

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I

SOLUCIONARIO

Este material es una obra colectiva concebida, diseñada y creada en el Departamento de Ediciones de Santillana, bajo la dirección de **Teresa Grence**.

En su elaboración han participado::

Sonia Alejo Sánchez

María Arribas Fernández

José María Fernández Díaz

Coral Victoria de la Iglesia Meleiro

Clara Inés Lavado Campos

Silvia Marín García

Natalia Polo Rodríguez

Lorena Ramos San Millán

Rocío Rubio Álvarez

María de las Mercedes Sánchez Martín

EDICIÓN

Sonia Alejo Sánchez

Clara Inés Lavado Campos

Silvia Marín García

Aída Moya Librero

EDICIÓN EJECUTIVA

Carlos Pérez Saavedra

DIRECCIÓN DEL PROYECTO

Domingo Sánchez Figueroa



DESAFÍO

Una tirada de campanillas

Nuestra campeona de tiro se ha propuesto un reto que considera muy difícil, se trata de disparar a la diana con los ojos vendados, guiándose simplemente por el sonido de una campanilla.

Ha hecho pruebas y acierta 2 de cada 7 tiros. ¿Cuántas veces debe tirar para poder asegurar que acertará 5 veces con una probabilidad superior al 70%?

$B(n, 2/7)$

$P(X \geq 5) \geq 0,7$

$P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + \dots > 0,7$

Si $N > 17,5$ se puede hacer una aproximación a la normal.

Para $N = 20$:

$\mu = 20 \cdot \frac{2}{7} = 5,71$

$\sigma = \sqrt{20 \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{7}} = 2,02$

$$P(X \geq 5) = P\left(Z > \frac{4,5 - 5,71}{2,02}\right) =$$
$$= P(Z < 0,6) = 0,7257$$

PIENSA

PÁG. 270. ¿Como sería una variable aleatoria que asignara a cualquier suceso el mismo número?

No sería una variable aleatoria sino que sería una constante.

PÁG. 277. ¿Puede suceder que una variable aleatoria siga una distribución normal con una desviación típica igual a cero?

Toda la probabilidad se concentraría en la media, entonces no sería una variable aleatoria.

ACTIVIDADES

1 Se lanzan dos dados de 6 caras.

a) ¿La función que asigna a cada suceso elemental la suma de las puntuaciones es una variable aleatoria?

b) Elabora su tabla de valores y represéntala gráficamente.

a) El espacio muestral es: $E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

La función X que asigna a cada suceso la suma de las puntuaciones es una variable aleatoria.

$X(1, 1) = 2, X(1, 2) = 3, X(1, 3) = 4,$

$X(1, 4) = 5, X(1, 5) = 6, X(1, 6) = 7$

$X(2, 1) = 3, X(2, 2) = 4, X(2, 3) = 5,$

$X(2, 4) = 6, X(2, 5) = 7, X(2, 6) = 8$

$X(3, 1) = 4, X(3, 2) = 5, X(3, 3) = 6,$

$X(3, 4) = 7, X(3, 5) = 8, X(3, 6) = 9$

$X(4, 1) = 5, X(4, 2) = 6, X(4, 3) = 7,$

$X(4, 4) = 8, X(4, 5) = 9, X(4, 6) = 10$

$X(5, 1) = 6, X(5, 2) = 7, X(5, 3) = 8,$

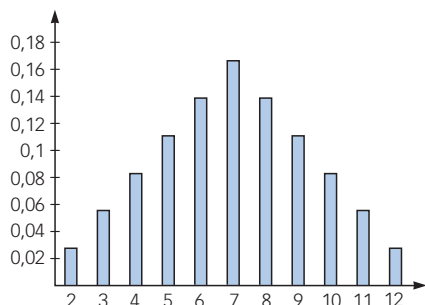
$X(5, 4) = 9, X(5, 5) = 10, X(5, 6) = 11$

$X(6, 1) = 7, X(6, 2) = 8, X(6, 3) = 9,$

$X(6, 4) = 10, X(6, 5) = 11, X(6, 6) = 12$

b)

x	$P(X = x_i)$	$P(Y \leq x_i)$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
3	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$
4	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{18}$
6	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{12}$
7	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$
8	$\frac{5}{36}$	$\frac{13}{18}$
9	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{6}$
10	$\frac{1}{12}$	$\frac{11}{12}$
11	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$
12	$\frac{1}{36}$	1



2 Se considera el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado y una moneda.

- Calcula el espacio muestral y la probabilidad de cada suceso elemental.
- Define dos variables aleatorias y represéntalas.

a) El espacio muestral es:

$$E = \{(1, C), (2, C), (3, C), (4, C), (5, C), (6, C), (1, +), (2, +), (3, +), (4, +), (5, +), (6, +)\}$$

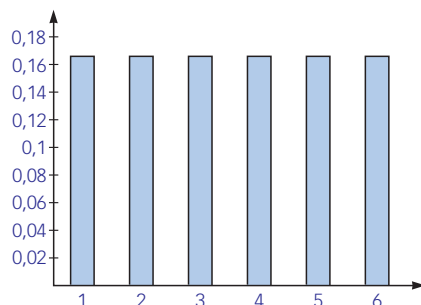
La probabilidad de cada suceso elemental es $\frac{1}{2}$.

b) Respuesta abierta.

La función X asigna a cada suceso el número obtenido en el dado.

$$\begin{aligned} X(1, C) = 1, X(2, C) = 2, X(3, C) = 3, \\ X(4, C) = 4, X(5, C) = 5, X(6, C) = 6 \\ X(1, +) = 1, X(2, +) = 2, X(3, +) = 3, \\ X(4, +) = 4, X(5, +) = 5, X(6, +) = 6 \end{aligned}$$

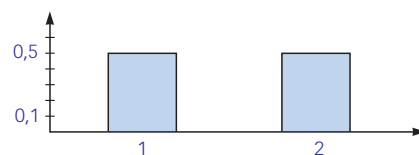
x	$P(X = x_i)$	$P(X \leq x_i)$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$
5	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$
6	$\frac{1}{6}$	1



La función Y asigna a cada suceso elemental el número 1 si sale cara en la moneda y 2 si sale cruz.

$$\begin{aligned} Y(1, C) = 1, Y(2, C) = 1, Y(3, C) = 1, \\ Y(4, C) = 1, Y(5, C) = 1, Y(6, C) = 1 \\ Y(1, +) = 2, Y(2, +) = 2, Y(3, +) = 2, \\ Y(4, +) = 2, Y(5, +) = 2, Y(6, +) = 2 \end{aligned}$$

x	$P(Y = y_i)$	$P(Y \leq y_i)$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{2}$	1



3 En una urna hay 5 bolas rojas y 3 azules. Se extraen tres bolas y se anota el número de bolas azules que se han conseguido. Realiza una tabla con la distribución de probabilidad de este experimento, y halla la media y la desviación típica.

x	$P(X = x_i)$	$P(X \leq x_i)$
0	$\frac{5}{28}$	$\frac{5}{28}$
1	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{7}$
2	$\frac{15}{56}$	$\frac{55}{56}$
3	$\frac{1}{56}$	1

$$\text{Media: } \mu = \frac{9}{8} = 1,125$$

$$\text{Desviación típica: } \sigma = \sqrt{0,502} = 0,709$$

- 4 Un dado trucado tiene esta distribución de probabilidad. Halla el valor que falta, la media y la desviación típica.

$X = \text{«Puntuación»}$	1	2	4	5	6
$P(X = x_i)$	0,1	0,12	0,2	0,3	0,15

La probabilidad que falta, p , es para el caso $X = 3$. Como la suma de todas las probabilidades tiene que ser 1, tenemos que:

$$0,1 + 0,12 + 0,2 + 0,3 + 0,15 + p = 1 \rightarrow p = 0,13$$

$$\mu = 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,12 + 3 \cdot 0,13 + 4 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,3 + 6 \cdot 0,15 = 3,93$$

$$\sigma = \sqrt{\sum p_i x_i^2 - 3,93^2} = 1,55$$

- 5 En el experimento aleatorio que consiste en lanzar 3 monedas al aire, consideramos la variable aleatoria X , que asocia a cada suceso elemental el número de caras obtenidas. Halla y representa las funciones de probabilidad y de distribución.

Determinamos el espacio muestral, siendo $C = \text{«Cara»}$ y $+= \text{«Cruz»}$:

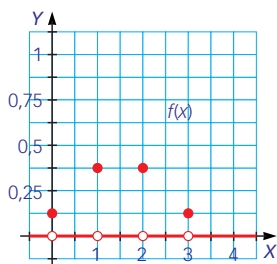
$$E = \{CCC, CC+, C+C, C++, +CC, +C+, ++C, +++\}$$

$$P(X = 3) = \frac{1}{8} \quad P(X = 1) = \frac{3}{8}$$

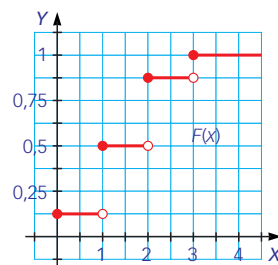
$$P(X = 2) = \frac{3}{8} \quad P(X = 0) = \frac{1}{8}$$

Las funciones de probabilidad y de distribución serían, respectivamente:

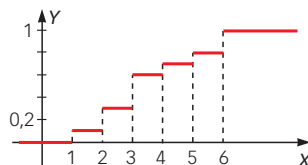
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{si } x = 0 \text{ o } x = 3 \\ \frac{3}{8} & \text{si } x = 1 \text{ o } x = 2 \\ 0 & \text{en el resto de valores} \end{cases}$$



$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{8} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$



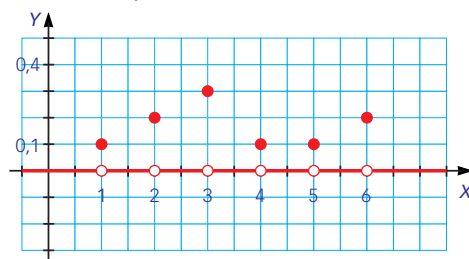
- 6 Esta es la gráfica de una función de distribución. Halla y representa la función de probabilidad.



Determinamos el espacio muestral, siendo $C = \text{«Cara»}$ y $+= \text{«Cruz»}$:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\infty < x < 1 \\ 0,1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0,3 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 0,6 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 0,7 & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 0,8 & \text{si } 5 \leq x < 6 \\ 1 & \text{si } 6 \leq x < +\infty \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow f(x) = \begin{cases} 0,1 & \text{si } x = 1, 4, 5 \\ 0,2 & \text{si } x = 2, 6 \\ 0,3 & \text{si } x = 3 \\ 0 & \text{en el resto de valores} \end{cases}$$



- 7 Comprueba si la variable aleatoria que cuenta el número de veces que sale un 5, al lanzar cuatro veces un dado de seis caras, sigue una distribución binomial.



La variable es discreta, porque solo puede tomar los valores 0, 1, 2, 3 y 4.

$n = 4$ es el número de veces que se realiza el experimento.

Sea $A = \text{«Salir un 5»}$, entonces $P(A) = \frac{1}{6}$.

Los experimentos son independientes, porque lo que sucede en un lanzamiento no influye en el siguiente.

Por tanto, la variable sigue una distribución binomial: $B\left(4, \frac{1}{6}\right)$.

- 8 Se lanza tres veces un dado de cuatro caras y se considera la variable aleatoria que cuenta las veces que sale 3. Identifica qué distribución $B(n, p)$ sigue esta variable y calcula su media y su varianza a partir de la distribución de probabilidad. Comprueba que se cumple que $\mu = np$ y $\sigma^2 = npq$.

La variable es discreta y mide la cantidad de veces que se repite un suceso («Salir 3»), que no depende de los sucesos anteriores. La probabilidad de que ocurra ese suceso es $\frac{1}{4}$, por tanto, la variable aleatoria sigue una distribución $B\left(3, \frac{1}{4}\right)$.

$$P(X = 0) = \binom{3}{0} \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{3-0} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$$

$$P(X = 1) = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{3-1} = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{16} = \frac{27}{64}$$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{3-2} = 3 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{64}$$

$$P(X = 3) = \binom{3}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{3-3} = \frac{1}{64}$$

Calculamos la media y la varianza:

$$\mu = 0 \cdot \frac{27}{64} + 1 \cdot \frac{27}{64} + 2 \cdot \frac{9}{64} + 3 \cdot \frac{1}{64} = \frac{48}{64} = \frac{3}{4}$$

$$np = 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \mu$$

$$\sigma^2 = 0^2 \cdot \frac{27}{64} + 1^2 \cdot \frac{27}{64} + 2^2 \cdot \frac{9}{64} + 3^2 \cdot \frac{1}{64} - \frac{3^2}{4^2} = \frac{18}{16} - \frac{9}{16} = \frac{9}{16}$$

$$npq = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16} = \sigma^2$$

- 9 Una variable aleatoria, X , sigue una distribución binomial $B(8; 0,6)$. Calcula las distintas probabilidades que aparecen a continuación.

a) $P(X = 4)$ d) $P(3 \leq X \leq 5)$

b) $P(X < 2)$ e) $P(X \leq 7)$

c) $P(X \geq 6)$ f) $P(0 < X < 8)$

a) $P(X = 4) = \binom{8}{4} \cdot 0,6^4 \cdot 0,4^4 = 0,23$

b) $P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,0085$

c) $P(X \geq 6) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) = 0,315$

d) $P(3 \leq X \leq 5) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 0,635$

e) $P(X \leq 7) = 1 - P(X = 8) = 0,983$

f) $P(0 < X < 8) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 8)) = 0,9825$

- 10 En un laboratorio de análisis clínicos saben que el 98 % de las pruebas de diabetes que realizan resultan negativas. Si han recibido 10 muestras para analizar:

a) Determina la probabilidad de que haya dos personas a las que la prueba les dé positivo.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la prueba resulte positiva a más de una persona?

$X \equiv B(10; 0,02)$

a) $P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot 0,02^2 \cdot 0,98^8 = 0,01531$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } P(X > 1) &= 1 - P(X \leq 1) = \\
 &= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = \\
 &= 1 - \binom{10}{0} \cdot 0,02^0 \cdot 0,98^{10} - \\
 &\quad - \binom{10}{1} \cdot 0,02^1 \cdot 0,98^9 = \\
 &= 1 - 0,8171 - 0,1667 = 0,0162
 \end{aligned}$$

- 11 Se considera la variable aleatoria que cuenta el número de bolas blancas que se obtienen al sacar tres veces una bola de un recipiente que contiene 2 bolas blancas y 3 rojas, y después de anotar el color, devolver la bola al recipiente. Calcula, utilizando la tabla de la distribución binomial, la probabilidad de que haya anotado 2 bolas blancas.

$$X \equiv B\left(3, \frac{2}{5}\right)$$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \frac{3}{5} = 0,288$$

- 12 Si se considera el mismo experimento de la actividad anterior, calcula:

a) La probabilidad de que todas las bolas extraídas sean del mismo color.

b) La probabilidad de obtener alguna bola que sea de color rojo.

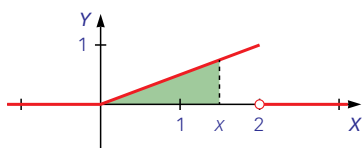
$$\begin{aligned}
 \text{a) } P(X = 3) + P(X = 0) &= \\
 &= \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^0 + \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \\
 &= 0,28
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } 1 - P(X = 3) &= \\
 &= 1 - \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^0 = 0,936
 \end{aligned}$$

- 13 Calcula el valor de k para que la siguiente función sea de densidad, y halla su función de distribución asociada.

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

La gráfica de $f(x)$ es:



$$1 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 2k}{2} = 2k \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

Para $0 \leq x \leq 2$, la función de distribución es el área del triángulo de base x y de altura $\frac{x}{2}$. Por tanto:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{4} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

- 14 Halla la función de distribución de esta función de densidad.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\infty < x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x < +\infty \end{cases}$$

Para $0 \leq x \leq 1$, la función de distribución es el área del rectángulo de base x y de altura 1. Por tanto:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

- 15 Los ebanistas tienen un salario medio de 1280 €, con una desviación típica de 200 €; y los fontaneros, 1060 €, con una desviación típica de 180 €. Si a un ebanista le ofrecen un sueldo de 1320 € y a un fontanero otro de 1100 €, ¿cuál de los dos recibe la mejor oferta?

Tipificamos las distribuciones para compararlas.

Ebanista:

$$1320 \xrightarrow{\text{Tipificar}} \frac{1320 - 1280}{200} = 0,2$$

Fontanero:

$$1100 \xrightarrow{\text{Tipificar}} \frac{1100 - 1060}{180} = 0,222$$

$$0,2 < 0,222$$

Es mejor oferta la del fontanero.

