

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I

SOLUCIONARIO

Este material es una obra colectiva concebida, diseñada y creada en el Departamento de Ediciones de Santillana, bajo la dirección de **Teresa Grence**.

En su elaboración han participado::

Sonia Alejo Sánchez

María Arribas Fernández

José María Fernández Díaz

Coral Victoria de la Iglesia Meleiro

Clara Inés Lavado Campos

Silvia Marín García

Natalia Polo Rodríguez

Lorena Ramos San Millán

Rocío Rubio Álvarez

María de las Mercedes Sánchez Martín

EDICIÓN

Sonia Alejo Sánchez

Clara Inés Lavado Campos

Silvia Marín García

Aída Moya Librero

EDICIÓN EJECUTIVA

Carlos Pérez Saavedra

DIRECCIÓN DEL PROYECTO

Domingo Sánchez Figueroa



DESAFÍO

El azar previsible

Dos sospechosos de un robo están siendo interrogados. Tras incomunicarlos, les ofrecen a ambos el mismo trato:

- Si ambos declaran que su compañero es inocente, la pena será de 2 años.
- Si ambos culpan al otro del delito, serán condenados a 6 años de cárcel.
- Si uno declara culpable al otro y el otro le declara inocente, el culpable irá 10 años a la cárcel y el otro podrá salir inmediatamente.

¿Qué harías tú?

Realizamos una tabla de doble entrada para analizar bien los datos.

$S_1 \backslash S_2$	Declara culpable	Declara inocente
Declara culpable	(6, 6)	(0, 10)
Declara inocente	(10, 0)	(2, 2)

La mejor estrategia es declarar al compañero culpable, pues si la otra persona me declara también culpable, voy a la cárcel 6 años, pero si me declara inocente, me libero de la cárcel. Sin embargo, si yo lo declaro inocente, pueden caerme hasta 10 años de cárcel, dependiendo de lo que diga el otro.

PIENSA

PÁG. 249. ¿Cómo tienen que ser dos sucesos A y B para que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$?

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \rightarrow \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B} \rightarrow \rightarrow A \cap B = A \cup B$$

Esto solo puede ocurrir si $A = B$.

PÁG. 250. Se lanza un dado hasta que aparece un 6. ¿Cuánto se espera que sumen las tiradas antes de que aparezca el 6?

Describimos la situación:

Sale 6 en la 1.ª tirada: 0

Sale 6 en la 2.ª tirada: $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Sale 6 en la 3.ª tirada:

$$E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

Sale 6 en la 4.ª tirada:

$$E = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

Sale 6 en la 5.ª tirada:

$$E = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

Sale 6 en la n -ésima tirada:

$$E = \{n-1, n, n+1, \dots, 5(n-1)\}$$

PÁG. 251. Si A y B son dos sucesos incompatibles, ¿qué relación deben cumplir $P(A)$ y $P(B)$ para que $P(A \cup B) = 3P(A)$?

La probabilidad de uno de los sucesos debe ser el doble de la probabilidad del otro suceso, es decir, $P(A) = 2P(B)$, o $P(B) = 2P(A)$.

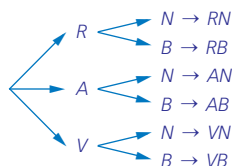
Al ser incompatibles:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \rightarrow P(A) + 2P(A) = 3P(A)$$

ACTIVIDADES

- 1** Pablo escoge al azar entre sus camisetas (roja, azul o verde) y pantalones (negro o blanco). Escribe las diferentes posibilidades que tiene de vestirse.

$R = \text{«roja»}$ $A = \text{«azul»}$ $V = \text{«verde»}$
 $N = \text{«negro»}$ $B = \text{«blanco»}$

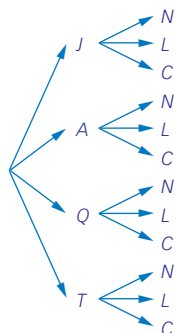


$$E = \{RN, RB, AN, AB, VN, VB\}$$

Tiene 6 maneras distintas de vestirse.

- 2** Para merendar unos amigos eligen al azar un bocadillo, de jamón, atún, queso o tortilla, y un refresco de naranja, limón y cola. Escribe el espacio muestral.

$J = \text{«jamón»}$ $L = \text{«limón»}$
 $N = \text{«naranja»}$ $Q = \text{«queso»}$
 $A = \text{«atún»}$ $C = \text{«cola»}$
 $T = \text{«tortilla»}$



$$E = \{JN, JL, JC, AN, AL, AC, QN, QL, QC, TN, TL, TC\}$$

- 3 ¿Cuántos números de cinco cifras se pueden escribir con los dígitos del 1 al 9 sin que se repita ninguna cifra?

$$V_{9,5} = \frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9!}{4!} = 15\,120$$

Se pueden escribir 15 120 números.

- 4 ¿Cuántos helados de tres sabores diferentes se pueden servir en una heladería que dispone de 12 sabores?

$$C_{12,3} = \frac{12!}{3! \cdot (12-3)!} = \frac{12!}{3! \cdot 9!} = 220$$

Se pueden servir 220 helados de tres sabores diferentes.

