,25^7 \cdot 0,75^{10-7} = 0,0030899048$$

CALCULAR PROBABILIDADES EN VARIABLES ALEATORIAS BINOMIALES MEDIANTE TABLAS

Un examen tipo test consta de 8 preguntas, cada una de las cuales tiene 5 posibles respuestas de las que solo una es correcta. Si contestamos al azar, calcula la probabilidad de:

- Acertar 7 respuestas.
- Aprobar el examen (se aprueba con 4 preguntas acertadas).



PRIMERO. Calculamos los parámetros de la distribución.

$$n = 8$$

$$p = P(\text{Acertar la pregunta}) = \frac{1}{5} = 0,2$$

La variable estadística, X , sigue una distribución binomial $X \equiv B(8; 0,2)$.

SEGUNDO. Para utilizar las tablas tenemos que analizar tres datos:

n = número de experimentos

p = probabilidad de acierto

r = número de aciertos

El parámetro n marca el bloque de filas de la tabla donde tenemos que mirar.

En este caso, como $n = 8$, buscamos en el bloque donde aparece $n = 8$.

TERCERO. Buscamos, en el bloque que hemos indicado, la columna que corresponde al segundo parámetro, p .

En este caso, $p = 0,2$; por lo que dentro del bloque con $n = 8$ seleccionamos la columna donde aparece $p = 0,2$.

		p				
n	r	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25
8	0	0,6634	0,4305	0,2725	0,1678	0,1001
	1	0,2793	0,3826	0,3847	0,3355	0,2670
	2	0,0515	0,1488	0,2376	0,2936	0,3115
	3	0,0054	0,0331	0,0839	0,1468	0,2076
	4	0,0004	0,0046	0,0815	0,0459	0,0865
	5	0,0000	0,0004	0,0026	0,0092	0,0231
	6		0,0000	0,0002	0,0011	0,0038
	7			0,0000	0,0001	0,0004
	8				0,0000	0,0000

CUARTO. El último parámetro, r , nos indica la probabilidad que tenemos que hallar.

a) $P(X = 7) = 0,0001$

b) $P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) =$
 $= 0,0459 + 0,0092 + 0,0011 + 0,0001 = 0,0563$



CALCULAR PROBABILIDADES EN VARIABLES ALEATORIAS NORMALES MEDIANTE TABLAS

Las calificaciones de un grupo de alumnos de 2.º de Bachillerato sigue una distribución normal de media 4 puntos y desviación típica 0,5 puntos. Calcula la probabilidad de que, al escoger un alumno al azar, este haya aprobado (se aprueba con 5 puntos).

PRIMERO. Definimos la variable aleatoria y escribimos las probabilidades pedidas en función de la variable.

La variable aleatoria X es la puntuación obtenida en el examen de un alumno escogido al azar: $X \equiv N(4; 0,5)$.

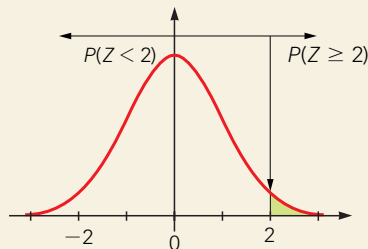
La probabilidad pedida es: $P(X \geq 5)$

SEGUNDO. Tipificamos la variable para utilizar la tabla de probabilidades de la distribución normal $Z \equiv N(0, 1)$.

$$P(X \geq 5) = P\left(\frac{X - 4}{0,5} \geq \frac{5 - 4}{0,5}\right) = P(Z \geq 2)$$

TERCERO. La tabla de probabilidades de la distribución normal $Z \equiv N(0, 1)$ mide la probabilidad de que sea menor o igual que un cierto número, $P(Z \leq a)$, y en ella solo aparecen números positivos. Por eso transformamos la probabilidad y los valores hasta que estos se puedan encontrar en la tabla.

$$P(Z \geq 2) = 1 - P(Z < 2)$$



CUARTO. Buscamos en la tabla:

- Hasta el primer decimal lo encontramos en la primera columna.
- Las columnas de la derecha nos indican el segundo decimal.