- 16 Compara los datos de estas distribuciones.

$$x_1 = 2 \text{ (con } \mu = 1, \sigma = 2)$$

$$x_2 = 1 \text{ (con } \mu = 2, \sigma = 1)$$

$$x_3 = 1,5 \text{ (con } \mu = 1,5, \sigma = 1,5)$$

$$z_1 = \frac{2 - 1}{2} = 0,5$$

$$Z_2 = \frac{1-2}{1} = -1$$

$$Z_3 = \frac{1,5-1,5}{1,5} = 0$$

$$Z_2 < Z_3 < Z_1$$

- 17 Si la variable aleatoria X sigue una distribución normal $X \equiv N(5, 2)$, calcula las siguientes probabilidades.

a) $P(X < 2)$ d) $P(X \geq 6)$

b) $P(X > 3)$ e) $P(X < 7)$

c) $P(X \leq 4)$ f) $P(X \leq 8)$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(X < 2) &= P\left(\frac{X-5}{2} < \frac{2-5}{2}\right) = \\ &= P(Z < -1,5) = 1 - P(Z \leq 1,5) = \\ &= 1 - 0,9332 = 0,0668 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(X > 3) &= P\left(\frac{X-5}{2} > \frac{3-5}{2}\right) = \\ &= P(Z > -1) = P(Z < 1) = 0,8413 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } P(X \leq 4) &= P\left(\frac{X-5}{2} \leq \frac{4-5}{2}\right) = \\ &= P(Z \leq -0,5) = 1 - P(Z < 0,5) = \\ &= 0,3085 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } P(X \geq 6) &= 1 - P\left(\frac{X-5}{2} < \frac{6-5}{2}\right) = \\ &= 1 - P(Z < 0,5) = 0,3085 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } P(X < 7) &= P\left(\frac{X-5}{2} < \frac{7-5}{2}\right) = \\ &= P(Z < 1) = 0,8413 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } P(X \leq 8) &= P\left(\frac{X-5}{2} \leq \frac{8-5}{2}\right) = \\ &= P(Z \leq 1,5) = 0,9332 \end{aligned}$$

- 18 El colesterol en una persona sigue una distribución normal $N(192, 12)$. Calcula la probabilidad de que una persona tenga un nivel de colesterol:

a) Superior a 200 unidades.

b) Entre 180 y 220 unidades.

$$\begin{aligned} \text{a) } P(X > 200) &= \\ &= P\left(\frac{X-192}{12} > \frac{200-192}{12}\right) = \\ &= P(Z > 0,67) = 1 - P(Z \leq 0,67) = \\ &= 1 - 0,7486 = 0,2514 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(180 < X < 220) &= \\ &= P\left(\frac{180-192}{12} < \frac{X-192}{12} < \right. \\ &\quad \left. < \frac{220-192}{12}\right) = \\ &= P(-1 < Z < 2,33) = \\ &= P(Z < 2,33) - (1 - P(Z < 1)) = \\ &= 0,9901 - (1 - 0,8413) = 0,8314 \end{aligned}$$

- 19 Una fábrica elabora 2000 circuitos electrónicos al día y la probabilidad de que uno sea defectuoso es de 1%. ¿Cuál es la probabilidad de que se fabriquen más de 50 circuitos defectuosos en un día? ¿Y menos de 25?

$$X \equiv B(2000; 0,01) \approx N(20; 4,45)$$

$$\begin{aligned} P(X > 50) &= P\left(\frac{X-20}{4,45} > \frac{49,5-20}{4,45}\right) = \\ &= P(Z > 6,63) = 1 - P(Z \leq 6,63) = \\ &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X < 25) &= P\left(\frac{X-20}{4,45} < \frac{25,5-20}{4,45}\right) = \\ &= P(Z < 1,24) = 0,8925 \end{aligned}$$

- 20 El 10% de las personas de una ciudad afirma que no ve nunca televisión. Escogidas 100 personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 14 no vean la televisión? ¿Y de que sean exactamente 14?

$$X \equiv B(100; 0,1) \approx N(10; 3)$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 14) &= P\left(\frac{X-10}{3} \geq \frac{13,5-10}{3}\right) = \\ &= P(Z \geq 1,17) = 1 - P(Z < 1,17) = \\ &= 1 - 0,8790 = 0,1210 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 14) &= P(13,5 < X < 14,5) = \\ &= P\left(\frac{13,5-10}{3} < \frac{X-10}{3} < \frac{14,5-10}{3}\right) = \\ &= P(1,17 < Z < 1,5) = \\ &= P(Z < 1,5) - P(Z \leq 1,17) = \\ &= 0,9332 - 0,8790 = 0,0542 \end{aligned}$$

PRACTICA

- 21 Un estudio médico asegura que 1 de cada 8 niños tiene gingivitis. Escogidos 7 niños al azar, determina:

- a) Qué tipo de distribución sigue la variable que cuenta el número de niños con la enfermedad.
- b) La probabilidad de que haya exactamente 2 niños con la enfermedad.
- c) La probabilidad de que ninguno de los niños tenga la enfermedad.
- d) La media y la varianza de la variable.

a) La variable que cuenta el número de niños con la enfermedad es una variable discreta que cuenta el número de veces que ocurre un suceso determinado («Tener gingivitis»), y que ocurra ese suceso es independiente de si ha ocurrido o no antes.

Por tanto, la variable estadística X sigue una distribución binomial. Calculemos los valores de los parámetros.

El número de experimentos es 7.

La probabilidad de que ocurra

el suceso es $\frac{1}{8} = 0,125$.

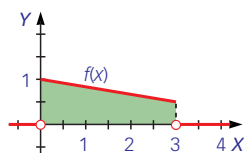
Por tanto, $X \equiv B(7; 0,125)$.

- b) $P(X = 2) = 0,168$.
- c) $P(X = 0) = 0,393$
- d) $\mu = 7 \cdot 0,125 = 0,875$
 $\sigma^2 = 7 \cdot 0,125 \cdot 0,875 = 0,766$

- 22 Calcula la función de distribución de una variable aleatoria continua con esta función de densidad.

$$f(x) = \begin{cases} kx + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Dibujamos la función de densidad:



Como se ve en la figura, entre 0 y 3 la función de distribución $F(x)$ representa el área de un trapecio rectángulo cuyas bases miden, respectivamente, 1 y $kx + 1$, y su altura, x . Por tanto, entre 0 y 3:

$$F(x) = \frac{1 + (kx + 1)}{2} \cdot x = \frac{2 + kx}{2} \cdot x = x + \frac{k}{2}x^2$$

Para que sea función de distribución se tiene que cumplir:

$$F(3) = 3 + \frac{k}{2} \cdot 3^2 = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow 3 + \frac{9k}{2} = 1 \rightarrow \frac{9k}{2} = -2 \rightarrow k = -\frac{4}{9}$$

Así, tenemos que la función de distribución

$$\text{es } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x - \frac{2x^2}{9} & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ 1 & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

- 23 Calcula la función de distribución de una variable aleatoria continua con esta función de densidad.

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Entre 1 y 3 la función de distribución $F(x)$ sería el área del rectángulo que tiene como uno de los lados k y su otro lado mide la distancia de 1 a x , es decir, $x - 1$. Por tanto, entre 1 y 3 $F(x) = k(x - 1)$. Para que sea función de distribución se tiene que cumplir:

$$F(3) = k(3 - 1) = 1 \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

Así, tenemos que la función de distribución sería:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{x-1}{2} & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

- 24 Calcula estas probabilidades.

- a) $P(Z \geq 0,7)$
- b) $P(Z \geq 1,73)$
- c) $P(Z \geq 2,03)$
- a) $P(Z \geq 0,7) = 1 - P(Z < 0,7) = 0,2420$
- b) $P(Z \geq 1,73) = 1 - P(Z < 1,73) = 0,0418$
- c) $P(Z \geq 2,03) = 1 - P(Z < 2,03) = 0,0212$

- 25 Calcula estas probabilidades.

- a) $P(0,2 \leq Z \leq 0,9)$
- b) $P(1,2 \leq Z \leq 1,9)$

$$a) P(0,2 \leq Z \leq 0,9) = \\ = P(Z \leq 0,9) - P(Z < 0,2) = 0,2366$$

$$b) P(1,2 \leq Z \leq 1,9) = \\ = P(Z \leq 1,9) - P(Z \leq 1,2) = 0,0864$$

26 Calcula estas probabilidades.

$$a) P(Z \leq -1,3) \quad c) P(Z \geq -1,82)$$

$$b) P(Z \geq -1,3) \quad d) P(Z \leq -1,82)$$

$$a) P(Z \leq -1,3) = 1 - P(Z < 1,3) = 0,0968$$

$$b) P(Z \geq -1,3) = P(Z \leq 1,3) = 0,9032$$

$$c) P(Z \geq -1,82) = P(Z \leq 1,82) = 0,9656$$

$$d) P(Z \leq -1,82) = 1 - P(Z < 1,82) = \\ = 0,0344$$

27 Halla a en cada una de las siguientes expresiones.

$$a) P(Z < a) = 0,8907$$

$$b) P(Z < a) = 0,3446$$

$$c) P(Z < a) = 0,49$$

$$d) P(Z > a) = 0,1$$

$$Z \equiv N(0, 1)$$

$$a) P(Z < a) = 0,8907 \rightarrow a = 1,23$$

$$b) P(Z < a) = 0,3446 \rightarrow \\ \rightarrow P(Z \leq -a) = 1 - 0,3446 = 0,6554 \rightarrow \\ \rightarrow -a = 0,4 \rightarrow a = -0,4$$

$$c) P(Z < a) = 0,49 \rightarrow \\ \rightarrow P(Z \leq -a) = 1 - 0,49 = 0,51 \rightarrow \\ \rightarrow -a = 0,025 \rightarrow a = -0,025$$

$$d) P(Z > a) = 0,1 \rightarrow 1 - P(Z < a) = 0,1 \rightarrow \\ \rightarrow P(Z < a) = 0,9 \rightarrow a = 1,28$$

28 Considera la variable aleatoria, X , que sigue una distribución $N(12; 0,6)$. Calcula $P(11,2 \leq X \leq 12,5)$.

$$P(11,2 \leq X \leq 12,5) = \\ = P(X \leq 12,5) - P(X < 11,2) = \\ = P\left(\frac{X - 12}{0,6} \leq \frac{12,5 - 12}{0,6}\right) - \\ - P\left(\frac{X - 12}{0,6} < \frac{11,2 - 12}{0,6}\right) = \\ = P(Z \leq 0,83) - P(Z < -1,33) = \\ = P(Z \leq 0,83) - (1 - P(Z < 1,33)) = 0,7049$$

29 El diámetro medio de las piezas producidas en una fábrica es de 45 mm. Calcula la desviación típica, sabiendo

que la probabilidad de que una pieza tenga su diámetro mayor de 50 mm es igual a 0,006.

$X = \text{«Diámetro de las piezas producidas»}$

$$X \equiv N(45; \sigma)$$

$$P(X > 50) = 0,006 \rightarrow$$

$$\rightarrow P\left(\frac{X - 45}{\sigma} > \frac{50 - 45}{\sigma}\right) = \\ = P\left(Z > \frac{5}{\sigma}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{5}{\sigma}\right) = 0,006 \rightarrow$$

$$\rightarrow P\left(Z \leq \frac{5}{\sigma}\right) = 0,994 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{5}{\sigma} = 2,51 \rightarrow \sigma = 1,992$$

30 En un examen se ha evaluado de 0 a 20 puntos, obteniendo el 67 % de los presentados puntuaciones iguales o inferiores a 12,2, mientras que el 9 % ha obtenido puntuaciones superiores a 16,7. Sabiendo que la distribución de las puntuaciones es normal, calcula la media y la desviación típica.

$$P(X \leq 12,2) = 0,67 \rightarrow$$

$$\rightarrow P\left(Z \leq \frac{12,2 - \mu}{\sigma}\right) = 0,67 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{12,2 - \mu}{\sigma} = 0,44$$

$$P(X > 16,7) = 0,09 \rightarrow$$

$$\rightarrow P\left(Z > \frac{16,7 - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{16,7 - \mu}{\sigma}\right) = \\ = 1 - 0,09 = 0,91 \rightarrow \frac{16,7 - \mu}{\sigma} = 1,34$$

Resolvemos el sistema planteado por las dos ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{12,2 - \mu}{\sigma} = 0,44 \\ \frac{16,7 - \mu}{\sigma} = 1,34 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} \mu = 10 \\ \sigma = 5 \end{cases}$$

31 La probabilidad de que un ciclista sufra un reventón en una carrera es 0,15. Si en la carrera participan 70 ciclistas, ¿cuál es la probabilidad de que se registren entre 15 y 18 reventones?

La distribución que rige esta variable es $B(70; 0,15)$. Como $n \cdot p = 10,5 > 5$ y $n \cdot (1 - p) = 59,5 > 5$ podemos aproximarla por una normal:

$$X \equiv B(70; 0,15) \approx N(10,5; 2,987)$$

La probabilidad pedida será:

$$\begin{aligned} P(15 \leq X \leq 18) &= P(X \leq 18) - P(X < 15) \approx \\ &\approx P\left(Z \leq \frac{18,5 - 10,5}{2,987}\right) - \\ &\quad - P\left(Z < \frac{14,5 - 10,5}{2,987}\right) = \\ &= 0,9963 - 0,9099 = 0,0864 \end{aligned}$$

ACTIVIDADES FINALES

1. Distingue variables aleatorias discretas y sus parámetros y calcula probabilidades

32 Para cada uno de los experimentos aleatorios que se describen, halla y representa las funciones de probabilidad y de distribución.

- a) Experimento aleatorio: extraer, sin reemplazamiento, tres bolas de una bolsa que contiene 4 bolas blancas y 3 azules.

Variable aleatoria:

X = «Número de bolas blancas obtenidas»

- b) Experimento aleatorio: comer, uno tras otro, dos caramelos escogidos al azar entre 2 de fresa, 4 de naranja y 1 de menta.

Variable aleatoria:

X = «Número de caramelos de naranja comidos»



- c) Experimento aleatorio: escoger al azar una familia con 4 hijos.

Variable aleatoria:

X = «Número de hijos varones en esa familia» (se supone que la probabilidad de nacer varón es la misma que la de nacer mujer).

- a) Determinamos el espacio muestral, siendo B = «Blanca» y A = «Azul»:

$$E = \{BBB, BBA, BAB, BAA, ABB, ABA, AAB, AAA\}$$

Los sucesos no tienen la misma probabilidad, ya que cada extracción no es independiente. El total de bolas es 7.

Calculamos las probabilidades de los sucesos elementales:

$$P(X = 0) = \underbrace{\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5}}_{AAA} = \frac{6}{210} = \frac{1}{35}$$

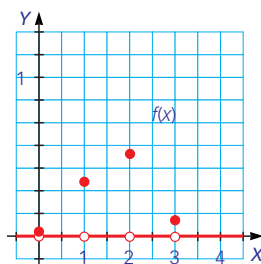
$$\begin{aligned} P(X = 1) &= \underbrace{\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5}}_{BAA} + \underbrace{\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5}}_{ABA} + \\ &\quad + \underbrace{\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5}}_{AAB} = \frac{72}{210} = \frac{12}{35} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= \underbrace{\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5}}_{BBA} + \underbrace{\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5}}_{BAB} + \\ &\quad + \underbrace{\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5}}_{ABB} = \frac{108}{210} = \frac{18}{35} \end{aligned}$$

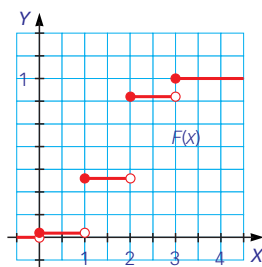
$$P(X = 3) = \underbrace{\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5}}_{BBB} = \frac{24}{210} = \frac{4}{35}$$

Las funciones de probabilidad y de distribución son, respectivamente:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{35} & \text{si } x = 0 \\ \frac{12}{35} & \text{si } x = 1 \\ \frac{18}{35} & \text{si } x = 2 \\ \frac{4}{35} & \text{si } x = 3 \\ 0 & \text{en el resto de valores} \end{cases}$$



$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{35} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{13}{35} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{31}{35} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$$



- b) Determinamos el espacio muestral, siendo F = «Fresa», N = «Naranja» y M = «Menta»:
 $E = \{FF, FN, FM, NN, NF, NM, MF, MN\}$
 Los sucesos no tienen la misma probabilidad, ya que cada extracción no es independiente. El total de caramelos es 7. Calculamos las probabilidades de los sucesos elementales:

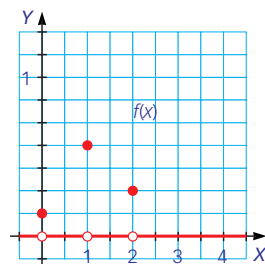
$$P(X = 0) = \underbrace{\frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6}}_{FF} + \underbrace{\frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6}}_{FM} + \underbrace{\frac{1}{7} \cdot \frac{2}{6}}_{MF} = \frac{6}{42} = \frac{1}{7}$$

$$P(X = 1) = \underbrace{\frac{2}{7} \cdot \frac{4}{6}}_{FN} + \underbrace{\frac{1}{7} \cdot \frac{4}{6}}_{MN} + \underbrace{\frac{4}{7} \cdot \frac{2}{6}}_{NF} + \underbrace{\frac{4}{7} \cdot \frac{1}{6}}_{NM} = \frac{24}{42} = \frac{4}{7}$$

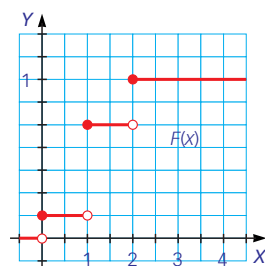
$$P(X = 2) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$$

Las funciones de probabilidad y de distribución son, respectivamente:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{7} & \text{si } x = 0 \\ \frac{4}{7} & \text{si } x = 1 \\ \frac{2}{7} & \text{si } x = 2 \\ 0 & \text{en el resto de valores} \end{cases}$$



$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{7} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{5}{7} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$



- c) Determinamos el espacio muestral, siendo V = «Varón» y M = «Mujer»:
 $E = \{VVVV, VVVM, VMVV, VMVV, MVVV, VVMM, VMMV, VMVM, VMVM, MVVM, MMVV, MMMV, MMVM, MVMM, VMMM, MMMM\}$

Los sucesos tienen la misma probabilidad, y el número total es 16.