- 5 En un frutero hay naranjas, manzanas, plátanos y ciruelas. Se escoge una pieza al azar y se anota qué fruta es.

a) Escribe el espacio muestral asociado, un suceso seguro y otro imposible.

b) Encuentra y describe dos sucesos compuestos.

a) $E = \{N, M, P, C\}$, siendo:

N = «Coger una naranja»

M = «Coger una manzana»

P = «Coger un plátano»

C = «Coger una ciruela»

Repuesta abierta. Por ejemplo:

Un suceso seguro es:

A = «Coger una naranja o una manzana o un plátano o una ciruela»

Un suceso imposible es:

B = «Coger una pera»

b) C = «Coger una manzana o una naranja» = $\{M, N\}$

D = «Coger una fruta con hueso o pepitas» = $\{M, N, C\}$

- 6 Se gira una ruleta dividida en 12 sectores numerados del 1 al 12 y se anota el número en el que se ha parado. Expresa como unión o intersección estos sucesos.

a) A = «Obtener número múltiplo de 3 o de 7»

b) B = «Obtener número múltiplo de 2 y de 3»

c) C = «Obtener número divisor de 6 y de 8»

a) $A = \{3, 6, 9, 12\} \cup \{7\} = \{3, 6, 7, 9, 12\}$

b) $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \cap \{3, 6, 9, 12\} = \{6, 12\}$

c) $C = \{1, 2, 3, 6\} \cap \{1, 2, 4, 8\} = \{1, 2\}$

- 7 Se extrae una carta de la baraja española. Razona si los sucesos A , B , C y D son compatibles o incompatibles.

A = «Sacar un as»

B = «Sacar un basto»

C = «Sacar un caballo»

D = «Sacar una figura»

A y B son compatibles, ya que puedes sacar el as de bastos.

A y C son incompatibles, ya que una carta no puede ser un as y un caballo a la vez.

A y D son incompatibles, ya que una carta no puede ser un as y una figura a la vez.

B y C son compatibles, ya que puedes sacar el caballo de bastos.

B y D son compatibles, ya que puedes sacar la sota, el caballo o el rey de bastos.

C y D son compatibles, ya que los caballos son figuras, por lo que al sacar un caballo estás sacando una figura.

- 8 Para el postre podemos escoger manzanas rojas o verdes, ciruelas rojas, peras verdes o amarillas, o plátanos. Sean los sucesos A = «Escoger fruta roja», B = «Escoger manzana» y C = «Escoger plátano o pera».

a) Halla

$$\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, A - B, B - C, A \cap \bar{B} \text{ y } A \cap \bar{C}.$$

- b) Comprueba que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
y que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

M_r = «Escoger una manzana roja»

M_v = «Escoger una manzana verde»

C_r = «Escoger una ciruela roja»

P_v = «Escoger una pera verde»

P_a = «Escoger una pera amarilla»

P = «Escoger un plátano»

a) A = «Escoger fruta roja» = $\{M_r, C_r\}$

B = «Escoger manzana» = $\{M_r, M_v\}$

C = «Escoger plátano o pera» = $\{P_v, P_a, P\}$

$\overline{A}$ = «No escoger fruta roja» =
= $\{M_v, P_v, P_a, P\}$

$\overline{B}$ = «No escoger manzana» =
= $\{C_r, P_v, P_a, P\}$

$\overline{C}$ = «No escoger plátano o pera» =
= $\{M_r, M_v, C_r\}$

$A - B = \{C_r\}$

$B - C = \{M_r, M_v\}$

$A \cap \overline{B} = \{C_r\}$

$A \cap \overline{C} = \{M_r, C_r\}$

b) $\overline{A \cup B} = \overline{\{M_r, M_v, C_r\}} = \{P_v, P_a, P\}$

$\overline{A \cap B} = \{P_v, P_a, P\}$

$\overline{A \cap B} = \overline{\{M_r\}} = \{M_v, C_r, P_v, P_a, P\}$

$\overline{A \cup B} = \{M_v, C_r, P_v, P_a, P\}$

- 9 Cuatro amigos lanzan 100 veces cada uno una moneda y anotan los resultados. Razona si la moneda está o no trucada y calcula la frecuencia relativa y la probabilidad del suceso «Salir cara».

	Amigo 1	Amigo 2	Amigo 3	Amigo 4
Cara	70	68	69	72
Cruz	30	32	31	28

La moneda está trucada ya que si no lo estuviese, el número de caras y el número de cruces deberían ser más o menos el mismo.

La frecuencia relativa del número de caras en cada caso es:

$$f(\text{«Amigo 1»}) = \frac{70}{100} = 0,7$$

$$f(\text{«Amigo 2»}) = \frac{68}{100} = 0,68$$

$$f(\text{«Amigo 3»}) = \frac{69}{100} = 0,69$$

$$f(\text{«Amigo 4»}) = \frac{72}{100} = 0,72$$

Como podemos observar, la probabilidad de obtener cara se aproxima a 0,7.

- 10 A partir de los datos de la tabla calcula la probabilidad de que salga 2 al lanzar un dado.

N.º de lanzamientos	«Salir 2»
100	20
500	80
1000	168
10000	1660

N.º de lanzamientos	«Salir 2»	Frecuencia relativa
100	20	0,2
500	80	0,16
1000	168	0,168
10000	1660	0,166

La probabilidad es más o menos 0,166.

- 11 De los sucesos A y B de un experimento aleatorio se sabe que

$$P(A) = \frac{2}{5}, P(B) = \frac{1}{3} \text{ y } P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{3}.$$

Calcula:

$$\text{a) } P(A \cup B) \quad \text{b) } P(A \cap B) \quad \text{c) } P(\overline{A} \cup \overline{B})$$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= P(\overline{A \cup B}) \rightarrow P(A \cup B) = \\ &= 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = 0,6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \rightarrow \\ \rightarrow P(A \cap B) &= \frac{2}{5} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{15} = 0,0\hat{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } P(\overline{A} \cup \overline{B}) &= P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = \\ &= 1 - \frac{1}{15} = \frac{14}{15} = 0,9\hat{3} \end{aligned}$$

- 12 De los sucesos A y B de un experimento aleatorio se sabe que $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,3$ y $P(A \cap B) = 0,1$. Calcula:

a) $P(A \cup B)$ b) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$ c) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,4 + 0,3 - 0,1 = 0,6$

b) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,1 = 0,9$

c) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,6 = 0,4$

- 13 Se extrae una carta de la baraja española. Calcula la probabilidad de que sea:

- a) Una espada. d) Una figura de bastos.
b) Una figura. e) Un as deoros o copas.
c) Un as. f) El rey de espadas.

a) $P(\text{«Sacar una espada»}) = \frac{10}{40} = 0,25$

b) $P(\text{«Sacar una figura»}) = \frac{12}{40} = 0,3$

c) $P(\text{«Sacar un as»}) = \frac{4}{40} = 0,1$

d) $P(\text{«Sacar una figura de bastos»}) = \frac{3}{40} = 0,075$

e) $P(\text{«Sacar un as deoros o copas»}) = \frac{2}{40} = 0,05$

f) $P(\text{«Sacar el rey de espadas»}) = \frac{1}{40} = 0,025$

- 14 De una urna con ocho bolas numeradas del 1 al 8 se extraen consecutivamente dos y se anota el número de dos cifras que se forma con sus dígitos.

Calcula la probabilidad de que el número anotado sea múltiplo de 5.

Primero veamos cuántos casos posibles hay:

$$V_{8,2} = \frac{8!}{(8-2)!} = \frac{8!}{6!} = 56$$

De esos 56 casos posibles solo nos interesan los que acaben en 5, por lo que hay 7 casos favorables:

{15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85}

El 55 no se puede dar, ya que las bolas se extraen consecutivamente una tras otra y si en la primera posición ya sale el 5, en la segunda no puede salir.

$$P(\text{«Sacar un múltiplo de 5»}) = \frac{7}{56} = 0,125$$

- 15 Encuestadas 30 personas sobre sus preferencias a la hora de elegir el lugar para pasar las vacaciones, se tienen estos resultados: 17 prefieren la playa, 8 la montaña y 5 reparten sus vacaciones entre los dos lugares. Elegida una persona al azar entre esas 30, calcula la probabilidad de que:

a) Pase sus vacaciones en la playa, sabiendo que también las disfruta en la montaña.

b) Pase sus vacaciones en la playa, sabiendo que no las reparte con la montaña.

a) $P(\text{«Playa/Montaña»}) = \frac{5}{8} = 0,625$

b) $P(\text{«Playa/No montaña»}) = \frac{17-5}{30-8} = 0,54$

- 16 Se escoge al azar una bola coloreada y numerada de la caja cuya composición se muestra en la tabla. Calcula las probabilidades que se piden.

	Rojo	Azul	Blanco
Numerada con 1	2	4	1
Numerada con 2	3	2	3

a) $P(1/\text{«Rojo»})$

b) $P(2/\text{«Azul»})$

c) $P(2/\text{«Blanco»})$

a) $P(1/\text{«Rojo»}) = \frac{2}{5} = 0,4$

b) $P(2/\text{«Azul»}) = \frac{2}{6} = 0,33$

c) $P(2/\text{«Blanco»}) = \frac{3}{4} = 0,75$

- 17 En una encuesta se pregunta si se vive o no en la misma localidad en la que se trabaja.

	Hombres	Mujeres	Total
Vive donde trabaja	10	20	30
No vive donde trabaja	15	10	25
Total	25	30	55

Preguntando a una de las personas encuestadas escogida al azar, calcula la probabilidad de que:

- Viva donde trabaja.
- Sabiendo que es mujer, no viva donde trabaja.
- Viva donde trabaja, sabiendo que es hombre.

V = «Vivir donde trabaja»

M = «Ser mujer»

H = «Ser hombre»

$$a) P(V) = \frac{30}{55} = 0,54$$

$$b) P(\bar{V}/M) = \frac{10}{30} = 0,3$$

$$c) P(V/H) = \frac{10}{25} = 0,4$$

- 18 Copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla en la que se muestra el número de chicos y chicas que practican un deporte habitualmente y los que no lo hacen.

	Chico	Chica	Total
Practica deporte	10		
No practica deporte		6	
Total		14	30

Elegida una persona al azar en este grupo, calcula la probabilidad de que sea chica y no practique un deporte de forma habitual.

	Chico	Chica	Total
Practica deporte	10	8	18
No practica deporte	6	6	12
Total	16	14	30

$$P(\text{Ser chica y no practicar deporte}) = \frac{6}{30} = 0,2$$

- 19 En un grupo de 15 hombres y 18 mujeres, 6 hombres y 4 mujeres hablan dos idiomas extranjeros. Si se elige una persona al azar

del grupo, calcula la probabilidad de que sea mujer y no hable dos idiomas extranjeros.

S = «Saber dos idiomas»

M = «Ser mujer»

H = «Ser hombre»

$18 - 4 = 14$ no hablan dos idiomas extranjeros.

$$P(M) = \frac{18}{33} = 0,54$$

$$P(\bar{S}/M) = \frac{14}{18} = 0,7$$

$$P(\bar{S} \cap M) = \frac{18}{33} \cdot \frac{14}{18} = 0,42$$

- 20 En un grupo de Bachillerato formado por 20 chicos y 12 chicas, 9 chicos y 7 chicas van a clase en transporte público. Calcula la probabilidad de que un alumno cualquiera sea chico y use el transporte público.

T = «Usar transporte público»

H = «Ser chico»

$$P(H) = \frac{20}{32} = 0,625$$

$$P(T/H) = \frac{9}{20} = 0,45$$

$$P(T \cap H) = \frac{20}{32} \cdot \frac{9}{20} = 0,281$$

PRACTICA

- 21 Calcula el número de posibilidades.