La probabilidad es igual al número que está en la intersección de estos.

$$\begin{aligned} P(Z \geq 2) &= 1 - P(Z < 2) = \\ &= 1 - 0,9772 = 0,0228 \end{aligned}$$

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875

APROXIMAR UNA VARIABLE ALEATORIA BINOMIAL A UNA NORMAL

Un examen tipo test consta de 100 preguntas, cada una de las cuales tiene 4 posibles respuestas de las que solo una es correcta. Si contestamos al azar, calcula las siguientes probabilidades.

- Aprobar el examen.
- Acertar menos de 20 preguntas.

PRIMERO. Decidimos si la variable aleatoria sigue una distribución binomial y $n > 8$.

En este caso, $X \equiv B(100; 0,25) \rightarrow n = 100 > 8$

SEGUNDO. Comprobamos si se puede aproximar por una distribución normal.

$$np = 100 \cdot 0,25 = 25 > 5$$

$$n(1 - p) = 100 \cdot 0,75 = 75 > 5$$

TERCERO. Calculamos los parámetros de la distribución normal a la que se aproxima.

$$\mu = np = 100 \cdot 0,25 = 25$$

$$\sigma = \sqrt{np(1 - p)} = \sqrt{100 \cdot 0,25 \cdot 0,75} = 4,33$$

Entonces tenemos que $X \equiv B(100; 0,25) \approx N(25; 4,33)$.

CUARTO. Determinamos cada uno de los sucesos.

- Aprobar el examen $\rightarrow X \geq 50$
- Acertar menos de 20 preguntas $\rightarrow X < 20$

QUINTO. Calculamos las probabilidades pedidas, tipificando la variable y usando la tabla de la distribución normal $Z \equiv N(0, 1)$.

$$\begin{aligned} \text{a) } P(X \geq 50) &= 1 - P(X < 49,5) = 1 - P\left(Z < \frac{49,5 - 25}{4,33}\right) = \\ &= 1 - P(Z < 5,66) = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(X < 20) &= P(X < 19,5) = P\left(Z < \frac{19,5 - 25}{4,33}\right) = P(Z < -1,27) = \\ &= 1 - P(Z \leq 1,27) = 1 - 0,8980 = 0,1020 \end{aligned}$$

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980

El tiempo en minutos transcurrido hasta que una persona es atendida en la sucursal A de un banco sigue una distribución normal de media $\mu = 9$ y desviación típica $\sigma = 1$, mientras que el tiempo transcurrido hasta que es atendido en la sucursal B sigue, también, una distribución normal de media $\mu = 8,5$ y varianza $\sigma^2 = 4$.

- a) Si un cliente tiene que hacer una gestión y solo dispone de 10 minutos, ¿en qué sucursal, A o B, será más fácil que le hayan atendido en el tiempo del que dispone?
- b) ¿Cuánto debe valer x si sabemos que el 80% de los clientes que van a la sucursal B esperan más de x minutos?

a) **IDEA CLAVE.** Antes de comenzar la resolución del problema identificamos las distribuciones que aparecen.

En el enunciado del problema aparecen dos distribuciones:

X: «Tiempo, en minutos, transcurrido hasta que una persona es atendida en la sucursal A» $\rightarrow X \equiv N(9, 1)$

Y: «Tiempo, en minutos, transcurrido hasta que una persona es atendida en la sucursal B» $\rightarrow Y \equiv N(8,5; 2)$

Tenemos que calcular las siguientes probabilidades:

$$\begin{aligned} \blacksquare P(0 \leq X \leq 10) &= P\left(\frac{0-9}{1} \leq Z \leq \frac{10-9}{1}\right) = P(-9 \leq Z \leq 1) = \\ &= P(Z \leq 1) - P(Z < -9) = P(Z \leq 1) - (1 - P(Z \leq 9)) = \\ &= P(Z \leq 1) + P(Z \leq 9) - 1 = 0,8413 + 1 - 1 = 0,8413 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare P(0 \leq Y \leq 10) &= P\left(\frac{0-8,5}{2} \leq Z \leq \frac{10-8,5}{2}\right) = P(-4,25 \leq Z \leq 0,75) = \\ &= P(Z \leq 0,75) - P(Z < -4,25) = P(Z \leq 0,75) - (1 - P(Z \leq 4,25)) = \\ &= P(Z \leq 0,75) + P(Z \leq 4,25) - 1 = 0,7734 + 1 - 1 = 0,7734 \end{aligned}$$

Es más fácil que lo atiendan en la sucursal A en el tiempo del que dispone.

b) **IDEA CLAVE.** Cuando se pide un valor de la variable, lo despejamos en la tipificación de dicha variable.