Calculamos las probabilidades de los sucesos elementales:

$$P(X = 0) = \frac{1}{16}$$

$$P(X = 1) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

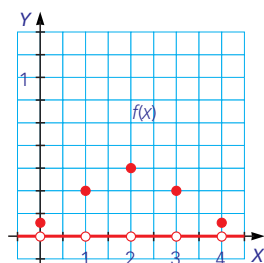
$$P(X = 2) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 3) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

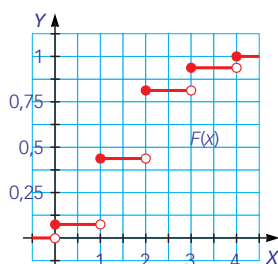
$$P(X = 4) = \frac{1}{16}$$

Las funciones de probabilidad y de distribución son, respectivamente:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{16} & \text{si } x = 0 \text{ o } x = 4 \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = 1 \text{ o } x = 3 \\ \frac{3}{8} & \text{si } x = 2 \\ 0 & \text{en el resto de valores} \end{cases}$$



$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{16} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{5}{16} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{11}{16} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ \frac{15}{16} & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{si } 4 \leq x \end{cases}$$



ACTIVIDADES FLASH

- 33 ●●● ¿Cuáles de las tablas de probabilidades que aparecen a continuación se ajustan a funciones de probabilidad? Halla la función de distribución de la que sea función de probabilidad.

a)

X	x_1	x_2	x_3
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$

b)

X	x_1	x_2	x_3	x_4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{25}$

c)

X	x_1	x_2	x_3	x_4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$

d)

X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$P(X = x_i)$	0,2	0,1	0,1	0,2	0,4

- a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} = \frac{31}{30} \neq 1 \rightarrow$
 $\rightarrow$ No es una función de probabilidad.
- b) $\frac{1}{2} + \frac{3}{25} + \frac{2}{7} + \frac{2}{25} = \frac{69}{70} \neq 1 \rightarrow$
 $\rightarrow$ No es una función de probabilidad.
- c) $\frac{1}{4} + \frac{2}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{7}{6} \neq 1 \rightarrow$
 $\rightarrow$ No es una función de probabilidad.
- d) $0,2 + 0,1 + 0,1 + 0,2 + 0,4 = 1 \rightarrow$
 $\rightarrow$ Es una función de probabilidad.

Su función de distribución es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_1 \\ 0,2 & \text{si } x_1 \leq x < x_2 \\ 0,3 & \text{si } x_2 \leq x < x_3 \\ 0,4 & \text{si } x_3 \leq x < x_4 \\ 0,6 & \text{si } x_4 \leq x < x_5 \\ 1 & \text{si } x_5 \leq x \end{cases}$$

- 34 ●●● En la urna U_1 hay cuatro bolas numeradas del 1 al 4, y en la urna U_2 hay ocho bolas numeradas del 5 al 12. Se lanza un dado: si sale 1 o 2, se saca una bola de la urna U_1 ; si sale 3, 4, 5 o 6, se saca una bola de la urna U_2 .

- a) Describe la distribución de probabilidad de la variable aleatoria que asigna a cada suceso el número de la bola extraída.
- b) Halla la función de probabilidad, la función de distribución y los parámetros media, varianza y desviación típica de esta variable.

$$a) P(\text{«Sacar bola de } U_1\text{»}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$P(\text{«Sacar bola de } U_2\text{»}) = \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{12}$$

Todos los sucesos tienen la misma probabilidad:

$$P(X = x_i) = \frac{1}{12}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{12} & \text{si } 1 \leq x \leq 12, x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{en el resto de valores} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{[x]}{12} & \text{si } 1 \leq x < 12 \\ 1 & \text{si } 12 \leq x \end{cases}$$

$$\mu = 6,5 \quad \sigma^2 = 11,9167 \quad \sigma = 3,452$$

- 35 La tabla muestra las probabilidades correspondientes a los valores que toma una variable aleatoria X .

X	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,4	0,08	0,12	0,25	0,15

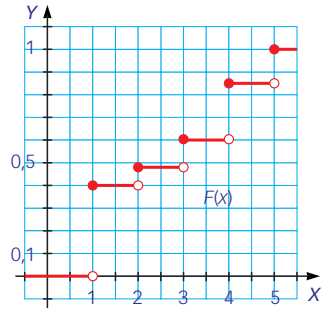
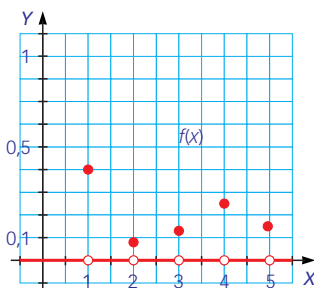
Comprueba que se trata de su función de probabilidad, calcula su función de distribución y realiza las representaciones gráficas.

Comprobamos que es una función de probabilidad:

$$0,4 + 0,08 + 0,12 + 0,25 + 0,15 = 1 \rightarrow$$

$\rightarrow$ Es función de probabilidad.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 0,4 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0,48 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 0,6 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 0,85 & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 1 & \text{si } 5 \leq x \end{cases}$$



- 36 Utiliza los datos de la actividad anterior para calcular las siguientes probabilidades.

$$a) P(X > 3) \quad c) P(2 < X \leq 4)$$

$$b) P(X \leq 2) \quad d) P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$$

$$a) P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = 0,4$$

$$b) P(X \leq 2) = F(2) = 0,48$$

$$c) P(2 < X \leq 4) = P(X \leq 4) - P(X \leq 2) = F(4) - F(2) = 0,37$$

$$d) \mu = 2,67 \quad \sigma = 1,556$$

$$\begin{aligned} P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) &= \\ &= P(1,114 < X < 4,226) = \\ &= P(X < 4,226) - P(X \leq 1,114) = \\ &= F(4,226) - F(1,114) = 0,45 \end{aligned}$$

- 37 Se considera la siguiente tabla, que hace corresponder los valores que toma una variable aleatoria X con sus probabilidades.

X	4	5	6	7
$P(X = x_i)$	0,6	0,2	0,15	0,05

a) Comprueba que corresponde a una distribución de probabilidad.

b) Calcula la función de distribución.

c) Halla su media y su desviación típica.

$$a) 0,6 + 0,2 + 0,15 + 0,05 = 1$$

$$b) F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 4 \\ 0,6 & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 0,8 & \text{si } 5 \leq x < 6 \\ 0,95 & \text{si } 6 \leq x < 7 \\ 1 & \text{si } 7 \leq x \end{cases}$$

$$c) \text{Media: } \mu = 4,65$$

$$\text{Desviación típica: } \sigma = \sqrt{0,8275} = 0,909$$

- 38 Con la distribución de la actividad anterior, determina las siguientes probabilidades.

- a) $P(X > 4)$ c) $P(4 \leq X < 7)$
 b) $P(X < 6)$ d) $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$
 a) $P(X > 4) = 0,4$
 b) $P(X < 6) = 0,8$
 c) $P(4 \leq X < 7) = 0,95$
 d) $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) =$
 $= P(3,741 < X < 5,559) = 0,8$

- 39 En una urna hay 7 fichas blancas, 5 fichas rojas y 2 fichas amarillas. Se extraen al azar tres fichas, reemplazando cada una de ellas una vez que se ha anotado el número de fichas rojas extraídas.

- a) Halla la función de probabilidad y la de distribución de la variable aleatoria que cuenta el número de fichas rojas.
 b) Calcula la probabilidad de obtener, al menos, una ficha roja.
 c) Calcula la media y la desviación típica de la variable aleatoria.
 a) Como la ficha sacada se vuelve a meter en la urna, la probabilidad de sacar una ficha roja es siempre la misma:

$$P(\text{«Sacar ficha roja»}) = \frac{5}{14} \rightarrow$$

$$\rightarrow P(\text{«No sacar ficha roja»}) = \frac{9}{14}$$

Determinamos el espacio muestral, siendo $R = \text{«Sacar rojo»}$ y $N = \text{«No sacar rojo»}$:

$$E = \{NNN, NNR, NRN, RNN, NRR, RNR, RRN, RRR\}$$

Los sucesos no tienen la misma probabilidad. Calculamos las probabilidades de los sucesos elementales:

$$P(X = 0) = \left(\frac{9}{14}\right)^3 = \frac{729}{2744}$$

$$P(X = 1) = 3 \cdot \left(\frac{9}{14}\right)^2 \left(\frac{5}{14}\right) = \frac{1215}{2744}$$

$$P(X = 2) = 3 \cdot \left(\frac{9}{14}\right) \left(\frac{5}{14}\right)^2 = \frac{675}{2744}$$

$$P(X = 3) = \left(\frac{5}{14}\right)^3 = \frac{125}{2744}$$

Así, las probabilidades serán:

$$P(X = 0) = \left(\frac{9}{14}\right)^3 = \frac{729}{2744}$$

$$P(X = 1) = 3 \cdot \left(\frac{9}{14}\right)^2 \left(\frac{5}{14}\right) = \frac{1215}{2744}$$

$$P(X = 2) = 3 \cdot \left(\frac{9}{14}\right) \left(\frac{5}{14}\right)^2 = \frac{675}{2744}$$

$$P(X = 3) = \left(\frac{5}{14}\right)^3 = \frac{125}{2744}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{729}{2744} & \text{si } x = 0 \\ \frac{1215}{2744} & \text{si } x = 1 \\ \frac{675}{2744} & \text{si } x = 2 \\ \frac{125}{2744} & \text{si } x = 3 \\ 0 & \text{en el resto de valores} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{729}{2744} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1944}{2744} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{2619}{2744} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$$

- 40 En el experimento aleatorio que consiste en elegir al azar una ficha de dominó, considera las variables que aparecen a continuación.

$X = \text{«Mayor puntuación de las dos que tiene la ficha»}$

$Y = \text{«Diferencia en valor absoluto de las dos puntuaciones que tiene la ficha»}$

- a) Halla la función de probabilidad de cada variable.
 b) Calcula la media y la desviación típica para cada una de las variables.
 c) Calcula $P(X < 4)$.
 d) Calcula $P(Y \geq 5)$.

a)

x	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{4}$

Y	0	1	2	3	4	5	6
$P(Y = y_i)$	$\frac{7}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{28}$

b) $\mu_X = 4$ $\sigma_X = 1,732$

$\mu_Y = 2$ $\sigma_Y = 1,732$

c) $P(X < 4) = \frac{5}{14}$

d) $P(Y \geq 5) = \frac{3}{28}$

- 41 En el experimento aleatorio que consiste en lanzar dos dados, considera la variable aleatoria que a cada suceso elemental le hace corresponder la suma de las puntuaciones que han aparecido en cada uno de los dados.

a) Halla la función de probabilidad, la media y la desviación típica.

b) Calcula $P(X > 9)$.

c) Calcula $P(X \leq 5)$.

a)

x	2	3	4	5	6	7
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$

x	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

$\mu = 7$ $\sigma = 2,4152$

b) $P(X > 9) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

c) $P(X \leq 5) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

- 42 En la bolsa B_1 hay cuatro bolas numeradas del 1 al 4 y en la bolsa B_2 hay cinco bolas numeradas del 1 al 5. Se extrae al azar una bola de cada bolsa. Se considera la siguiente variable.

$X =$ «Resultado de multiplicar los números de las bolas extraídas»

Halla su función de probabilidad y calcula la probabilidad de obtener un resultado mayor que 12.

$P(\text{«Sacar bola de } B_1\text{»}) = \frac{1}{4}$

$P(\text{«Sacar bola de } B_2\text{»}) = \frac{1}{5}$

$P(\text{«Sacar un par } (B_1, B_2)\text{»}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$

Algunos resultados no son posibles porque no se pueden obtener multiplicando los números de las bolsas.

x	Posibilidades	$P(X = x_i)$
1	(1, 1)	$\frac{1}{10}$
2	(1, 2) (2, 1)	$\frac{1}{10}$
3	(1, 3) (3, 1)	$\frac{1}{10}$
4	(1, 4) (4, 1) (2, 2)	$\frac{3}{20}$
5	(1, 5)	$\frac{1}{20}$
6	(2, 3) (3, 2)	$\frac{1}{10}$
8	(2, 4) (4, 2)	$\frac{1}{10}$
9	(3, 3)	$\frac{1}{20}$
10	(2, 5)	$\frac{1}{20}$
12	(3, 4) (4, 3)	$\frac{1}{10}$
15	(3, 5)	$\frac{1}{20}$
16	(4, 4)	$\frac{1}{20}$
20	(4, 5)	$\frac{1}{20}$

$P(X > 12) = \frac{3}{20}$

Distribución binomial

ACTIVIDADES FLASH

- 43 Indica las variables aleatorias que siguen una distribución binomial.

- a) Tenemos 3 fichas blancas y 5 fichas azules en una bolsa. Sacamos 4 fichas y contamos el número de fichas que son blancas.
- b) Lanzamos un dado diez veces y anotamos las veces que sale el número 1.
- c) Se lanza un dado y, si sale un número par, se vuelve a lanzar el mismo dado, pero si sale impar, se tira un dado de 4 caras y se cuentan las veces que sale el número 3.
- d) En una ciudad, el 10% de la población tiene los ojos de color azul. Se eligen, al azar, 20 personas de dicha ciudad y se anota el número de ellas que tiene los ojos azules.

- a) La variable aleatoria no sigue una distribución binomial.
- b) La variable es discreta porque solo puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.

$n = 10$ es el número de veces que se realiza el experimento.

Sea $A = \text{«Salir un 1»}$, entonces

$$P(A) = \frac{1}{6}.$$

Los experimentos son independientes, porque lo que sucede en un lanzamiento no influye en el siguiente.

Por tanto, la variable sigue una

distribución binomial: $B\left(10, \frac{1}{6}\right)$.

- c) La variable aleatoria no sigue una distribución binomial.
- d) La variable es discreta, porque solo puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 y 20.

$n = 20$ es el número de veces que se realiza el experimento.

Sea $A = \text{«Tener los ojos azules»}$, entonces $P(A) = 0,1$.

Los experimentos son independientes, porque el color de los ojos de una persona no influye en el color de los ojos de la otra persona.

Por tanto, la variable sigue una distribución binomial: $B(20; 0,1)$

- 44 Realiza una tabla con las probabilidades correspondientes a una variable aleatoria X que cuenta el número de veces que ocurre un suceso A , cuya probabilidad es de 0,25; al realizar el experimento 4 veces.

$X \equiv B(4; 0,25)$	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,3164	0,4219	0,2109	0,0469	0,0039

- 45 Copia y completa las tablas y calcula la media y la desviación típica en cada caso.

a)

$X \equiv B(3; 0,9)$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$				

b)

$X \equiv B(5; 0,15)$	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$						

a)

$X \equiv B(3; 0,9)$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,001	0,027	0,243	0,729

$$\mu = 2,7 \quad \sigma = 0,5196$$

b)

$X \equiv B(5; 0,15)$	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,4437	0,3915	0,1382

$X \equiv B(5; 0,15)$	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,02438	0,0022	0,00008

$$\mu = 0,75 \quad \sigma = 0,7984$$



ACTIVIDADES FLASH

- 46 En las siguientes situaciones descubre las variables aleatorias que siguen una distribución binomial. Indica los parámetros y el suceso destacado del experimento.

- a) Un arquero profesional consigue anotar 10 puntos en un 97% de los casos. Realiza entrenamientos de 50 tiradas y anota aquellas en las que la puntuación es 10.
- b) El 12% de los tornillos fabricados por una máquina son defectuosos. Se eligen 5 tornillos para las sesiones de control.
- c) Se lanza un dado 10 veces y se anota el número de puntuaciones igual a 6.
- d) Se elige una familia de 7 hijos y se cuenta el número de varones.
- e) El 70% de los vecinos de una localidad tiene nietos; el resto, no. Se eligen al azar 20 vecinos del lugar y se anota si son abuelos o no.
- f) La probabilidad de que un estudiante que ingresa en la universidad se titule en el mínimo periodo de tiempo es de 0,3. Se eligen al azar 30 estudiantes y se les pregunta por el tiempo empleado hasta su titulación.
- a) Es una $B(50; 0,97) \rightarrow \mu = 48,5 \rightarrow$
 $\rightarrow$ El caso con mayor probabilidad es 49.
- b) Es una $B(5; 0,12) \rightarrow \mu = 0,6 \rightarrow$
 $\rightarrow$ El caso con mayor probabilidad es 0.
- c) Es una $B\left(10; \frac{1}{6}\right) \rightarrow \mu = 1,67 \rightarrow$
 $\rightarrow$ El caso con mayor probabilidad es 1.
- d) Es una $B\left(7; \frac{1}{2}\right) \rightarrow \mu = 3,5 \rightarrow$
 $\rightarrow$ Los casos con mayor probabilidad son 3 y 4.
- e) Es una $B(20; 0,7) \rightarrow \mu = 14 \rightarrow$
 $\rightarrow$ El caso con mayor probabilidad es 14.
- f) Si la variable aleatoria fuese saber si se han titulado en el tiempo mínimo sí sería una binomial, pero esta variable no sigue una binomial.