- Al mezclar 2 colores diferentes teniendo 5 botes de pintura de distintos colores.
- Al escribir los números de tres cifras iguales o distintas con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5.

$$a) C_{5,2} = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$$

$$b) VR_{5,3} = 5^3 = 125$$

- 22 Halla el número total de sucesos del experimento aleatorio que consiste en escoger una bola de una bolsa en la que hay cinco bolas de colores diferentes y anotar su color.

$$0 \rightarrow 1$$

$$1 \rightarrow C_{5,1} = \binom{5}{1} = 5$$

$$2 \rightarrow C_{5,2} = \binom{5}{2} = 10$$

$$3 \rightarrow C_{5,3} = \binom{5}{3} = 10$$

$$4 \rightarrow C_{5,4} = \binom{5}{4} = 5$$

$$5 \rightarrow 1$$

$$1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 2^5 = 32 \rightarrow$$

$\rightarrow$ Hay 32 sucesos en total.

- 23** Calcula la cantidad total de sucesos del experimento aleatorio que consiste en extraer una bola de una bolsa que contiene bolas de tres colores diferentes y anotar su color.

$$0 \rightarrow 1$$

$$1 \rightarrow C_{3,1} = \binom{3}{1} = 3$$

$$2 \rightarrow C_{3,2} = \binom{3}{2} = 3$$

$$3 \rightarrow 1$$

$$1 + 3 + 3 + 1 = 2^3 = 8 \rightarrow$$

$\rightarrow$ Hay 8 sucesos en total.

- 24** Halla el espacio muestral del experimento que consiste en lanzar un dado y sacar una bola de una bolsa que tiene bolas rojas y negras.

	1	2	3	4	5	6
R	R1	R2	R3	R4	R5	R6
N	N1	N2	N3	N4	N5	N6

$$E = \{R1, R2, R3, R4, R5, R6, N1, N2, N3, N4, N5, N6\}$$

- 25** Extraes al azar un lápiz de color de un estuche que tiene dos azules, uno verde y uno rojo, y escribes tu nombre en un trozo de papel sacado sin mirar de una bolsa de tela que contiene papel normal y reciclado. Determina el espacio muestral de este experimento.

Sean estos los sucesos del experimento:

A = «Sacar uno de los lápices azules»

V = «Sacar el lápiz verde»

R = «Sacar el lápiz rojo»

No = «Utilizar papel normal»

Re = «Utilizar papel reciclado»

El espacio muestral es:

$$E = \{ANo, ARe, VNo, VRe, RNo, RRe\}$$

- 26** En una urna no transparente hay tarjetas de diferentes colores, entre ellas, de color blanco. Con los datos de la tabla, di qué probabilidad asignarías al suceso «Extraer una tarjeta de color blanco».

Tarjetas extraídas	10	50	75	100	300	500
Tarjetas blancas	2	9	15	21	62	95

Calculamos la sucesión de frecuencias relativas:

$$0,2; 0,18; 0,2; 0,21; 0,208; 0,19$$

Las frecuencias relativas tienden a 0,2.

Por tanto, $P(A) = 0,2$.

- 27** La probabilidad de que tenga lugar el contrario de un suceso A es $\frac{1}{3}$, la probabilidad de un suceso B es $\frac{3}{4}$ y la probabilidad de que ocurran a la vez los sucesos A y B es $\frac{5}{8}$. Determina la probabilidad de que no se verifique A y no se verifique B .

$$P(\bar{A}) = \frac{1}{3} \quad P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{2}{3}$$

$$P(B) = \frac{3}{4} \quad P(A \cap B) = \frac{5}{8}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \rightarrow$$

$$\rightarrow P(A \cup B) = \frac{19}{24}$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = \frac{5}{24}$$

- 28** En un centro escolar el 40% de los estudiantes pertenece al grupo de teatro, el 70% escribe en el periódico escolar y el 30% realiza ambas actividades. Escogido

un estudiante al azar, halla la probabilidad de que:

- a) No realice ninguna de las dos actividades.
b) Si escribe en el periódico escolar, no haga teatro.

A = «Pertenece al grupo de teatro»

B = «Escribe en el periódico»

$$P(A) = 0,4 \quad P(B) = 0,7 \quad P(A \cap B) = 0,3$$

	B	$\bar{B}$	Total
A	30	10	40
$\bar{A}$	40	20	60
Total	70	30	100

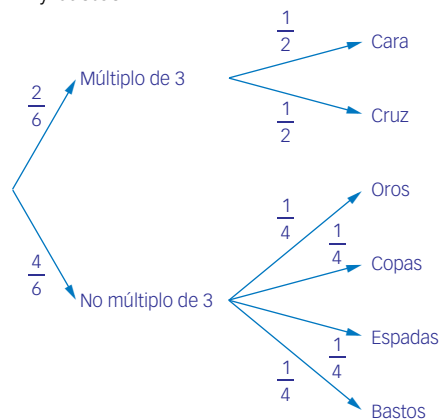
a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \rightarrow P(A \cup B) = 0,8$
 $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0,2$

- b) Como el 70% escribe en el periódico y el 30% además pertenece al grupo de teatro, el 40% escribe en el periódico, pero no pertenece al grupo de teatro.

$$P(B \cap \bar{A}) = \frac{40}{100} = 0,4$$

- 29 Se lanza un dado. Si sale múltiplo de tres se lanza una moneda, en caso contrario se extrae una carta de la baraja española y se anota el palo al que pertenece. Calcula la probabilidad:

- a) De obtener un múltiplo de tres y cruz.
b) De obtener un no múltiplo de tres y bastos.



a) $P(\text{«Múltiplo de 3 y cruz»}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} = 0,1\bar{6}$

b) $P(\text{«No múltiplo de 3 y basto»}) = \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6} = 0,1\bar{6}$

- 30 Se extraen tres bolas de una bolsa que contiene 4 bolas rojas, 7 azules y 9 blancas, con reemplazamiento de la primera y la segunda bolas. Calcula la probabilidad de obtener la serie azul-roja-blanca.

Como son sucesos independientes, podemos aplicar la regla del producto.