Tenemos que encontrar un valor k de la distribución $N(0, 1)$ que cumpla $P(Z > k) = 0,8$.

$$P(Z > k) = 1 - P(Z < k) = 0,8 \rightarrow P(Z < k) = 0,2$$

Por tanto: $P(Z < k) = 1 - P(Z < -k) = 0,2 \rightarrow P(Z < -k) = 0,8$.

Buscamos en las tablas el valor de Z que se aproxime más a 0,8. El valor que más se aproxima es 0,7995 que corresponde a 0,84. Por tanto:

$$P(Z < 0,84) = 0,7995 \rightarrow -k = 0,84 \rightarrow k = -0,84$$

$$\text{Como } P(Y > y) = P\left(\frac{Y - \mu}{\sigma} > \frac{y - \mu}{\sigma}\right) = P(Z > k) = 0,8 \rightarrow k = \frac{y - \mu}{\sigma}$$

Y sabemos que $k = -0,84$, $\mu = 0,85$ y $\sigma = 2$:

$$k = \frac{y - \mu}{\sigma} \rightarrow -0,84 = \frac{y - 0,85}{2} \rightarrow y = 6,82$$

Es decir, el 80% de los clientes que van a la sucursal B esperan más de 6,82 minutos.

Recuerda que en la tabla de la normal aparece solo la probabilidad acumulada para los valores positivos. Para hallar la probabilidad de los valores negativos se utiliza:
 $P(Z < -k) = 1 - P(Z \leq k)$

HAZLO TÚ

1. Se sabe que las puntuaciones de un test siguen una ley normal de media 36 y desviación típica 4,8.

- a) Si se toma una muestra aleatoria de 16 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que la media de esta muestra sea superior a 35 puntos?
- b) ¿Qué porcentaje de muestras de tamaño 25 tiene una media muestral comprendida entre 34 y 36?

2. Se han tomado las tallas de 16 bebés, elegidos al azar, de entre los nacidos en un cierto hospital, y se han obtenido los siguientes resultados, en centímetros:

51	50	53	48	49	50	51	48
50	51	50	47	51	51	49	51

La talla de los bebés sigue una ley normal de desviación típica 2 centímetros y media desconocida. ¿Cuál es la distribución de las medias de las muestras de tamaño 16?

3. El peso de los bebés al nacer sigue una ley normal de media $\mu = 3200$ gramos y desviación típica $\sigma = 312$.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que un niño pese más de 3,4 kg al nacer?
- b) Para una muestra de 169 niños, ¿cuál es la probabilidad de que el peso medio sea menos de 3150 gramos?

4. En un test que mide ciertas habilidades específicas, las puntuaciones se distribuyen normalmente, con media 100 y desviación típica 25. El 20% de puntuaciones más altas corresponde al grupo de los superdotados, y el 20% de puntuaciones más bajas, al de los infradotados. Calcula las puntuaciones que delimitan los distintos grupos.

5. La talla de los recién nacidos se distribuye normalmente, pero mientras que en la Comunidad Autónoma A la media es de 52 cm y la desviación típica de 3 cm, en la B la media es de 53 cm y la desviación típica de 5 cm.

- a) Halla, en el primero de los casos, entre qué valores simétricos respecto a la media está el 50% (central) de las tallas de los recién nacidos.
- b) Determina en cuál de las dos Comunidades es mayor la proporción de recién nacidos con talla superior a 50 cm.

6. Una máquina de envasado automático de refrescos vierte en cada lata una cantidad de refresco que puede suponerse que sigue una distribución normal de media $\mu = 32,5$ cl y desviación típica $\sigma = 0,5$ cl. El llenado de la lata se considera «incorrecto» si la cantidad de refresco vertido es inferior a 31,5 cl o superior a 34 cl.

- a) ¿Cuál es el porcentaje de llenados incorrectos para esta máquina?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que en el llenado de 3 latas con esa máquina todos los llenados sean correctos?