- 47 Calcula las probabilidades que se indican para las siguientes distribuciones binomiales.

- a) Siendo X una variable $B(4; 0,3)$:
 $P(X = 0)$ $P(X < 2)$ $P(X \geq 3)$
- b) Siendo X una variable $B(8; 0,75)$:
 $P(X = 7)$ $P(X \leq 4)$ $P(X > 6)$
- c) Siendo X una variable $B(10; 0,42)$:
 $P(X = 8)$ $P(X \leq 1)$ $P(X < 10)$
- a) $P(X = 0) = 0,2401$
 $P(X < 2) = 0,6517$
 $P(X \geq 3) = 0,0837$
- b) $P(X = 7) = 0,267$
 $P(X \leq 4) = 0,1138$
 $P(X > 6) = 0,3671$
- c) $P(X = 8) = 0,0147$
 $P(X \leq 1) = 0,0355$
 $P(X < 10) = 0,9998$

- 48 Copia y completa la tabla de la distribución de una variable aleatoria X que sigue una distribución binomial $B(5; 0,8)$.

X	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$						

Comprueba que se verifica que $\mu = np$
y $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

X	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,00032	0,0064	0,0512

X	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,2048	0,4096	0,3268

$$\mu = 5 \cdot 0,8 = 4$$

$$\sigma = \sqrt{0,8} = 0,89 = \sqrt{5 \cdot 0,8 \cdot 0,2}$$

- 49 **INVESTIGA.** Detalla la tabla de distribución de una variable aleatoria que sigue una distribución binomial de media 2 y desviación típica 1. ¿Hay más de una?

$$B(n, p)$$

$$\mu = np \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

$$\sqrt{\frac{np}{np(1-p)} = 2} \rightarrow n = 4, p = \frac{1}{2}$$

X	0	1	2	3	4
P(X = x)	0,0625	0,25	0,375	0,25	0,0625

- 50 El 2% de las pilas fabricadas llegan descargadas al proceso de envasado. Si escogemos 12 pilas al azar, calcula la probabilidad de que haya más de 2 pilas descargadas.

$$X \equiv B(12; 0,002)$$

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - P(X \leq 2) = \\ &= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) = \\ &= 1 - \binom{12}{0} \cdot 0,002^0 \cdot 0,998^{12} - \\ &\quad - \binom{12}{1} \cdot 0,002^1 \cdot 0,998^{11} - \\ &\quad - \binom{12}{2} \cdot 0,002^2 \cdot 0,998^{10} = \\ &= 1 - 0,97626 - 0,023477 - \\ &\quad - 0,00025877 = 0,000004 \end{aligned}$$

- 51 Se lanza al aire una moneda 8 veces. Calcula la probabilidad de que salgan como máximo 5 caras.

$X = \text{«Tirar una moneda al aire 8 veces y apuntar el número de caras»} \rightarrow$

$$\rightarrow X \equiv B\left(8; \frac{1}{2}\right)$$

$$P(X \leq 5) = 0,8555$$

- 52 En una fábrica de grifos, los controles de calidad detectan la aparición de un defecto con una probabilidad de 0,06. Que un grifo tenga un defecto es independiente de que los otros lo tengan o no. Si se escogen, al azar, 9 grifos en un control, calcula la probabilidad de que:

- Al menos uno de los grifos tenga un defecto.
- Ningún grifo tenga defecto.

$X = \text{«N.º de grifos defectuosos de una muestra de 9 grifos»} \rightarrow$

$$\rightarrow X \equiv B(9; 0,06)$$

$$a) P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 0,427$$

$$b) P(X = 0) = 0,573$$

- 53 En una clase de 1.º de Bachillerato hay igual número de chicos que de chicas. Si se eligen 6 personas al azar de este grupo, calcula la probabilidad de que:

- Haya al menos tres chicos.
- No haya ninguna chica.
- Haya exactamente tres chicas.
- Responde otra vez a los apartados anteriores si en el grupo hubiera triple número de chicos que de chicas.

$X = \text{«N.º de chicas que hay en el grupo de 6 estudiantes»} \rightarrow X \equiv B\left(6; \frac{1}{2}\right)$

$$a) P(X < 3) = 0,3438$$

$$b) P(X = 0) = 0,0156$$

$$c) P(X = 3) = 0,3125$$

$$d) X \equiv B\left(6; \frac{1}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} P(\text{«Al menos tres chicos»}) &= \\ &= P(X < 3) = 0,687 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{«Ninguna chica»}) &= P(X = 0) = \\ &= 0,0905 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{«Exactamente tres chicas»}) &= \\ &= P(X = 3) = 0,2162 \end{aligned}$$

- 54 El 80% de los enfermos tratados con cierto medicamento mejora hasta sanar completamente. Elegidos 20 enfermos que tienen este medicamento en su tratamiento, calcula la probabilidad de que más de la mitad, pero menos de tres cuartas partes, sane completamente.

$X = \text{«N.º de enfermos que sanarán del grupo de 20»} \rightarrow X \equiv B(20; 0,8)$

$$\begin{aligned} P(10 < X < 15) &= \\ &= P(X < 15) - P(X \leq 10) = 0,1932 \end{aligned}$$

- 55 De cada 100 encuestados, 13 eligen «NS/NC» como respuesta.

Si se escogen 15 encuestados al azar, calcula la probabilidad de que:

- Como mínimo 10 respondan «NS/NC».

b) Exactamente 3 no respondan «NS/NC».

$X = \text{«N.º de encuestados que responden «NS/NC» de los 15»} \rightarrow X \equiv B(15; 0,13)$

a) $P(X \geq 10) = 0,000002$

b) $P(X = 3) = 0,188$

56 Se lanzan al aire cuatro dados. Ordena de menor a mayor las siguientes probabilidades.

- a) Que salga dos veces la cara 5.
- b) Que salga más de dos veces la cara 5.
- c) Que salga, al menos, una vez la cara 5.

$X = \text{«N.º de 5 que salen en los 4 dados»} \rightarrow X \equiv B\left(4; \frac{1}{6}\right)$

a) $P(X = 2) = 0,1157$

b) $P(X > 2) = 0,0162$

c) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 0,5177$

El orden sería: b) < a) < c).

57 La probabilidad de que cierta jugadora de baloncesto enceste una canasta de tres puntos es 0,4. Calcula la probabilidad de que efectuando cinco lanzamientos:

- a) Enceste, exactamente, cuatro canastas.
- b) Enceste más de tres canastas.
- c) Enceste, como mucho, dos canastas.
- d) No enceste ninguna canasta.

$X = \text{«N.º de canastas que encesta de 5 lanzamientos»} \rightarrow X \equiv B(5; 0,4)$

a) $P(X = 4) = 0,0768$

b) $P(X > 3) = 0,08704$

c) $P(X \leq 2) = 0,68256$

d) $P(X = 0) = 0,07776$



58

MATEMÁTICAS Y... TRÁFICO.

En nuestro país es necesario pasar una revisión técnica a todos los vehículos particulares a partir del cuarto año desde su matriculación. Esta inspección, la famosa ITV, garantiza que los vehículos están en perfecto estado para circular sin ser un peligro para los demás conductores o para el medioambiente. Según las últimas estadísticas 1 de cada 5 coches recibe un informe desfavorable en la primera revisión.



Si a lo largo de un día se revisan 35 vehículos, calcula la probabilidad de que:

- a) Exactamente 3 hayan tenido un informe desfavorable.
- b) Ninguna haya tenido un informe desfavorable.
- c) Al menos 30 hayan tenido un informe favorable.

$X = \text{«N.º de informes desfavorables al pasar la ITV»} \rightarrow X \equiv B\left(35; \frac{1}{5}\right)$

a) $P(X = 3) = \binom{35}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^{32} = 0,0415$

b) $P(X = 0) = \binom{35}{0} \left(\frac{1}{5}\right)^0 \left(\frac{4}{5}\right)^{35} = 0,0004$

c) $P(X \leq 5) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) \approx 0,272$

Esta actividad puede utilizarse para trabajar el ODS 3, salud y bienestar.

2. Distingue variables aleatorias continuas y sus parámetros y calcula probabilidades

59

Comprueba si las siguientes funciones son funciones de densidad.

$$a) f(x) = \begin{cases} 0,5 & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \in \left[3, \frac{16}{5}\right] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) $f(x)$ forma un rectángulo con el eje X con lados de longitud 0,5 y 2.

El área bajo $f(x)$ es $0,5 \cdot 2 = 1$, por tanto, es función de densidad.

b) $f(x)$ forma un rectángulo con el eje X con lados de longitud 5 y $3 - \frac{16}{5} = \frac{1}{5}$.

El área bajo $f(x)$ es $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$, por tanto, es función de densidad.

60 Averigua, para cada función $f(x)$, el valor de k para que sea una función de densidad, y halla la función de distribución correspondiente.

$$a) f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ k & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 4k & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x+1}{4} & \text{si } 0 \leq x \leq k \\ 0 & \text{si } x > k \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} -0,5x + k & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{si } x \notin [-1, 1] \end{cases}$$

a) $f(x)$ forma dos rectángulos con el eje X con los lados de las siguientes longitudes:

- k y 1 $\rightarrow$ Área = k
- $4k$ y 1 $\rightarrow$ Área = $4k$

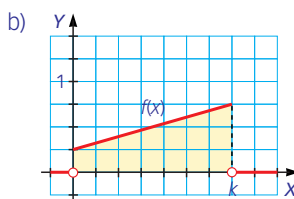
Para ser función de densidad, el área bajo $f(x)$ debe ser 1.

$$k + 4k = 1 \rightarrow k = \frac{1}{5}$$

La función de distribución es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{5} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{5} + \frac{4(x-1)}{5} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \leq x \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{5} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{4x-3}{5} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$



Para que sea una función de densidad el área de la figura debe ser 1. Esta figura es un trapecio rectángulo cuyas bases miden, respectivamente $\frac{1}{4}$ y $f(k) = \frac{k+1}{4}$, y su altura mide k .

$$\text{Área} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{k+1}{4}}{2} \cdot k = \frac{k^2 + 2k}{8}$$

Para que sea función de densidad

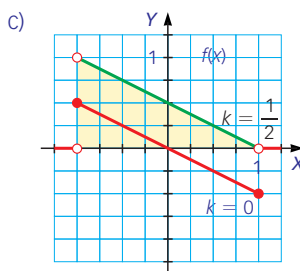
debe cumplir: $\frac{k^2 + 2k}{8} = 1 \rightarrow$

$$\rightarrow k^2 + 2k - 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} k_1 = -4 \\ k_2 = 2 \end{cases}$$

Como $k > 0$, la única solución válida es $k = 2$.

La función de distribución queda:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2 + 2x}{8} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$



k debe valer como mínimo $\frac{1}{2}$, porque de otro modo $f(x)$ no sería siempre positiva, y por tanto no sería función de densidad.

Si $k = \frac{1}{2}$, el área bajo $f(x)$ sería un triángulo de base 2 y altura 1, cuya área es 1. Por tanto, $k = \frac{1}{2}$ para que $f(x)$ sea función de densidad.

La función de distribución entre -1 y 1 , es el área del trozo de triángulo entre -1 y x , o lo que es lo mismo, 1 menos el área del triángulo entre x y 1 :

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 - \frac{(1-x) \cdot \left(-0,5x + \frac{1}{2}\right)}{2} = \\ &= 1 - \frac{(1-x) \cdot \left(\frac{-x+1}{2}\right)}{2} = \\ &= 1 - \frac{x^2 - 2x + 1}{4} \end{aligned}$$

La función de distribución es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 1 - \frac{x^2 - 2x + 1}{4} & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

- 61 Comprueba que $f(x)$ es una función de densidad, halla su función de distribución y calcula las probabilidades que se indican.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } x \in [2, 8] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

- a) $P(X < 3)$ b) $P(3 \leq X \leq 5)$ c) $P(x > 6)$

$f(x)$ en $[2, 8]$ forma un rectángulo con

el eje X , cuyos lados miden $\frac{1}{6}$ y 6 ,

respectivamente, y cuya área mide 1. Por tanto, es una función de densidad cuya función de distribución es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ \frac{x-2}{6} & \text{si } 2 \leq x < 8 \\ 1 & \text{si } 8 \leq x \end{cases}$$

- a) $P(X < 3) = F(3) = \frac{1}{6} \cdot (3 - 2) = \frac{1}{6}$
 b) $P(3 \leq X \leq 5) = P(X \leq 5) - P(X < 3) =$
 $= F(5) - F(3) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

$$c) P(X > 6) = 1 - P(X \leq 6) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

- 62 Comprueba que $f(x)$ es una función de densidad, halla su función de distribución y calcula las probabilidades que se indican.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{10} & \text{si } x \in [4, 6] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

- a) $P(X < 4,5)$
 b) $P(4,5 \leq X \leq 5)$
 c) $P(X > 5)$

La función $\frac{x}{10}$ forma un triángulo con el eje X de base x y altura $\frac{x}{10}$, cuya área es

$A(x) = \frac{x^2}{20}$. De esta forma, el área bajo $f(x)$ será:

$$A(6) - A(4) = \frac{6^2}{20} - \frac{4^2}{20} = 1$$

Por tanto, $f(x)$ es función de densidad.

La función de distribución en $[4, 6]$ será $A(x) - A(4)$. Por tanto:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 4 \\ \frac{x^2 - 16}{20} & \text{si } 4 \leq x \leq 6 \\ 1 & \text{si } 6 < x \end{cases}$$

- a) $P(X < 4,5) = F(4,5) = 0,2125$
 b) $P(4,5 \leq X \leq 5) =$
 $= P(X \leq 5) - P(X \leq 4,5) =$
 $= F(5) - F(4,5) = 0,2375$
 c) $P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) =$
 $= 1 - F(5) = 0,55$

- 63 La función de distribución de una variable aleatoria continua es la siguiente.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^3}{8} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Halla las siguientes probabilidades.

- a) $P(0,5 < X < 1,5)$
 b) $P(1 < X < 2)$
 c) $P(X < 1,5)$
 d) $P(X > 1,2)$

- a) $P(0,5 < X < 1,5) =$
 $= F(1,5) - F(0,5) = 0,40625$
 b) $P(1 < X < 2) = F(2) - F(1) = 0,875$
 c) $P(X < 1,5) = F(1,5) = 0,4219$
 d) $P(X > 1,2) = 1 - F(1,2) = 0,784$

- 64 La función de distribución de una variable aleatoria continua es la siguiente.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{x-1}{3} & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \\ 1 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Determina estas probabilidades.

- a) $P(2 \leq X \leq 3)$ c) $P(1,5 \leq X \leq 2,5)$
 b) $P(X \leq 3)$ d) $P(X > 2)$
 a) $P(2 \leq X \leq 3) = F(3) - F(2) = \frac{1}{3}$
 b) $P(X \leq 3) = F(3) = \frac{2}{3}$
 c) $P(1,5 \leq X \leq 2,5) =$
 $= F(2,5) - F(1,5) = \frac{1}{3}$
 d) $P(X > 2) = 1 - F(2) = \frac{2}{3}$

- 65 Una variable aleatoria tiene la siguiente función de distribución.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-\infty, 3) \\ \frac{x^2 + x - 12}{8} & \text{si } x \in [3, 4] \\ 1 & \text{si } x \in (4, +\infty) \end{cases}$$

Calcula estas probabilidades.

- a) $P(3 \leq X \leq 4)$
 b) $P(3,5 \leq X < 3,6)$
 c) $P(X \leq 3,5)$
 d) $P(X > 3,8)$
 a) $P(3 \leq X \leq 4) =$
 $= P(X \leq 4) - P(X \leq 3) =$
 $= F(4) - F(3) = 1 - 0 = 1$
 b) $P(3,5 \leq X < 3,6) =$
 $= P(X < 3,6) - P(X \leq 3,5) =$
 $= F(3,6) - F(3,5) = 0,57 - 0,47 = 0,1$
 c) $P(X \leq 3,5) = F(3,5) = 0,47$
 d) $P(X > 3,8) = 1 - P(X \leq 3,8) =$
 $= 1 - F(3,8) = 1 - 0,78 = 0,22$

Distribución normal

- 66 Calcula las probabilidades que aparecen a continuación para la distribución $N(0, 1)$.