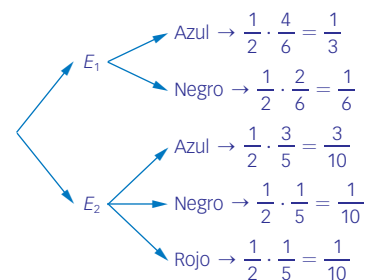
A = «Sacar una bola azul en la primera extracción»

B = «Sacar una bola roja en la segunda extracción»

C = «Sacar una bola blanca en la tercera extracción»

$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap C) &= P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \\ &= \frac{7}{20} \cdot \frac{4}{20} \cdot \frac{9}{20} = \\ &= \frac{63}{2000} = 0,0315 \end{aligned}$$

- 31 El estuche E_1 contiene 4 bolígrafos azules y 2 negros. El estuche E_2 contiene 3 bolígrafos azules, 1 negro y 1 rojo. Se lanza una moneda al aire. Si sale cara se saca un bolígrafo del estuche E_1 , y si sale cruz, del estuche E_2 . Halla la probabilidad de que salga un bolígrafo negro.



$$\begin{aligned} P(N) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{10} = \frac{4}{15} = \\ &= 0,2\bar{6} \rightarrow \text{Hay un } 26,27\% \text{ de probabilidad de que salga un bolígrafo negro.} \end{aligned}$$

- 32 El estuche E_1 contiene 4 bolígrafos azules y 2 negros. El estuche E_2 contiene 3 bolígrafos azules, 1 negro y 1 rojo. Se lanza una moneda al aire. Si sale cara se saca un bolígrafo del estuche E_1 , y si sale cruz, del estuche E_2 . Sabiendo que el bolígrafo escogido es negro, halla la probabilidad de que sea del estuche E_2 .

$$P(N) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{10} = \frac{4}{15} = 0,2\bar{6}$$

$$P(E_2/\text{Negro}) = \frac{P(E_2 \cap \text{Negro})}{P(\text{Negro})} = \frac{P(E_2) \cdot P(\text{Negro}/E_2)}{P(\text{Negro})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{4}{15}} =$$

$$= \frac{15}{2 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{3}{8} = 0,375$$

La probabilidad de que sea del estuche E_2 es de 37,5%.

ACTIVIDADES FINALES

1. Identifica experimentos aleatorios y sucesos y aplica los métodos de conteo



ACTIVIDADES FLASH

- 33 Para cada uno de los experimentos que se detallan, indica si son aleatorios o no.
- Medir la longitud de una carretera.
 - Lanzar un dado y anotar la suma de los puntos de las caras visibles.
 - Calcular el precio final de una compra.
 - Pesar una botella de agua de 2 litros.
 - Sacar una bola de una bolsa que contiene 6 bolas de diferentes colores.
 - Extraer una carta de la baraja española y anotar el palo al que pertenece.

- Determinista
- Aleatorio
- Determinista
- Determinista
- Aleatorio
- Aleatorio

- 34 Describe el espacio muestral para los experimentos aleatorios de la actividad anterior.

- $E = \{15, 16, 17, 18, 19, 20\}$
- Respuesta abierta. Por ejemplo:
 $E = \{\text{Rojo, azul, verde, negro, gris, blanco}\}$
- $E = \{\text{Bastos, espadas, oros, copas}\}$

- 35 Calcula cuántas posibilidades hay:

- Al elegir 5 niños de un grupo de 12.
- Para colocar 8 libros distintos en un estante.
- Al formar combinaciones de 6 letras con las letras de la palabra CARMEN.
- Al escribir números de 5 cifras con los dígitos 1, 2, 3.
- Al formar combinaciones de 4 letras con las letras de la palabra RAMÓN.
- Al escribir números de 2 cifras con los dígitos del número 235.

$$a) C_{12,5} = \frac{12!}{5!(12-5)!} = \frac{12!}{5! \cdot 7!} = 792$$

$$b) P_8 = 8! = 40\,320$$

$$c) P_6 = 6! = 720$$

$$d) VR_{3,5} = 3^5 = 243$$

$$e) V_{5,4} = \frac{5!}{(5-4)!} = 120$$

$$f) VR_{3,2} = 3^2 = 9$$

- 36 Con 4 botes de pintura: amarilla, verde, roja y marrón, ¿cuántas mezclas de dos colores puedes hacer? ¿Cuáles son?

$$A = \text{«Amarillo»} \quad R = \text{«Rojo»}$$

$$V = \text{«Verde»} \quad M = \text{«Marrón»}$$

$$E = \{AV, AR, AM, VR, VM, RM\}$$

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$

- 37 ¿De cuántas maneras pueden llegar 4 nadadores a la meta?

$$P_4 = 4! = 24$$

- 38 ¿De cuántas formas podemos colocarnos 2 anillos diferentes en una mano, de modo que no estén en el mismo dedo?

$$C_{5,2} = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$$

- 39 Escribe el espacio muestral de los siguientes experimentos compuestos.

- Se lanzan 3 monedas y se anota el número de caras obtenidas.
- Se lanzan 2 dados cúbicos, uno rojo y otro azul, y se anotan los pares de resultados.
- Se lanzan 2 dados cúbicos, uno rojo y otro azul, y se anota la suma de las puntuaciones.
- Se extraen 2 piezas de fruta de un frutero en el que hay manzanas, naranjas y peras.
- Se extraen 2 bolas de una bolsa que contiene bolas blancas, negras, rojas y verdes.
- Se extraen 3 caramelos de una caja que tiene caramelos de fresa, limón y naranja.

a) $E = \{0, 1, 2, 3\}$

b) $E = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 61, 62, 63, 64, 65, 66\}$

Como los dados son de distintos colores, los sucesos 16 y 61 son diferentes.

c) $E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

d) $E = \{MM, MN, MP, NN, NP, PP\}$

e) $E = \{BB, BN, BR, BV, NN, NR, NV, RR, RV, VV\}$

f) $E = \{FFF, FFL, FFN, FNN, FNL, FLL, NNN, NNL, NLL, LLL\}$

40 MATEMÁTICAS Y... TRABAJO.

- En los contratos de trabajo se especifica el número de días de vacaciones.