- a) $P(Z < 0,6)$ e) $P(Z < 1,23)$
 b) $P(Z \leq 0,92)$ f) $P(Z \leq 2,01)$
 c) $P(Z < 1,3)$ g) $P(Z \leq 0,07)$
 d) $P(Z \leq 2,4)$ h) $P(Z < 0,31)$
 a) $P(Z < 0,6) = 0,7257$
 b) $P(Z \leq 0,92) = 0,8212$
 c) $P(Z < 1,3) = 0,9032$
 d) $P(Z \leq 2,4) = 0,9918$
 e) $P(Z < 1,23) = 0,8907$
 f) $P(Z \leq 2,01) = 0,9778$
 g) $P(Z \leq 0,07) = 0,5279$
 h) $P(Z < 0,31) = 0,6217$

- 67 En la distribución $N(0, 1)$, calcula las probabilidades que aparecen a continuación.

- a) $P(Z \geq 0,68)$ e) $P(Z = 1,2)$
 b) $P(Z > 0,9)$ f) $P(Z > 1,6)$
 c) $P(Z > 1,5)$ g) $P(Z > 0,03)$
 d) $P(Z \geq 2)$ h) $P(Z \geq 2,21)$
 a) $P(Z \geq 0,68) = 1 - P(Z < 0,6) = 0,2483$
 b) $P(Z > 0,9) = 1 - P(Z \leq 0,9) = 0,1841$
 c) $P(Z > 1,5) = 1 - P(Z \leq 1,5) = 0,0668$
 d) $P(Z \geq 2) = 1 - P(Z < 2) = 0,0228$
 e) $P(Z = 1,2) = 0$
 f) $P(Z > 1,6) = 1 - P(Z \leq 1,6) = 0,0548$
 g) $P(Z > 0,03) = 1 - P(Z \leq 0,03) = 0,488$
 h) $P(Z \geq 2,21) = 1 - P(Z < 2,21) = 0,0136$

- 68 Calcula el valor de las siguientes probabilidades de la distribución $N(0, 1)$.

- a) $P(Z \leq -0,4)$ e) $P(Z < -2,5)$
 b) $P(Z \leq -1,62)$ f) $P(Z \leq -1,76)$
 c) $P(Z < -2,3)$ g) $P(Z < -0,13)$
 d) $P(Z = -2,05)$ h) $P(Z \leq -1,07)$
 a) $P(Z \leq -0,4) = 1 - P(Z < 0,4) = 0,3446$
 b) $P(Z \leq -1,62) = 1 - P(Z < 1,62) = 0,0526$

- c) $P(Z < -2,3) = 1 - P(Z \leq 2,3) = 0,0107$
 d) $P(Z = -2,05) = 0$
 e) $P(Z < -2,5) = 1 - P(Z \leq 2,5) = 0,0062$
 f) $P(Z \leq -1,76) = 1 - P(Z < 1,76) =$
 $= 0,0392$
 g) $P(Z < -0,13) = 1 - P(Z \leq 0,13) =$
 $= 0,4483$
 h) $P(Z \leq -1,07) = 1 - P(Z < 1,07) =$
 $= 0,1423$

69 En la distribución $N(0, 1)$, calcula las probabilidades que aparecen a continuación.

- a) $P(Z > -1,27)$ e) $P(Z = -0,2)$
 b) $P(Z \geq -2,02)$ f) $P(Z \geq -1,04)$
 c) $P(Z > -1,35)$ g) $P(Z > -0,09)$
 d) $P(Z \geq -2)$ h) $P(Z \geq -2,31)$
 a) $P(Z > -1,27) = P(Z < 1,27) = 0,898$
 b) $P(Z \geq -2,02) = P(Z \leq 2,02) = 0,9783$
 c) $P(Z > -1,35) = P(Z < 1,35) = 0,9115$
 d) $P(Z \geq -2) = P(Z \leq 2) = 0,9772$
 e) $P(Z = -0,2) = 0$
 f) $P(Z \geq -1,04) = P(Z \leq 1,04) = 0,8508$
 g) $P(Z > -0,09) = P(Z < 0,09) = 0,5359$
 h) $P(Z \geq -2,31) = P(Z \leq 2,31) = 0,9896$

70 Halla cada una de las siguientes probabilidades de la distribución $N(0, 1)$.

- a) $P(Z > 1,11)$ e) $P(Z < -0,33)$
 b) $P(Z \leq -0,93)$ f) $P(Z > 0,45)$
 c) $P(Z \geq 2,29)$ g) $P(Z \leq -1)$
 d) $P(Z = 0)$ h) $P(Z \geq -2,11)$
 a) $P(Z > 1,11) = 1 - P(Z \leq 1,11) = 0,1335$
 b) $P(Z \leq -0,93) = 1 - P(Z < 0,93) =$
 $= 0,1762$
 c) $P(Z \geq 2,29) = 1 - P(Z < 2,29) = 0,011$
 d) $P(Z = 0) = 0$
 e) $P(Z < -0,33) = 1 - P(Z \leq 0,33) =$
 $= 0,3707$
 f) $P(Z > 0,45) = 1 - P(Z \leq 0,45) = 0,3264$
 g) $P(Z \leq -1) = 1 - P(Z < 1) = 0,1587$
 h) $P(Z \geq -2,11) = P(Z \leq 2,11) = 0,9826$

71 Dada la distribución $N(0, 1)$, calcula las probabilidades siguientes.

- a) $P\left(Z \leq \frac{1}{2}\right)$ d) $P\left(Z < -\frac{10}{6}\right)$
 b) $P\left(Z \geq -\frac{3}{4}\right)$ e) $P\left(Z \leq \frac{4}{7}\right)$
 c) $P\left(Z > \frac{7}{3}\right)$ f) $P\left(Z \geq \frac{5}{2}\right)$
 a) $P\left(Z \leq \frac{1}{2}\right) = 0,6915$
 b) $P\left(Z \geq -\frac{3}{4}\right) = P\left(Z \leq \frac{3}{4}\right) = 0,7734$
 c) $P\left(Z > \frac{7}{3}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{7}{3}\right) = 0,0098$
 d) $P\left(Z < -\frac{10}{6}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{10}{6}\right) = 0,0478$
 e) $P\left(Z \leq \frac{4}{7}\right) = 0,7161$
 f) $P\left(Z \geq \frac{5}{2}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{5}{2}\right) = 0,0062$

72 En la distribución $N(0, 1)$, calcula las probabilidades que aparecen a continuación.

- a) $P(0,4 < Z \leq 1,8)$
 b) $P(-0,6 \leq Z \leq 0,93)$
 c) $P(-1,51 \leq Z < -0,64)$
 a) $P(0,4 < Z \leq 1,8) =$
 $= P(Z \leq 1,8) - P(Z \leq 0,4) = 0,3086$
 b) $P(-0,6 \leq Z \leq 0,93) =$
 $= P(Z \leq 0,93) - P(Z < -0,6) =$
 $= P(Z \leq 0,93) - (1 - P(Z \leq 0,6)) = 0,5496$
 c) $P(-1,51 \leq Z < -0,64) =$
 $= P(Z < -0,64) - P(Z < -1,51) =$
 $= 1 - P(Z \leq 0,64) - (1 - P(Z \leq 1,51)) =$
 $= P(Z \leq 1,51) - P(Z \leq 0,64) = 0,1956$

73 En la distribución $N(0, 1)$, calcula las probabilidades que aparecen a continuación.

- a) $P(-1,8 < Z \leq 1,8)$
 b) $P(-2,06 \leq Z \leq 2,06)$
 c) $P(-1,51 \leq Z < 1,51)$
 a) $P(-1,8 < Z \leq 1,8) =$
 $= P(Z \leq 1,8) - P(Z \leq -1,8) =$
 $= P(Z \leq 1,8) - (1 - P(Z < 1,8)) = 0,9281$

- b) $P(-2,06 \leq Z \leq 2,06) =$
 $= 2 \cdot P(Z \leq 2,06) - 1 = 0,9606$
 c) $P(-1,51 \leq Z < 1,51) =$
 $= P(Z < 1,51) - P(Z < -1,51) =$
 $= P(Z < 1,51) - (1 - P(Z \leq 1,51)) =$
 $= 0,8690$

74 ●●● Halla el valor de k para que se verifiquen las igualdades en la distribución $N(0, 1)$.

- a) $P(Z < k) = 0,9599$
 b) $P(Z > k) = 0,9375$
 c) $P(Z > k) = 0,3085$
 d) $P(Z < k) = 0,0256$
 e) $P(Z \leq k) = 0,4364$
 f) $P(Z > k) = 0,5557$
 a) $P(Z < k) = 0,9599 \rightarrow k = 1,75$
 b) $P(Z > k) = P(Z < -k) = 0,9375 \rightarrow$
 $\rightarrow k = -1,535$
 c) $P(Z > k) = 1 - P(Z \leq k) = 0,3085 \rightarrow$
 $\rightarrow P(Z \leq k) = 0,6915 \rightarrow k = 0,5$
 d) $P(Z < k) = 1 - P(Z \leq -k) = 0,0256 \rightarrow$
 $\rightarrow P(Z \leq -k) = 0,9744 \rightarrow k = -1,95$
 e) $P(Z \leq k) = 1 - P(Z < -k) = 0,4364 \rightarrow$
 $\rightarrow P(Z < -k) = 0,5636 \rightarrow k = -0,16$
 f) $P(Z > k) = P(Z < -k) = 0,5557 \rightarrow$
 $\rightarrow k = -0,14$

75 ●●● Halla $a, b, c, \dots$, para que en una distribución normal $N(108, 16)$ se cumpla lo siguiente.

- a) $P(X < a) = 0,8849$
 b) $P(X < b) = 0,9972$
 c) $P(X < c) = 0,3632$
 d) $P(X \geq d) = 0,0495$
 e) $P(X \geq e) = 0,5987$
 f) $P(X \leq f) = 0,7717$
 a) $P(X < a) = 0,8849 \rightarrow$
 $\rightarrow P\left(\frac{X - 108}{16} < \frac{a - 108}{16}\right) = 0,8849 \rightarrow$
 $\rightarrow \frac{a - 108}{16} = 1,2 \rightarrow a = 127,2$
 b) $P(X < b) = 0,9972 \rightarrow$
 $\rightarrow P\left(\frac{X - 108}{16} < \frac{b - 108}{16}\right) = 0,9972 \rightarrow$
 $\rightarrow \frac{b - 108}{16} = 2,77 \rightarrow b = 152,32$

- c) $P(X < c) = 0,3632 \rightarrow$
 $\rightarrow P\left(\frac{X - 108}{16} < \frac{c - 108}{16}\right) = 0,3632 \rightarrow$
 $\rightarrow P\left(\frac{X - 108}{16} \leq \frac{c - 108}{16}\right) = 0,6368 \rightarrow$
 $\rightarrow -\frac{c - 108}{16} = 0,35 \rightarrow c = 102,4$
 d) $P(X \geq d) = 0,0495 \rightarrow$
 $\rightarrow P\left(\frac{X - 108}{16} \geq \frac{d - 108}{16}\right) = 0,0495 \rightarrow$
 $\rightarrow P\left(\frac{X - 108}{16} < \frac{d - 108}{16}\right) = 0,9505 \rightarrow$
 $\rightarrow \frac{d - 108}{16} = 1,65 \rightarrow d = 134,4$
 e) $P(X \geq e) = 0,3632 \rightarrow$
 $\rightarrow P\left(\frac{X - 108}{16} \geq \frac{e - 108}{16}\right) = 0,5987 \rightarrow$
 $\rightarrow P\left(\frac{X - 108}{16} \leq \frac{e - 108}{16}\right) = 0,5987 \rightarrow$
 $\rightarrow -\frac{e - 108}{16} = 0,25 \rightarrow e = 104$
 f) $P(X \leq f) = 0,7717 \rightarrow$
 $\rightarrow P\left(\frac{X - 108}{16} \leq \frac{f - 108}{16}\right) = 0,7717 \rightarrow$
 $\rightarrow \frac{f - 108}{16} = 0,745 \rightarrow f = 119,92$

76 ●●● Halla el valor de k para que se verifiquen las igualdades en la distribución $N(0, 1)$.

- a) $P(-k < Z < k) = 0,8414$
 b) $P(-k < Z < k) = 0,0398$
 c) $P(-k < Z < k) = 0,3830$
 d) $P(-k < Z < k) = 0,4448$
 e) $P(-k < Z < k) = 0,8664$
 $P(-k < Z < k) =$
 $= P(Z \leq k) - (1 - P(Z \leq k)) =$
 $= 2 \cdot P(Z \leq k) - 1$
 a) $P(-k < Z < k) = 0,8414 \rightarrow$
 $\rightarrow P(Z \leq k) = \frac{0,8414 + 1}{2} = 0,9207 \rightarrow$
 $\rightarrow k = 1,41$
 b) $P(-k < Z < k) = 0,0398 \rightarrow$
 $\rightarrow P(Z \leq k) = \frac{0,0398 + 1}{2} = 0,5199 \rightarrow$
 $\rightarrow k = 0,05$

- c) $P(-k < Z < k) = 0,383 \rightarrow$
 $\rightarrow P(Z \leq k) = \frac{0,383 + 1}{2} = 0,6915 \rightarrow$
 $\rightarrow k = 0,5$
- d) $P(-k < Z < k) = 0,4448 \rightarrow$
 $\rightarrow P(Z \leq k) = \frac{0,4448 + 1}{2} = 0,7224 \rightarrow$
 $\rightarrow k = 0,59$
- e) $P(-k < Z < k) = 0,8664 \rightarrow$
 $\rightarrow P(Z \leq k) = \frac{0,8664 + 1}{2} = 0,9332 \rightarrow$
 $\rightarrow k = 1,5$

77 ●●● Calcula para la distribución $N(5, 2)$ los extremos del intervalo simétrico, $(5 - a, 5 + a)$, que contiene el 80% de las observaciones.

- a) Escribe los datos del problema en términos de probabilidad.
- b) Tipifica y busca las probabilidades en la tabla de la normal $N(0, 1)$ y escribe el intervalo para la distribución $N(0, 1)$.
- c) Con el proceso contrario a la tipificación escribe el intervalo pedido para la distribución normal $N(5, 2)$.

a) $P(5 - a < X < 5 + a) = 0,8 \rightarrow$
 $\rightarrow P(X < 5 - a) = 0,1 \rightarrow$
 $\rightarrow P(X < 5 + a) = 0,9$

b) $P(X < 5 + a) =$
 $= P\left(\frac{X - 5}{2} < \frac{5 + a - 5}{2}\right) =$
 $= P\left(\frac{X - 5}{2} < \frac{a}{2}\right) = 0,9$
 $P\left(Z < \frac{a}{2}\right) = 0,9 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{a}{2} = 1,28 \rightarrow a = 2,56$
 Intervalo: $(-2,56; 2,56)$.

- c) Intervalo:
 $(5 - 2,56; 5 + 2,56) = (2,44; 7,56)$

78 ●●● Determina los extremos del intervalo simétrico respecto a la media μ que contiene el porcentaje indicado de las

observaciones de cada una de las distribuciones $N(\mu, \sigma)$.

- a) Contiene el 90% para $N(15, 3)$.
- b) Contiene el 68% para $N(48, 7)$.
- c) Contiene el 84% para $N(70, 15)$.

Calculamos los extremos correspondientes, $-k$ y k , para $N(0, 1)$ y los transformamos en los extremos x , y de la normal correspondiente mediante las siguientes transformaciones:

$$\frac{x - \mu}{\sigma} = -k \rightarrow x = \mu - \sigma k$$

$$\frac{y - \mu}{\sigma} = k \rightarrow y = \mu + \sigma k$$

- a) $P(-k < Z < k) = 0,9 \rightarrow$
 $\rightarrow P(Z \leq k) = \frac{0,9 + 1}{2} = 0,95 \rightarrow$
 $\rightarrow k = 1,645$

El intervalo es $[10,065; 19,935]$.

- b) $P(-k < Z < k) = 0,68 \rightarrow$
 $\rightarrow P(Z \leq k) = \frac{0,68 + 1}{2} = 0,84 \rightarrow$
 $\rightarrow k = 0,995$

El intervalo es $[41,035; 54,965]$.

- c) $P(-k < Z < k) = 0,84 \rightarrow$
 $\rightarrow P(Z \leq k) = \frac{0,84 + 1}{2} = 0,92 \rightarrow$
 $\rightarrow k = 1,405$

El intervalo es $[48,925; 91,075]$.

79 ●●● Halla el valor de k para que se cumplan las igualdades en la distribución $N(0, 1)$.

- a) $P(k < Z < 2k) = 0,0761$
- b) $P(-k < Z < 3k) = 0,1574$
- c) $P(-2k < Z < k) = 0,9318$
- d) $P(-5k < Z < -2k) = 0,1891$

a) $P(k < Z < 2k) =$
 $= P(Z < 2k) - P(Z < k) =$
 $= 0,0761 \rightarrow k = 0,2$

b) $P(-k < Z < 3k) =$
 $= P(Z < 3k) - P(Z < -k) =$
 $= P(Z < 3k) - P(Z > k) =$
 $= P(Z < 3k) + P(Z < k) - 1 = 0,1574 \rightarrow$
 $\rightarrow P(Z < 3k) + P(Z < k) = 1,1574 \rightarrow$
 $\rightarrow k = 0,1$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } P(-2k < Z < k) &= \\
 &= P(Z < k) - P(Z < -2k) = \\
 &= P(Z < k) - P(Z > 2k) = \\
 &= P(Z < k) + P(Z < 2k) - 1 = \\
 &= 0,9318 \rightarrow \\
 &\rightarrow P(Z < k) + P(Z < 2k) = 1,9318 \rightarrow \\
 &\rightarrow k = 1,5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } P(-5k < Z < -2k) &= \\
 &= P(2k < Z < 5k) = \\
 &= P(Z < 5k) - P(Z < 2k) = \\
 &= 0,1891 \rightarrow k = 0,4
 \end{aligned}$$

80 En la distribución $N(25, 4)$ calcula las probabilidades que aparecen a continuación.

- a) $P(X < 22)$ e) $P(24 < X \leq 30)$
 b) $P(X \geq 27,3)$ f) $P(20 \leq X < 23)$
 c) $P(X \leq 28,4)$ g) $P(21 \leq X < 26)$
 d) $P(X \geq 18,04)$ h) $P(26 \leq X \leq 27)$

$$\begin{aligned}
 \text{a) } P(X < 22) &= P\left(Z \leq \frac{22 - 25}{4}\right) = \\
 &= P(Z \leq -0,75) = \\
 &= 1 - P(Z \leq 0,75) = 0,2266
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } P(X \geq 27,3) &= 1 - P(X \leq 27,3) = \\
 &= 1 - P(Z \leq 0,575) = 0,2826
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } P(X \leq 28,4) &= P(Z \leq 0,85) = \\
 &= 0,8023
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } P(X \geq 18,04) &= 1 - P(X \leq 18,04) = \\
 &= 1 - P(Z \leq -1,74) = \\
 &= P(Z \leq 1,74) = 0,9591
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } P(24 < X \leq 30) &= \\
 &= P(X \leq 30) - P(X \leq 24) = \\
 &= P(Z \leq 1,25) - P(Z \leq -0,25) = \\
 &= P(Z \leq 1,25) - (1 - P(Z \leq 0,25)) = \\
 &= 0,4931
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{f) } P(20 \leq X < 23) &= \\
 &= P(X \leq 23) - P(X \leq 20) = \\
 &= P(Z \leq -0,5) - P(Z \leq -1,25) = \\
 &= P(Z \leq 1,25) - P(Z \leq 0,5) = 0,2029
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{g) } P(21 \leq X < 26) &= \\
 &= P(X \leq 26) - P(X \leq 21) = \\
 &= P(Z \leq 0,25) - P(Z \leq -1) = \\
 &= P(Z \leq 0,25) - (1 - P(Z \leq 1)) = \\
 &= 0,4401
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{h) } P(26 \leq X \leq 27) &= \\
 &= P(X \leq 27) - P(X \leq 26) = \\
 &= P(Z \leq 0,5) - P(Z \leq 0,25) = 0,0928
 \end{aligned}$$

81 En la distribución $N(80, 11)$ calcula las probabilidades que aparecen a continuación.

- a) $P(X < 86)$ e) $P(67 < X \leq 77)$
 b) $P(X \geq 88)$ f) $P(76 \leq X < 85)$
 c) $P(X \leq 75)$ g) $P(70 \leq X \leq 72)$
 d) $P(X \geq 68)$ h) $P(83 \geq X > 80)$

$$\begin{aligned}
 \text{a) } P(X < 86) &= P\left(Z \leq \frac{86 - 80}{11}\right) = \\
 &= P(Z \leq 0,55) = 0,7088
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } P(X \geq 88) &= 1 - P(X \leq 88) = \\
 &= 1 - P(Z \leq 0,73) = 0,2327
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } P(X \leq 75) &= P(Z \leq -0,45) = \\
 &= 1 - P(Z \leq 0,45) = 0,33
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } P(X \geq 68) &= 1 - P(X \leq 68) = \\
 &= 1 - P(Z \leq -1,09) = \\
 &= P(Z \leq 1,09) = 0,8621
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } P(67 < X \leq 77) &= \\
 &= P(X \leq 77) - P(X \leq 67) = \\
 &= P(Z \leq -0,27) - P(Z \leq -1,18) = \\
 &= P(Z \leq 1,18) - P(Z \leq 0,27) = 0,2746
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{f) } P(76 \leq X < 85) &= \\
 &= P(X \leq 85) - P(X \leq 76) = \\
 &= P(Z \leq 0,45) - P(Z \leq -0,36) = \\
 &= P(Z \leq 0,45) - (1 - P(Z \leq 0,36)) = \\
 &= 0,3142
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{g) } P(70 \leq X \leq 72) &= \\
 &= P(X \leq 72) - P(X \leq 70) = \\
 &= P(Z \leq -0,73) - P(Z \leq -0,91) = \\
 &= P(Z \leq 0,91) - P(Z \leq 0,73) = \\
 &= 0,513
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{h) } P(83 \geq X > 80) &= \\
 &= P(X \leq 83) - P(X \leq 80) = \\
 &= P(Z \leq 0,27) - P(Z \leq 0) = \\
 &= 0,1064
 \end{aligned}$$

82 Calcula, en cada caso, μ y σ de una distribución $N(\mu, \sigma)$ sabiendo que:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } P(X \leq 22) &= 0,6915 \\
 P(X < 28) &= 0,9938
 \end{aligned}$$

b) $P(X > 25) = 0,1056$

$P(X > 4,8) = 0,9332$

a) $P(X \leq 22) =$

$= P\left(Z \leq \frac{22 - \mu}{\sigma}\right) = 0,6915 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{22 - \mu}{\sigma} = 0,5 \rightarrow 0,5\sigma + \mu = 22$

$P(X < 28) =$

$= P\left(Z \leq \frac{28 - \mu}{\sigma}\right) = 0,9938 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{28 - \mu}{\sigma} = 2,5 \rightarrow 2,5\sigma + \mu = 28$

$0,5\sigma + \mu = 22 \rightarrow \begin{cases} \mu = 20,5 \\ 2,5\sigma + \mu = 28 \end{cases}$

$2,5\sigma + \mu = 28 \rightarrow \begin{cases} \mu = 20,5 \\ \sigma = 3 \end{cases}$

b) $P(X > 25) = 1 - P(X \leq 25) =$

$= 1 - P\left(Z \leq \frac{25 - \mu}{\sigma}\right) = 0,1056 \rightarrow$

$\rightarrow P\left(Z \leq \frac{25 - \mu}{\sigma}\right) = 0,8944 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{25 - \mu}{\sigma} = 1,25 \rightarrow 1,25\sigma + \mu = 25$

$P(X > 4,8) = 1 - P(X \leq 4,8) =$

$= 1 - P\left(Z \leq \frac{4,8 - \mu}{\sigma}\right) =$

$= P\left(Z \leq -\frac{4,8 - \mu}{\sigma}\right) = 0,9332 \rightarrow$

$\rightarrow -\frac{4,8 - \mu}{\sigma} = 1,5 \rightarrow$

$\rightarrow -1,5\sigma + \mu = 4,8$

$1,25\sigma + \mu = 25$

$-1,5\sigma + \mu = 4,8 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} \mu = \frac{174}{11} = 15,8182 \\ \sigma = \frac{404}{55} = 7,34545 \end{cases}$

- 83 RETO.** Dadas dos variables aleatorias con distribuciones normales $X \equiv N(5, 2)$ e $Y \equiv N(9, 3)$, encuentra un valor a tal que $P(X > a) = P(Y < a)$.

$P(X > a) = P(Y < a) \rightarrow$

$\rightarrow P\left(Z > \frac{a - 5}{2}\right) = P\left(Z < \frac{a - 9}{3}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \frac{a - 5}{2} = -\frac{a - 9}{3} \rightarrow$

$\rightarrow 3(a - 5) = -2(a - 9) \rightarrow$

$\rightarrow a = \frac{33}{5} = 6,6$

Comprobamos la solución.

$P(X > 6,6) = P\left(Z > \frac{6,6 - 5}{2}\right) = P(Z > 0,8)$

$P(Y < 6,6) = P\left(Z < \frac{6,6 - 9}{3}\right) = P(Z < -0,8)$

$P(Z > 0,8) = P(Z < -0,8) \rightarrow$

$\rightarrow P(X > 6,6) = P(Y < 6,6)$

- 84** La talla de un grupo de personas sigue una distribución normal con una media de 165 cm y una desviación típica de 12 cm. Calcula la probabilidad de que una persona elegida al azar:

a) Mida más de 170 cm.

b) Mida menos de 168 cm.

c) Mida entre 159 y 172 cm.

a) $P(X > 170) = 1 - P(X \leq 170) =$

$= 1 - P(Z \leq 0,42) = 0,3372$

b) $P(X < 168) = P(Z < 0,25) = 0,5987$

c) $P(159 \leq X \leq 172) =$

$= P(X \leq 172) - P(X < 159) =$

$= P(Z \leq 0,52) - P(Z < -0,50) =$

$= P(Z \leq 0,52) + P(Z \leq 0,50) - 1 = 0,4116$

- 85** Las puntuaciones obtenidas por los alumnos de 1.º de Bachillerato en la materia de Matemáticas siguen una distribución normal, donde:

$P(X \leq 3) = 0,1762$

$P(X > 9) = 0,0075$

Averigua la media y la desviación típica de la distribución normal.

$P(X \leq 3) = P\left(Z \leq \frac{3 - \mu}{\sigma}\right) = 0,1762 \rightarrow$

$\rightarrow P\left(Z \leq -\frac{3 - \mu}{\sigma}\right) = 0,8238 \rightarrow$

$\rightarrow -\frac{3 - \mu}{\sigma} = 0,93 \rightarrow -0,93\sigma + \mu = 3$

$P(X > 9) = 1 - P(X \leq 9) =$

$= 1 - P\left(Z \leq \frac{9 - \mu}{\sigma}\right) = 0,0075 \rightarrow$

$\rightarrow P\left(Z \leq \frac{9 - \mu}{\sigma}\right) = 0,9925 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{9 - \mu}{\sigma} = 2,43 \rightarrow 2,43\sigma + \mu = 9$



$$\begin{cases} -0,93\sigma + \mu = 3 \\ 2,43\sigma + \mu = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mu = 4,66 \\ \sigma = 1,79 \end{cases}$$

86 MATEMÁTICAS Y... ACUICULTURA.

La acuicultura marina se practica con agua salada, generalmente en el mar. Un ejemplo clásico son las bateas de mejillones de las rías gallegas, aunque también hay granjas marinas especializadas en la cría y explotación de especies muy solicitadas como pueden ser lubinas, doradas o corvinas.



El peso de las lubinas de piscifactoría, medido en gramos, se distribuye según una normal $N(900, 200)$. Se extraen 100 ejemplares para el mercado.

- Determina el número de lubinas que pesa más de 980 g.
- Calcula el porcentaje de las que pesan entre 750 y 1100 g.
- Completa en tu cuaderno:
«Las 20 lubinas más pequeñas pesan menos de ...».
«La cuarta parte formada por las más grandes pesan más de ...».

- $$P(X > 980) =$$

$$= P\left(Z > \frac{980 - 900}{200}\right) = P(Z > 0,4) =$$

$$= 1 - P(Z < 0,4) = 0,3446$$

$$0,3446 \cdot 100 = 34,46$$

Aproximadamente 34 lubinas.
- $$P(750 < X < 1100) =$$

$$= P\left(\frac{750 - 900}{200} < Z < \frac{1100 - 900}{200}\right) =$$

$$= P(-0,75 < Z < 1) = 0,6147$$
- $$P(X < k) = 0,2 \rightarrow$$

$$\rightarrow P\left(Z < \frac{k - 900}{200}\right) = 0,2 \rightarrow$$

$$\rightarrow P\left(Z < \frac{900 - k}{200}\right) = 0,8 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{900 - k}{200} = 0,84 \rightarrow k = 732$$

Las 20 lubinas más pequeñas pesan menos de 732 g.

$$P(X > k) = 0,25 \rightarrow$$

$$\rightarrow P\left(Z > \frac{k - 900}{200}\right) = 0,25 \rightarrow$$

$$\rightarrow P\left(Z < \frac{k - 900}{200}\right) = 0,75 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{k - 900}{200} = 0,665 \rightarrow k = 1033$$

La cuarta parte formada por las más grandes pesan más de 1033 g.

Esta actividad puede utilizarse para trabajar el ODS 9, industria, innovación e infraestructura.

- 87 Los pesos de los deportistas de un club de natación siguen una distribución con media 75 kg y desviación típica 4 kg. Calcula la probabilidad de que un deportista elegido al azar:

- Pese menos de 72 kg pero más de 70 kg.
 - Pese entre 78 y 80 kg.
 - Pese, al menos, 81 kg.
- $$P(70 \leq X \leq 72) =$$

$$= P(X \leq 72) - P(X < 70) =$$

$$= P(Z \leq -0,75) - P(Z < -1,25) =$$

$$= P(Z \leq 1,25) - P(Z \leq 0,75) = 0,121$$
 - $$P(78 \leq X \leq 80) =$$

$$= P(X \leq 80) - P(X < 78) =$$

$$= P(Z \leq 1,25) - P(Z < 0,75) = 0,121$$
 - $$P(X > 81) = 1 - P(X \leq 81) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1,5) = 0,0668$$

- 88 En una ciudad la temperatura máxima en el mes de julio sigue una distribución normal de media 32 °C y una desviación típica de 4 °C. Calcula cuántos días se superan los 37 °C y cuántos no se superan los 35 °C.

Para calcular el número de días multiplicamos la probabilidad por el número total de días de julio.

$P(X \geq 37) = 1 - P(X < 37) =$
 $= 1 - P(Z < 1,25) = 0,1056 \rightarrow$
 $\rightarrow 0,1056 \cdot 31 = 3,27 \approx$
 ≈ 3 días de julio se superan los 37°C .
 $P(X \leq 35) = P(Z \leq 0,75) = 0,7734 \rightarrow$
 $\rightarrow 0,7734 \cdot 31 = 23,97 \approx$
 ≈ 24 días en julio no se superan los 35°C .

- 89 El peso de las manzanas se distribuye normalmente con una media de 175 g y una desviación típica de 25 g. Un almacenista ha comprado 15 000 kg de manzanas.



- a) ¿Qué cantidad de manzanas espera que pesen menos de 168 g?
- b) ¿Qué porcentaje pesará entre 170 y 180 g?
- c) Si quiere hacer dos grupos, uno con las que pesen menos de 160 g y otro con el resto, ¿cuántos kilos habrá en cada grupo?
- d) Si, por el contrario, uno de los grupos está formado por la cuarta parte de manzanas más pesadas, ¿a partir de qué peso hará la separación?
- a) Para calcular el número de manzanas multiplicamos la probabilidad por el número de kilos comprados.
- $$P(X \leq 168) = P(Z \leq -0,28) =$$
- $$= 1 - P(Z < 0,28) = 0,3897 \rightarrow$$
- $$\rightarrow 0,3897 \cdot 15\,000 = 5\,845,5 \text{ kg}$$
- b) $P(170 \leq X \leq 180) =$
- $$= P(X \leq 180) - P(X < 170) =$$
- $$= P(Z \leq 0,2) - P(Z < -0,2) =$$
- $$= P(Z \leq 0,2) + P(Z \leq 0,2) - 1 =$$
- $$= 0,1586 \rightarrow 15,86 \%$$
- c) $P(X \leq 160) = P(Z \leq -0,6) =$
- $$= 1 - P(Z < 0,6) = 0,2743 \rightarrow$$
- $$\rightarrow 0,2743 \cdot 15\,000 = 4\,114,5 \text{ kg}$$
- de manzanas de menos de 160 g.
- $$15\,000 - 4\,114,5 = 10\,885,5 \text{ kg}$$
- de manzanas de más de 160 g.
- d) $P(X \geq k) = \frac{1}{4} = 0,25 \rightarrow$

$\rightarrow P(X \geq k) = 1 - P(X < k) =$
 $= 1 - P\left(Z < \frac{k - 175}{25}\right) = 0,25 \rightarrow$
 $\rightarrow P\left(Z < \frac{k - 175}{25}\right) = 0,75 \rightarrow$
 $\rightarrow \frac{k - 175}{25} = 0,675 \rightarrow$
 $\rightarrow k = 191,875$
 Hará la separación desde 192 g.



- 90 **MATEMÁTICAS Y... CONSUMO.** La tecnología LED de bajo consumo aplicada a las bombillas hace que estas sean reciclables y que su duración se haya multiplicado teniendo una media de duración útil de 15 000 horas. Una empresa que fabrica este tipo de bombillas asegura que la duración de sus bombillas LED sigue una distribución normal $N(15\,000, 300)$.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que una bombilla dure más de 15 500 horas?
- b) ¿Y de que su duración esté entre 14 800 y 15 200 horas?
- c) De 100 000 bombillas, ¿cuántas se espera que duren menos de 14 000 h?
- a) $P(X > 15\,500) =$
- $$= P\left(Z > \frac{15\,500 - 15\,000}{300}\right) = P(Z > 1,67) =$$
- $$= 1 - P(Z \leq 1,67) = 1 - 0,9525 = 0,0475$$
- b) $P(14\,800 < X < 15\,200) =$
- $$= P\left(\frac{14\,800 - 15\,000}{300} < Z < \frac{15\,200 - 15\,000}{300}\right) =$$
- $$= P(-0,66 < Z < 0,66) = 0,4908$$
- c) $P(X < 14\,000) =$
- $$= P\left(Z < \frac{14\,000 - 15\,000}{300}\right) =$$
- $$= P(Z < -3,3) =$$
- $$= 1 - P(Z < 3,3) = 0,0005$$
- $$100\,000 \cdot 0,0005 = 50$$
- Se espera que unas 50 bombillas duren menos de 14 000 h.