Lo normal es coger 22 días de entre los 250 días laborales del año. ¿De cuántas formas pueden distribuir las vacaciones a lo largo del año?

$$C_{250,22} = \frac{250!}{22!(250-22)!} = \frac{250!}{22! \cdot 228!} \approx 19,525 \cdot 10^{30}$$

Si no hay restricciones, las vacaciones pueden cogerse de $19,525 \cdot 10^{30}$ formas distintas.

- 41 Se lanza un dado con 12 caras numeradas del 1 al 12 y se consideran los sucesos:

$A = \text{«Salir número par»}$

$B = \text{«Salir número múltiplo de 3»}$

$C = \text{«Salir número múltiplo de 5»}$

$D = \text{«Salir número mayor o igual que 6»}$

$F = \text{«Salir número menor que 5»}$

- Describe estos sucesos indicando los sucesos elementales que los componen.
- ¿Cuáles son incompatibles dos a dos?
- Calcula $A - B$, $\overline{A} \cup F$, $\overline{C} \cap A$.
 - $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$
 $B = \{3, 6, 9, 12\}$
 $C = \{5, 10\}$
 $D = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
 $F = \{1, 2, 3, 4\}$
 - $B \cap C = \emptyset \rightarrow$ Son incompatibles.
 $C \cap F = \emptyset \rightarrow$ Son incompatibles.
 $D \cap F = \emptyset \rightarrow$ Son incompatibles.
 - $A - B = A \cap \overline{B} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \cap \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\} = \{2, 4, 8, 10\}$
 $\overline{A} \cup F = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11\}$
 $\overline{C} \cap A = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12\} \cap \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} = \{2, 4, 6, 8, 12\}$

- 42 **INVESTIGA.** Se considera un experimento aleatorio con tres sucesos elementales, A, B, C , de forma que $\overline{A \cup B} = C$. ¿Qué puedes decir de $\overline{A \cup C}$? ¿Y de $\overline{B \cup C}$?

$$\overline{C} = A \cup B \rightarrow C = \overline{A \cup B} = \overline{A \cap B}$$

$$\overline{A \cup C} = \overline{A \cap \overline{C}} = \overline{A \cap (A \cup B)} =$$

$$= \emptyset \cup B = B$$

$$\overline{B \cup C} = \overline{B \cap \overline{C}} = \overline{B \cap (A \cup B)} =$$

$$= \overline{B \cap (B \cup A)} = \overline{(B \cap B) \cup A} =$$

$$= \emptyset \cup A = A$$

- 43 Se extrae una bola de una bolsa con bolas de color rojo, azul, blanco, negro y verde. Sean los sucesos:

A : «Sacar una bola de color azul o negro»

B : «Sacar una bola de color blanco o negro»

- a) Describe los sucesos:

$$A \text{ y } \overline{A} \quad B \text{ y } \overline{B} \quad A \cup B \text{ y } \overline{A \cup B}$$

$$A \cap B \text{ y } \overline{A \cap B}$$

- b) Comprueba las siguientes igualdades:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

R = «Sacar una bola roja»

Z = «Sacar una bola azul»

W = «Sacar una bola blanca»

N = «Sacar una bola negra»

V = «Sacar una bola verde»

- a) $A = \{Z, N\}$ $\overline{A} = \{R, W, V\}$
 $B = \{W, N\}$ $\overline{B} = \{R, Z, V\}$
 $A \cup B = \{Z, W, N\}$ $\overline{A \cup B} = \{R, V\}$

$$A \cap B = \{N\}$$

$$\overline{A \cap B} = \{R, Z, W, V\}$$

- b) $\overline{A \cup B} = \{R, V\}$

$$\overline{A \cap B} = \{R, Z, W, V\}$$

La igualdad es cierta.

$$\overline{A \cap B} = \{R, Z, W, V\}$$

$$\overline{A \cup B} = \{R, V\}$$

La igualdad es cierta.

- 44 Se lanza un dado, se anota la suma de las puntuaciones de las caras visibles y se consideran los sucesos:

A = «Salir número par»

B = «Salir número mayor que 16»

C = «Salir número múltiplo de 3»

- a) Describe estos sucesos indicando los sucesos elementales que los componen.

- b) Calcula $(A \cup B) \cap C$.

- c) Comprueba que:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

- a) $A = \{16, 18, 20\}$

$$B = \{17, 18, 19, 20\}$$

$$C = \{15, 18\}$$

- b) $A \cup B = \{16, 18, 20\} \cup \{15, 16\} =$
 $= \{15, 16, 18, 20\}$

$$(A \cup B) \cap C =$$

$$= \{15, 16, 18, 20\} \cap \{15, 18\} = \{15, 18\}$$

- c) $\overline{A \cup B} = \overline{\{16, 17, 18, 19, 20\}} = \{15\}$
 $\overline{A \cap B} = \overline{\{15, 17, 19\} \cap \{15, 16\}} = \{15\}$ } $\rightarrow$
 $\rightarrow$ La propiedad se cumple.

$$\overline{A \cap B} = \overline{\{18, 20\}} = \{15, 16, 17, 19\}$$

$$\overline{A \cup B} = \{15, 17, 19\} \cup \{15, 16\} =$$

$$= \{15, 16, 17, 19\}$$

$\rightarrow$ La propiedad se cumple.

- 45 **INVENTA.** Escribe un experimento y describe el espacio muestral o los sucesos necesarios en cada caso para que se cumplan las condiciones.

- a) $E = \{\text{Rojo, Azul, Verde}\}$

- b) $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}, B = \{1, 3\}$

- c) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$

- d) $A \cap B = \{5\}$

- e) $A = \{\text{Par}\}, \overline{A \cup B} = \emptyset$

- f) $\overline{A \cap B} = \{\text{Amarillo}\}$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

- a) Experimento: sacar un bolígrafo de un estuche con bolígrafos de color rojo, azul y verde, y anotar el color del bolígrafo.

Espacio muestral: está compuesto por los tres colores posibles de los bolígrafos.

- b) Experimento: sacar una bola de una bolsa con bolas numeradas del 1 al 10 y anotar el número de la bola.

Sucesos: $A = \text{«Sacar una bola con número par»}$

$B = \text{«Sacar un número impar y menor que 4»}$

- c) Experimento: sacar una bola de una bolsa con bolas numeradas del 1 al 4 y anotar el número de la bola.

Sucesos: $A = \text{«Sacar una bola con número par»}$

$B = \text{«Sacar una bola con número impar»}$

$A \cup B = \text{«Sacar una bola con número entre 1 y 4»}$

- d) Experimento: sacar una bola de una bolsa con bolas numeradas del 1 al 6 y anotar el número de la bola.

Sucesos: $A = \text{«Sacar una bola con número mayor que 4»}$

$B = \text{«Sacar una bola con número impar»}$

$A \cap B = \text{«Sacar la bola con el número 5»}$

- e) Experimento: lanzar un dado cúbico y anotar el resultado.

Sucesos: $A = \text{«Salir número par»}$

$B = \text{«Salir número impar»}$

- f) Experimento: sacar una ficha del parchís de un cubilete en el que hay una ficha de cada color.

Sucesos: $A = \text{«Sacar una ficha roja o verde o azul»}$

$B = \text{«No sacar una ficha amarilla»}$



- 46 Para realizar una estadística en un centro escolar se ha segmentado a los estudiantes respecto al nivel educativo, Secundaria o Bachillerato, y por sexo, chico o chica.

Se consideran los siguientes sucesos.

$A = \text{«Ser chica»}$

$B = \text{«Estudiar Bachillerato»}$

Describe los siguientes sucesos.

$\bar{A}$ $A \cup B$ $\overline{A \cup B}$

$\bar{B}$ $A \cap B$ $\overline{A \cap B}$

$A \cap \bar{B}$ $A \cup \bar{B}$ $A - B$

$\bar{A} = \text{«Ser chico»}$

$\bar{B} = \text{«Estudiar Secundaria»}$

$A \cap \bar{B} = \text{«Ser chica y estudiar Secundaria»}$

$A \cup B = \text{«Ser chica o estudiar Bachillerato»}$

$A \cap B = \text{«Ser chica y estudiar Bachillerato»}$

$A \cup \bar{B} = \text{«Ser chica o estudiar Secundaria»}$

$\overline{A \cup B} = \text{«Ser chico y estudiar Secundaria»}$

$\overline{A \cap B} = \text{«Ser chico o estudiar Secundaria»}$

$A - B = \text{«Ser chica y estudiar Secundaria»}$

47



Se ha segmentado a la población de cierta provincia respecto al lugar de residencia, zona urbana o zona rural, y por edad, según sean mayores de 18 años o menores de 18 años.

Se consideran los sucesos.

$A = \text{«Ser mayor de 18 años»}$

$B = \text{«Vivir en zona urbana»}$

Describe los siguientes sucesos.

$\bar{A}$ $A \cup B$ $\overline{A \cup B}$

$\bar{B}$ $A \cap B$ $\overline{A \cap B}$

$A \cap \bar{B}$ $A \cup \bar{B}$ $A - B$

$\bar{A} = \text{«Ser menor de 18 años»}$

$\bar{B} = \text{«Vivir en zona rural»}$

$A \cap \bar{B} = \text{«Ser mayor de 18 años y vivir en zona rural»}$

$A \cup B = \text{«Ser mayor de 18 años o vivir en zona urbana»}$

$A \cap B = \text{«Ser mayor de 18 años y vivir en zona urbana»}$

$A \cup \bar{B} = \text{«Ser mayor de 18 años o vivir en zona rural»}$

$\overline{A \cup B} = \text{«Ser menor de 18 años y vivir en zona rural»}$

$\overline{A \cap B} = \text{«Ser menor de 18 años o vivir en zona rural»}$

$A - B = \text{«Ser mayor de 18 años y vivir en zona rural»}$

48



Se extrae una carta de la baraja española. Considera estos sucesos.

$A = \text{«Sacar un as»}$

$B = \text{«Sacar un basto»}$

$C = \text{«Sacar un caballo»}$

$R = \text{«Sacar un rey»}$

$F = \text{«Sacar una figura»}$

Describe los siguientes sucesos indicando los sucesos elementales que los componen.

- a) $A \cap B$ d) $A \cup R \cup F$
 b) $\bar{B} \cap C$ e) $\bar{C} \cap F$
 c) $B \cap F$ f) $(C \cup R) \cap \bar{F}$
- a) $A \cap B = \text{«Sacar un as y sacar un basto»}$
 $A \cap B = \{1B\}$
 b) $\bar{B} \cap C = \text{«No sacar un basto y sacar un caballo»}$
 $\bar{B} \cap C = \{CE, CO, CC\}$
 c) $B \cap F = \text{«Sacar un basto y sacar una figura»}$
 $B \cap F = \{SB, CB, RB\}$
 d) $A \cup R \cup F = \text{«Sacar un as o sacar un rey o sacar una figura»}$
 $A \cup R \cup F = \{1B, 1E, 1C, 1O, SB, SE, SC, SO, CB, CE, CC, CO, RB, RE, RC, RO\}$
 e) $\bar{C} \cap F = \text{«No sacar un caballo y sacar una figura»}$
 $\bar{C} \cap F = \{SB, SE, SC, SO, RB, RE, RC, RO\}$
 f) $(C \cup R) \cap \bar{F} = \text{«Sacar un caballo o sacar un rey y no sacar una figura»}$
 $(C \cup R) \cap \bar{F} = \emptyset$

49 INVESTA. Se considera el experimento aleatorio de sacar una carta de una baraja española. Crea dos ejemplos diferentes para los sucesos A y B de forma que se cumplan las condiciones.