Esta actividad puede utilizarse para trabajar el ODS 12, producción y consumo responsables.

- 91 Se sabe que el 93,7% de las camisas de una marca se fabrican en menos de 7 horas. Si el tiempo de fabricación se distribuye con una media de 6,5 horas, calcula la desviación típica.



$$\begin{aligned}
 X &= \text{«Tiempo de fabricación de una camisa»} \rightarrow \\
 &\rightarrow X \equiv N(6,5; \sigma) \\
 P(X \leq 7) &= 93,70\% = 0,937 \rightarrow \\
 &\rightarrow P(X \leq 7) = P\left(Z \leq \frac{7 - 6,5}{\sigma}\right) = 0,937 \rightarrow \\
 &\rightarrow \frac{0,5}{\sigma} = 1,53 \rightarrow \sigma = 0,327 \rightarrow \\
 &\rightarrow X \equiv N(6,5; 0,327)
 \end{aligned}$$

3. Estima probabilidades mediante aproximación de la binomial a la normal

- 92 El 86% de los empleados de una gran empresa pasan sus vacaciones entre julio y agosto. Calcula la probabilidad de que, de un grupo de 60 empleados de esta empresa elegidos al azar, 50 o menos disfruten sus vacaciones en julio y agosto.



- Comprueba que sigue una distribución binomial y halla sus parámetros.
- Verifica si es posible calcular las probabilidades con las tablas y, en caso negativo, si se puede aproximar a una distribución normal.

- Calcula las probabilidades como si se tratara de una distribución normal teniendo en cuenta que se está pasando de una distribución discreta a una continua.

- Se trata de una binomial $B(60; 0,86)$.
- No se puede calcular con las tablas pero se puede aproximar por una normal $N(51,6; 2,69)$
- Hacemos una aproximación a la normal.

$$\mu = 60 \cdot 0,86 = 51,6$$

$$\sigma = \sqrt{60 \cdot 0,86 \cdot 0,14} = 2,69$$

$$\begin{aligned}
 P(X \leq 50) &= P\left(Z < \frac{50,5 - 51,6}{2,69}\right) = \\
 &= P(Z < -0,41) = 0,3446
 \end{aligned}$$

- 93 Una máquina que fabrica memorias USB consigue fabricar un 90% de unidades sin error. Si escogemos al azar 100 memorias USB, calcula las siguientes probabilidades.

- Que haya dos defectuosas.
- Que haya más de una defectuosa.

$X = \text{«N.º de memorias USB defectuosas de las 100 escogidas al azar»} \rightarrow$

$$\rightarrow X \equiv B(100; 0,1)$$

$$\begin{aligned}
 100 \cdot 0,1 &= 10 > 5 \\
 100 \cdot 0,9 &= 90 > 5
 \end{aligned} \rightarrow$$

$$\rightarrow X \equiv B(100; 0,1) \approx N(10; 3)$$

$$\begin{aligned}
 \text{a) } P\left(2 - \frac{1}{2} \leq X \leq 2 + \frac{1}{2}\right) &= \\
 &= P(X \leq 2,5) - P(X < 1,5) = \\
 &= P(Z \leq -2,5) - P(Z < -2,83) = \\
 &= P(Z \leq 2,83) - P(Z < 2,5) = 0,0039
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } P(X > 1,5) &= 1 - P(X \leq 1,5) = \\
 &= 1 - P(Z \leq -2,83) = \\
 &= P(Z < 2,83) = 0,9977
 \end{aligned}$$

- 94 Un examen tipo test consta de 50 preguntas con tres posibles respuestas, siendo solamente una de ellas correcta. Si se realiza el examen respondiendo al azar, calcula.

- La probabilidad de que se responda correctamente a más de 4 preguntas.

- b) La probabilidad de que se responda correctamente a menos de 10 preguntas.
 c) La probabilidad de que se apruebe el examen (para ello se debe responder correctamente a 25 o más preguntas).

$$P(\text{«Acertar una pregunta»}) = \frac{1}{3}$$

$X = \text{«N.º de preguntas respondidas correctamente de las 50»} \rightarrow$

$$\rightarrow X \equiv B\left(50; \frac{1}{3}\right)$$

$$\left. \begin{aligned} 50 \cdot \frac{1}{3} &= 16,67 > 5 \\ 50 \cdot \frac{2}{3} &= 33,67 > 5 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow X \equiv B\left(50; \frac{1}{3}\right) \approx N\left(\frac{50}{3}; \frac{10}{3}\right)$$

- a) $P(X > 4,5) = 1 - P(X \leq 4,5) =$
 $= 1 - P(Z \leq -3,65) =$
 $= P(Z < 3,65) = 0,9999$
 b) $P(X < 9,5) = P(Z < -2,15) =$
 $= 1 - P(Z \leq 2,15) = 0,0158$
 c) $P(X \geq 24,5) = 1 - P(X < 24,5) =$
 $= 1 - P(Z < 2,35) = 0,0094$

95 En cierto laboratorio de análisis clínicos saben que el 70 % de las pruebas de anemia que realizan resultan negativas. Si han recibido 60 muestras para analizar, responde.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya menos de 5 pruebas que den positivo?
 b) ¿Cuál es la probabilidad de que la prueba resulte positiva a una persona o más?

$X = \text{«N.º de pruebas positivas de las 60»} \rightarrow$
 $\rightarrow X \equiv B(60; 0,3)$

$$\left. \begin{aligned} 60 \cdot 0,3 &= 18 > 5 \\ 60 \cdot 0,7 &= 42 > 5 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow X \equiv B(60; 0,3) \approx N(18; 3,55)$$

- a) $P(X < 4,5) = P(Z < -3,80) =$
 $= 1 - P(Z \leq 3,80) = 0,0001$
 b) $P(X \geq 0,5) = 1 - P(X < 0,5) =$
 $= 1 - P(Z < -4,93) = P(Z \leq 4,93) \approx 1$

96 Se está experimentando una nueva vacuna que resulta efectiva en el 60 % de los casos. Si se eligen al azar

200 personas, halla las siguientes probabilidades.

- a) Que en ese grupo la vacuna sea efectiva para 30 personas.
 b) Que la vacuna sea efectiva para más de 80 pero menos de 120 personas.
 c) Que la vacuna sea efectiva en 90 o menos personas.

$X = \text{«N.º de vacunaciones efectivas de las 200 realizadas»} \rightarrow$

$$\rightarrow X \equiv B(200; 0,6)$$

$$\left. \begin{aligned} 200 \cdot 0,6 &= 333,33 > 5 \\ 200 \cdot 0,4 &= 80 > 5 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow X \equiv B(200; 0,6) \approx N(120; 6,93)$$

- a) $P\left(30 - \frac{1}{2} \leq X \leq 30 + \frac{1}{2}\right) =$
 $= P(X \leq 30,5) - P(X < 29,5) =$
 $= P(Z \leq -12,91) - P(Z < -13,06) =$
 $= P(Z \leq 13,06) - P(Z < 12,91) \approx 0$
 b) $P(80,5 < X < 119,5) =$
 $= P(X < 119,5) - P(X \leq 80,5) =$
 $= P(Z < -0,07) - P(Z \leq -5,7) =$
 $= P(Z < 5,7) - P(Z \leq 0,07) = 0,4721$
 c) $P(X \leq 90,5) = P(Z \leq -4,26) =$
 $= 1 - P(Z < 4,26) \approx 0$

97 Las compañías de seguros han calculado que 1 de cada 5 vehículos tiene un accidente al año. Si se toman al azar 40 vehículos, determina la probabilidad de que:

- a) Ese año 10 de ellos tengan un accidente.
 b) Sean entre 10 y 12 vehículos, ambos números incluidos.
 c) Ese año se accidenten más de 15 vehículos.

$$X \equiv B(40; 0,2)$$

$$\left. \begin{aligned} np &= 8 > 5 \\ n(1-p) &= 6,4 > 5 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow X \equiv B(40; 0,2) \approx N(8; 2,53)$$

- a) $P(X = 10) = P(9,5 < X < 10,5) =$
 $= P\left(\frac{9,5-8}{2,53} < \frac{X-8}{2,53} < \frac{10,5-8}{2,53}\right) =$
 $= P(0,59 < Z < 0,98) =$
 $= P(Z < 0,98) - P(Z \leq 0,59) =$
 $= 0,8365 - 0,7224 = 0,1141$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } P(9,5 \leq X \leq 12,5) &= \\
 &= P\left(\frac{9,5 - 8}{2,53} \leq \frac{X - 8}{2,53} \leq \frac{12,5 - 8}{2,53}\right) = \\
 &= P(0,59 \leq Z \leq 1,78) = \\
 &= P(Z \leq 1,78) - P(Z < 0,59) = \\
 &= 0,9625 - 0,7224 = 0,2401 \\
 \text{c) } P(X > 15,5) &= \\
 &= P\left(\frac{X - 8}{2,53} > \frac{15,5 - 8}{2,53}\right) = \\
 &= P(Z > 2,96) = 1 - P(Z \leq 2,96) = \\
 &= 1 - 0,9985 = 0,0015
 \end{aligned}$$

4. Calcula probabilidades mediante las distribuciones binomial y normal

- 98 Solo el 10% de los boletos de una tómbola tienen premio. ¿Qué es más probable, tener dos premios comprando 10 boletos o conseguir un premio comprando 3 boletos?

Si se compran 10 boletos:

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^8 = 0,1937$$

Si se compran 3 boletos:

$$P(X = 1) = \binom{3}{1} \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^2 = 0,243$$

Así, es más probable conseguir un premio comprando 3 boletos.

- 99 Escoge, entre los juegos a) y b), el que tengas mayor probabilidad de ganar.

- a) Se lanzan 2 dados y si la suma es mayor que 9, ganas.
 b) Se lanzan 10 monedas y ganas si salen más de 6 caras.
 a) $P(\text{«suma mayor que 9 al lanzar dos dados»}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0,1667$
 b) $X \equiv B(10; 0,5)$

$$\begin{aligned}
 P(X > 6) &= P(X = 7) + P(X = 8) + \\
 &\quad + P(X = 9) + P(X = 10) = \\
 &= \binom{10}{7} \cdot 0,5^7 \cdot 0,5^3 + \binom{10}{8} \cdot \\
 &\quad \cdot 0,5^8 \cdot 0,5^2 + \binom{10}{9} \cdot 0,5^9 \cdot 0,5^1 + \\
 &\quad + \binom{10}{10} \cdot 0,5^{10} \cdot 0,5^0 = 0,1718
 \end{aligned}$$

En el juego b) se tiene mayor probabilidad de ganar.

- 100 Se sabe que el 98,61% de los tornillos fabricados por una empresa tiene un diámetro menor que 3,398 mm. Si el diámetro de los tornillos se distribuye según una normal de media 3,2 mm, determina la desviación típica.

$$\begin{aligned}
 P(X < 3,398) &= 0,9861 \rightarrow \\
 \rightarrow P\left(\frac{X - 3,2}{\sigma} < \frac{3,398 - 3,2}{\sigma}\right) &= 0,9861 \rightarrow \\
 \rightarrow P\left(Z < \frac{0,198}{\sigma}\right) &= 0,9861 \rightarrow \\
 \rightarrow \frac{0,198}{\sigma} &= 2,2 \rightarrow \sigma = 0,09
 \end{aligned}$$

- 101 La distribución de edades de los miembros de un club sigue una ley normal $N(\mu, \sigma)$. Sabiendo que el 94,52% tiene menos de 32 años, y un 21,19% tiene menos de 20 años, calcula su media y su desviación típica.

$$\begin{aligned}
 P(X < 32) &= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{32 - \mu}{\sigma}\right) = \\
 &= P\left(Z < \frac{32 - \mu}{\sigma}\right) = 0,9452 \rightarrow \\
 \rightarrow \frac{32 - \mu}{\sigma} &= 1,6 \rightarrow 32 - \mu = 1,6\sigma \\
 P(X < 20) &= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{20 - \mu}{\sigma}\right) = \\
 &= P\left(Z < \frac{20 - \mu}{\sigma}\right) = 0,2119 \rightarrow \\
 \rightarrow P\left(Z < -\frac{20 - \mu}{\sigma}\right) &= 0,7881 \rightarrow \\
 \rightarrow -\frac{20 - \mu}{\sigma} &= 0,8 \rightarrow 20 - \mu = -0,8\sigma \\
 \left. \begin{aligned} 32 - \mu &= 1,6\sigma \\ 20 - \mu &= -0,8\sigma \end{aligned} \right\} &\rightarrow \left\{ \begin{aligned} \mu &= 24 \\ \sigma &= 5 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

- 102 Un fabricante de correas para relojes ha estudiado que el contorno de la muñeca de los varones sigue una distribución normal cuya media es 20,5 cm y la desviación típica es 1,5 cm.

- a) ¿Qué porcentaje de la población tiene un contorno de muñeca de más de 23 cm?

- b) Si se fabrican correas para contornos de muñeca de entre 17 y 22 cm, ¿qué porcentaje de la población podrá usarlas?
- c) Se pretende reducir costes fabricando menos variedad de longitudes de correas. Encuentra un intervalo $(20,5 - a; 20,5 + a)$ en el que se incluya el 95% de los varones.

$$\begin{aligned} \text{a) } P(X > 23) &= \\ &= P\left(\frac{X - 20,5}{1,5} > \frac{23 - 20,5}{1,5}\right) = \\ &= P(Z > 1,67) = 1 - P(Z \leq 1,67) = \\ &= 1 - 0,9525 = 0,0475 \end{aligned}$$

El 4,75% de la población tiene un contorno de muñeca de más de 23 cm.

$$\begin{aligned} \text{b) } P(17 < X < 22) &= \\ &= P\left(\frac{17 - 20,5}{1,5} < \frac{X - 20,5}{1,5} < \right. \\ &\quad \left. < \frac{22 - 20,5}{1,5}\right) = \\ &= P(-2,33 < Z < 1) = \\ &= P(Z < 1) - (1 - P(Z < 2,33)) = \\ &= 0,8413 - 1 + 0,9901 = 0,8314 \end{aligned}$$

Esas correas podrá usarlas el 83,14% de la población.

$$\begin{aligned} \text{c) } P(20,5 - a < X < 20,5 + a) &= 0,95 \rightarrow \\ \rightarrow P\left(\frac{20,5 - a - 20,5}{1,5} < \frac{X - 20,5}{1,5} < \right. \\ &\quad \left. < \frac{20,5 + a - 20,5}{1,5}\right) = \\ &= P\left(-\frac{a}{1,5} < Z < \frac{a}{1,5}\right) = \\ &= P\left(Z < \frac{a}{1,5}\right) - \left(1 - P\left(Z < \frac{a}{1,5}\right)\right) = \\ &= 2P\left(Z < \frac{a}{1,5}\right) - 1 = 0,95 \rightarrow \\ \rightarrow P\left(Z < \frac{a}{1,5}\right) &= 0,975 \rightarrow \\ \rightarrow \frac{a}{1,5} &= 1,96 \rightarrow a = 2,94 \end{aligned}$$

El intervalo en el que se encuentra el 95% de los varones es $(17,56; 23,44)$.

- 103** Dos amigos están jugando al parchís. Uno de ellos asegura que ha tirado el dado 30 veces y no le ha salido ningún 5.

El otro amigo afirma que eso es imposible. ¿Es realmente imposible? ¿Cuál es la probabilidad de que eso suceda?



No es imposible, porque la probabilidad no puede asegurar el resultado de los lanzamientos.

$$\rightarrow X \equiv B\left(30; \frac{1}{6}\right)$$

$$P(X = 0) = \binom{30}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{30} = 0,0042$$

- 104** En un instituto se han comprado 150 ordenadores para 4 aulas de informática. La duración de la batería permite tener una media de trabajo de 180 minutos, con una desviación típica de 25 minutos.

- a) Calcula la probabilidad de que la batería de uno de los ordenadores solo dure 2 horas.
- b) ¿Cuántos ordenadores tendrán una batería cuya carga dure más de 200 minutos?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que 110 de esos ordenadores sigan trabajando a los 180 minutos?

$$X \equiv N(180, 25)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(X \leq 120) &= \\ &= P\left(\frac{X - 180}{25} \leq \frac{120 - 180}{25}\right) = \\ &= P(Z \leq -2,4) = 1 - P(Z < 2,4) = \\ &= 1 - 0,9918 = 0,0082 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(X > 200) &= \\ &= P\left(\frac{X - 180}{25} > \frac{200 - 180}{25}\right) = \\ &= P(Z > 0,8) = 1 - P(Z \leq 0,8) = \\ &= 1 - 0,7881 = 0,2119 \end{aligned}$$

$$0,2119 \cdot 150 = 31,785$$

En 31 ordenadores la carga de la batería durará más de 200 minutos.

$$\begin{aligned} \text{c) } P(X \geq 180) &= \\ &= P\left(\frac{X - 180}{25} \geq \frac{180 - 180}{25}\right) = \\ &= P(Z \geq 0) = 1 - P(Z < 0) = \\ &= 1 - 0,5 = 0,5 \\ Y &\equiv B(150; 0,5) \\ np &= 75 > 5 \} \rightarrow \\ n(1 - p) &= 75 > 5 \} \rightarrow \\ \rightarrow Y &\equiv B(150; 0,5) \approx N(75; 6,12) \\ P(Y = 110) &= P(109,5 < Y < 110,5) = \\ &= P\left(\frac{109,5 - 75}{6,12} < \frac{Y - 75}{6,12} < \right. \\ &\quad \left. < \frac{110,5 - 75}{6,12}\right) = \\ &= P(5,62 < Z < 5,8) = \\ &= P(Z < 5,8) - P(Z < 5,62) = \\ &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$



105 El peso de los recién nacidos se distribuye según una distribución normal de media μ y desviación típica σ . Si los últimos datos publicados aseguran que los percentiles 75 y 90 de esta distribución son 3,2 kg y 3,5 kg, respectivamente, calcula.

- La probabilidad de que un recién nacido pese menos de 2,5 kg.
- La probabilidad de que un recién nacido pese más de 4 kg.
- El percentil 10.
- El valor de la mediana de la distribución.

$$\begin{aligned} P(X < 3,2) &= 0,75 \rightarrow \\ \rightarrow P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{3,2 - \mu}{\sigma}\right) &= \\ &= P\left(Z < \frac{3,2 - \mu}{\sigma}\right) = 0,75 \rightarrow \\ \rightarrow \frac{3,2 - \mu}{\sigma} &= 0,68 \\ P(X < 3,5) &= 0,9 \rightarrow \\ \rightarrow P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{3,5 - \mu}{\sigma}\right) &= \\ &= P\left(Z < \frac{3,5 - \mu}{\sigma}\right) = 0,9 \rightarrow \\ \rightarrow \frac{3,5 - \mu}{\sigma} &= 1,29 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3,2 - \mu &= 0,68\sigma \rightarrow \begin{cases} \mu = 2,86 \\ \sigma = 0,49 \end{cases} \\ 3,5 - \mu &= 1,29\sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(X < 2,5) &= \\ &= P\left(\frac{X - 2,86}{0,49} < \frac{2,5 - 2,86}{0,49}\right) = \\ &= P(Z < -0,73) = 1 - P(Z \leq 0,73) = \\ &= 1 - 0,7673 = 0,2327 \\ \text{b) } P(X > 4) &= \\ &= P\left(\frac{X - 2,86}{0,49} > \frac{4 - 2,86}{0,49}\right) = \\ &= P(Z > 2,32) = 1 - P(Z \leq 2,32) = \\ &= 1 - 0,9898 = 0,0102 \\ \text{c) } P(X < a) &= 0,1 \rightarrow \\ \rightarrow P\left(\frac{X - 2,86}{0,49} < \frac{a - 2,86}{0,49}\right) &= \\ &= P\left(Z < \frac{a - 2,86}{0,49}\right) = 0,1 \rightarrow \\ \rightarrow P\left(Z \leq -\frac{a - 2,86}{0,49}\right) &= 0,9 \rightarrow \\ \rightarrow -\frac{a - 2,86}{0,49} &= 1,29 \rightarrow a = 2,23 \\ \text{d) } P(X \leq M) &= 0,5 \rightarrow \\ \rightarrow P\left(\frac{X - 2,86}{0,49} \leq \frac{M - 2,86}{0,49}\right) &= \\ &= P\left(Z \leq \frac{M - 2,86}{0,49}\right) = 0,5 \rightarrow \\ \rightarrow \frac{M - 2,86}{0,49} &= 0 \rightarrow M = 2,86 \end{aligned}$$

106

MATEMÁTICAS Y... TRANSPORTES.

•••



Los viajes utilizando el tren se han convertido en un medio rápido, fiable y muy ecológico. De hecho, la compañía de transportes está tan segura de su eficiencia que si se retrasa, devuelve el dinero del billete.

- Retraso superior a 15 minutos: devolución del 50 %
- Retraso superior a 30 minutos: devolución del 100 %

En una estación se ha medido el retraso, en minutos, de uno de estos trenes y sus medidas se ajustan a una normal $N(6, 5)$.

- a) ¿Qué probabilidad hay de que un tren se retrase más de 9 minutos?
- b) ¿Y de que tenga un retraso menor de 2 minutos?
- c) ¿Y de que el retraso esté entre 4 y 8 minutos?
- d) ¿Qué probabilidad hay de que tenga que devolver todo el dinero?
- e) Completa la frase: «De cada 1000 viajes se espera devolver la mitad del precio de los billetes en ... viajes».

$$a) P(X > 9) = P\left(Z > \frac{9-6}{5}\right) = P(Z > 0,6) = 0,2743$$

$$b) P(X < 2) = P\left(Z < \frac{2-6}{5}\right) = P(Z < -0,8) = 0,2119$$

$$c) P(4 < X < 8) = P\left(\frac{4-6}{5} < Z < \frac{8-6}{5}\right) = P(-0,4 < Z < 0,4) = 0,3108$$

$$d) P(X > 30) = P\left(Z > \frac{30-6}{5}\right) = P(Z > 4,8) \approx 0$$

$$e) P(15 < X < 30) = P\left(\frac{15-6}{5} < Z < \frac{30-6}{5}\right) = P(1,8 < Z < 4,8) = 0,0359$$

$$1000 \cdot 0,0359 = 35,9$$

De cada 1 000 viajes se espera devolver la mitad del precio de los billetes en 36 viajes.

Esta actividad puede utilizarse para trabajar el ODS 9, industria, innovación e infraestructura.

107

El sueldo de los trabajadores de una empresa sigue una distribución normal de media 1500 €. El sueldo de un técnico de categoría 3 es de 960 €, y el 75% de los trabajadores de la empresa cobra más que él.

- a) Calcula la probabilidad de que el sueldo de un empleado escogido al azar sea superior a 1600 €.

- b) El sueldo más elevado es el de los directivos. Si estos representan el 5% de los empleados de la empresa, ¿cuál es su sueldo mínimo?

$$P(X > 960) = 0,75 \rightarrow P\left(\frac{X - 1500}{\sigma} > \frac{960 - 1500}{\sigma}\right) = P\left(Z > -\frac{540}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{540}{\sigma}\right) = 0,75 \rightarrow \frac{540}{\sigma} = 0,68 \rightarrow \sigma = 794,12$$

$$a) P(X > 1600) = P\left(\frac{X - 1500}{794,12} > \frac{1600 - 1500}{794,12}\right) = P(Z > 0,13) = 1 - P(Z \leq 0,13) = 1 - 0,5517 = 0,4483$$

$$b) P(X \geq a) = 0,05 \rightarrow P\left(\frac{X - 1500}{794,12} \geq \frac{a - 1500}{794,12}\right) = P\left(Z \geq \frac{a - 1500}{794,12}\right) = 0,05 \rightarrow P\left(Z < \frac{a - 1500}{794,12}\right) = 0,95 \rightarrow \frac{a - 1500}{794,12} = 1,65 \rightarrow a = 2810,29$$

El sueldo mínimo de los directivos es de 2 810,29 €.

108

En una granja de gallinas se clasifican los huevos por su peso, en gramos, según las categorías incluidas en la tabla.



Categoría	S	M	L	XL
Peso	< 53	[53, 63]	[63, 73]	≥ 73

El peso de los huevos de las gallinas de esa granja sigue una distribución $N(62, 8)$. Calcula los porcentajes de huevos que se obtienen de cada categoría.

¿Qué tipo de huevos son los que más se producen?

$$P(X < 53) = P\left(\frac{X - 62}{8} < \frac{53 - 62}{8}\right) = P(Z < -1,125) = 1 - P(Z \leq 1,125) = 1 - 0,9697 = 0,1303$$

$$\begin{aligned}
 P(53 \leq X < 63) &= \\
 &= P\left(\frac{53-62}{8} < \frac{X-62}{8} < \frac{63-62}{8}\right) = \\
 &= P(-1,125 \leq Z < 0,125) = \\
 &= P(Z < 0,125) - (1 - P(Z \leq 1,125)) = \\
 &= 0,5497 - 1 + 0,8697 = 0,4194 \\
 P(63 \leq X < 73) &= \\
 &= P\left(\frac{63-62}{8} \leq \frac{X-62}{8} < \frac{73-62}{8}\right) = \\
 &= P(0,125 \leq Z < 1,375) = \\
 &= P(Z < 1,375) - P(Z \leq 0,125) = \\
 &= 0,9154 - 0,5497 = 0,3657 \\
 P(X \geq 73) &= \\
 &= P\left(\frac{X-62}{8} \geq \frac{73-62}{8}\right) = \\
 &= P(Z \geq 1,375) = 1 - P(Z < 1,375) = \\
 &= 1 - 0,9154 = 0,0846
 \end{aligned}$$

Hay un 13,03% de huevos de tamaño S; un 41,94% de tamaño M; un 36,57% de tamaño L; y un 8,46% de tamaño XL. Se producen más los huevos de tamaño M.

FAKE NEWS

¿Serán suficientes?

El hospital provincial hoy ha inaugurado su zona materno-infantil, que cuenta con 8 incubadoras de última generación.

El peso normal de los recién nacidos está entre 2,5 kg y 4 kg, que agrupa un 80% de los bebés. Fuera de esos límites los bebés suelen requerir cuidados especiales, sobre todo los de bajo peso que estarán en incubadoras hasta que alcancen su peso normal.



N.º de nacimientos: 2007
Tiempo medio de estancia en incubadora: 40 días

La dirección del hospital asegura que esas 8 incubadoras son más que suficientes para las necesidades de los nacidos en la provincia.

Y tú, ¿qué opinas?

Suponemos que siguen una distribución normal y que:

$$P(2,5 < X < 4) = 0,8 \text{ y } P(X < 2,5) = 0,1$$

$$2007 \cdot 0,1 = 200,7$$

Necesitarán incubadora, aproximadamente, 201 bebés.

No parecen suficientes, teniendo en cuenta, además, que los nacimientos se producen con mayor frecuencia durante ciertos meses del año.

PROBLEMAS APARENTEMENTE DISTINTOS

- 109** Sea X una variable aleatoria que sigue una distribución binomial $B(10; 0,9)$, calcula las siguientes probabilidades:
- $P(X = 10)$
 - $P(X > 1)$
 - $P(X = 10) = \binom{10}{10} \cdot 0,9^{10} \cdot 0,1^0 = 0,3487$
 - $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) =$
 $= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) \approx$
 ≈ 1
- 110** Un artesano fabrica sus artículos con mucha precisión, de hecho el 90% de ellos no tienen ningún fallo. Si escogemos 10 artículos al azar, calcula las probabilidades de los siguientes sucesos.
- No hay ningún artículo defectuoso.
 - Hay más de un artículo no defectuoso.
 - $P(X = 10) = \binom{10}{10} \cdot 0,9^{10} \cdot 0,1^0 = 0,3487$
 - $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) =$
 $= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) \approx$
 ≈ 1
- 111** Se considera la distribución normal de media 108 y desviación típica 12. Calcula las siguientes probabilidades.
- $P(X > 125)$
 - $P(90 \leq X \leq 120)$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(X > 125) &= P\left(Z > \frac{125 - 108}{12}\right) = \\ &= P(Z > 1,42) = 0,0778 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(90 \leq X \leq 120) &= \\ &= P\left(\frac{90 - 108}{12} \leq Z \leq \frac{120 - 108}{12}\right) = \\ &= P(-1,5 \leq Z \leq 1) = 0,7745 \end{aligned}$$

- 112** El nivel de azúcar en sangre en ayunas en una persona adulta sana sigue una distribución normal $N(108, 12)$. Calcula la probabilidad de que, al elegir al azar una persona adulta sana, esta tenga, en ayunas, un nivel de azúcar en sangre:

a) Superior a 125 unidades.

b) Entre 90 y 120 unidades.

$$\begin{aligned} \text{a) } P(X > 125) &= P\left(Z > \frac{125 - 108}{12}\right) = \\ &= P(Z > 1,42) = 0,0778 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(90 \leq X \leq 120) &= \\ &= P\left(\frac{90 - 108}{12} \leq Z \leq \frac{120 - 108}{12}\right) = \\ &= P(-1,5 \leq Z \leq 1) = 0,7745 \end{aligned}$$

- 113** Dada la variable aleatoria X , que sigue una distribución binomial $B(40; 0,85)$, calcula $P(16 < X < 30)$, utilizando las tablas de probabilidad.

Hacemos una aproximación a la normal.

$$\mu = 40 \cdot 0,85 = 34$$

$$\sigma = \sqrt{40 \cdot 0,85 \cdot 0,15} = 2,26$$

$$P(16 < X < 30) =$$

$$= P\left(\frac{16,5 - 34}{2,26} < Z < \frac{29,5 - 34}{2,26}\right) =$$

$$= P(-7,74 < Z < -1,99) = 0,0233$$

- 114** El 85% de los enfermos tratados con cierto medicamento mejoran significativamente. Elegidos 40 enfermos tratados con el medicamento, calcula la probabilidad de que mejore más del 40%, pero menos de las tres cuartas partes.



$$40\% \text{ de } 40 = 16$$

$$75\% \text{ de } 40 = 30$$

Hacemos una aproximación a la normal.

$$\mu = 40 \cdot 0,85 = 34$$

$$\sigma = \sqrt{40 \cdot 0,85 \cdot 0,15} = 2,26$$

$$P(16 < X < 30) =$$

$$= P\left(\frac{16,5 - 34}{2,26} < Z < \frac{29,5 - 34}{2,26}\right) =$$

$$= P(-7,74 < Z < -1,99) =$$

$$= 0,0233$$

¿PARA QUÉ SIRVE...?

- 1** ¿En qué consiste el control de calidad?

Un proceso de calidad consiste en extraer de forma aleatoria una muestra de bolas de cada partida de bolas fabricadas, comprobar si estas cumplen los estándares y extrapolar los resultados obtenidos a toda la partida. Si la muestra ofrece por término medio unos datos incorrectos, se retira toda la partida y se vuelve a calibrar la máquina de fabricación.

- 2** ¿Qué distribución estadística aparece en el texto?

Una distribución normal, $N(42,5; 0,1)$.

- 3** ¿Cuál es la varianza de la distribución que aparece en el texto?

$$\sigma = 0,1 \rightarrow \sigma^2 = 0,01$$

- 4** Si se considera que una bola es defectuosa cuando mide menos de 42,3 mm o más de 42,7 mm de diámetro, describe la variable estadística que cuenta el número de bolas defectuosas de una muestra de n bolas.

$X =$ «N.º de bolas defectuosas en una muestra de n bolas»

$X \equiv B(n, p)$, donde

$$p = P(X < 42,3) + P(X > 42,7)$$

- 5** Calcula cuál es la probabilidad de que, cuando se elige una bola al azar, esta resulte ser defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que no lo sea?

$$\begin{aligned}
 P(\text{«Defectuosa»}) &= \\
 &= P(X < 42,3) + P(X > 42,7) = \\
 &= P\left(Z < \frac{42,3 - 42,5}{0,1}\right) + \\
 &\quad + P\left(Z > \frac{42,7 - 42,5}{0,1}\right) = \\
 &= P(Z < -2) + P(Z > 2) = 0,0456 \\
 P(\text{«No defectuosa»}) &= P(42,3 < X < 42,7) = \\
 &= 0,9544
 \end{aligned}$$

- 6 ¿Cuántas bolas defectuosas se espera encontrar en una muestra de 1 000 bolas cuando la máquina que las fabrica está bien reglada?

$$1000 \cdot 0,0456 = 45,6$$

Se espera encontrar unas 46 bolas defectuosas.

- 7 ¿Qué probabilidad hay de que una bola tenga un diámetro que esté comprendido entre 42,4 y 42,6 mm?

$$\begin{aligned}
 P(42,4 < X < 42,6) &= \\
 &= P\left(\frac{42,4 - 42,5}{0,1} < Z < \frac{42,6 - 42,5}{0,1}\right) = \\
 &= P(-1 < Z < 1) = 0,6826
 \end{aligned}$$

- 8 Si el máximo número de bolas defectuosas en una muestra fuera del 1%, ¿cuáles serían las medidas mínima y máxima para ser consideradas correctas?

$$\begin{aligned}
 P(k_1 < X < k_2) &= 0,99 \rightarrow \\
 \rightarrow P\left(\frac{k_1 - 42,5}{0,1} < Z < \frac{k_2 - 42,5}{0,1}\right) &= 0,99 \rightarrow \\
 \rightarrow P\left(Z < \frac{k_2 - 42,5}{0,1}\right) &= 0,995 \rightarrow \\
 \rightarrow \frac{k_2 - 42,5}{0,1} &= 2,575 \rightarrow \\
 \rightarrow k_2 &= 42,7575 \rightarrow k_1 = 42,2425
 \end{aligned}$$

Las medidas mínima y máxima serían, respectivamente, 42,2425 y 42,7575 mm de diámetro.