- a) $A \cup B = \{\text{Oros, Copas}\}$
 b) $A \cap B = \{\text{Figura de copas}\}$
 c) $A - B = \{\text{As de oros, As de copas, As de espadas}\}$
 d) $A \cup \bar{B} = \{\text{Oros, Copas, Espadas}\}$
 e) $A \cap \bar{B} = \{\text{Oros}\}$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

- a) $A = \text{«Sacar oros»}$
 $B = \text{«Sacar copas»}$
 b) $A = \text{«Sacar figura»}$
 $B = \text{«Sacar copas»}$

- c) $A = \text{«Sacar as»}$
 $B = \text{«Sacar bastos»}$
 d) $A = \text{«Sacar una carta»}$
 $B = \text{«Sacar bastos»}$
 e) $A = \text{«Sacar oros»}$
 $B = \text{«No sacar oros»}$

50 INVESTIGA. En un experimento aleatorio se tienen las siguientes igualdades:

$$A \cup B = \overline{C \cup D} \quad A = \bar{C} \cap \bar{D}$$

- a) ¿Qué puedes decir del suceso $A \cup B \cup C \cup D$?
 $A \cup B \cup C \cup D = (\overline{C \cup D}) \cup (C \cup D) = E$
 b) ¿Qué puedes decir del suceso B ?
 $A \cup B = \overline{C \cup D} = \bar{C} \cap \bar{D} = A$,
 entonces $B = \emptyset$.

51 Se hace girar una ruleta dividida en 18 sectores numerados del 1 al 18, se espera a que se detenga y se anota el número en el que se ha parado. Expresa como unión o intersección los siguientes sucesos.

$A = \text{«Detenerse en un número múltiplo de 3 o de 5»}$

$B = \text{«Detenerse en un número mayor que 15 o menor que 5»}$

$C = \text{«Detenerse en un número múltiplo de 3 y de 4»}$

$D = \text{«Detenerse en un número par y divisor de 18»}$

$E = \text{«Detenerse en un número múltiplo de 3»}$

$F = \text{«Detenerse en un número múltiplo de 5»}$

$G = \text{«Detenerse en un número mayor que 15»}$

$H = \text{«Detenerse en un número menor que 5»}$

$I = \text{«Detenerse en un número múltiplo de 4»}$

$J = \text{«Detenerse en un número par»}$

$K = \text{«Detenerse en un número divisor de 18»}$

$$A = E \cup F \quad C = E \cap I$$

$$B = G \cup H \quad D = J \cap K$$

52 Un experimento consiste en sacar una bola de una urna con 4 bolas rojas, numeradas del 1 al 4; 5 azules, numeradas del 1 al 5; y 3 negras, numeradas del 1 al 3.

R = «Salir bola roja»

A = «Salir bola azul»

N = «Salir bola negra»

I = «Salir número impar»

P = «Salir número par»

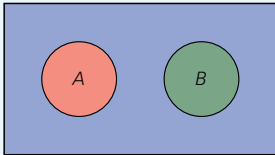
Describe estos sucesos.

- a) $R \cup P$ c) $\bar{P} \cap N$ e) $\bar{N}$
 b) $I \cup P$ d) $R \cap I$ f) $\overline{R \cup A}$
 a) $R \cup P = \{R1, R2, R3, R4, A2, A4, N2\}$
 b) $I \cup P = \{R1, R2, R3, R4, A1, A2, A3, A4, A5, N1, N2, N3\}$
 c) $\bar{P} \cap N = \{N1, N3\}$
 d) $R \cap I = \{R1, R3\}$
 e) $\bar{N} = \{R1, R2, R3, R4, A1, A2, A3, A4, A5\}$
 f) $\overline{R \cup A} = \{N1, N2, N3\}$

2. Conoce las propiedades de la probabilidad y las aplica para calcular probabilidades

ACTIVIDADES FLASH

- 53 Sean A y B dos sucesos incompatibles, con $P(A) = 0,6$ y $P(A \cup B) = 0,9$; calcula lo siguiente:



- a) $P(B)$
 b) $P(A - B)$
 c) $P(\bar{A} \cap B)$
 d) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$
 a) $P(B) = P(A \cup B) - P(A) = 0,3$
 b) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0,6$
 c) $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,3$
 d) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,9 = 0,1$

- 54 Determina $P(A \cup B)$, $P(\bar{A} \cup \bar{B})$ y $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ si:
 $P(A) = 0,6$ $P(B) = 0,5$ $P(A \cap B) = 0,3$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,8 \\ P(\bar{A} \cup \bar{B}) &= P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 0,7 \\ P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0,2 \end{aligned}$$

- 55 Halla $P(A)$, $P(B)$ y $P(\bar{A} \cap B)$ si:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= 0,8 & P(A \cap B) &= 0,3 \\ P(\bar{B}) &= 0,6 \\ P(B) &= 1 - P(\bar{B}) = 0,4 \\ P(A) &= P(A \cup B) - P(A \cap B) + P(A \cap B) = 0,7 \\ P(\bar{A} \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) = 0,1 \end{aligned}$$

- 56 ¿Es posible que haya dos sucesos tales que $P(A) = 0,6$; $P(B) = 0,8$ y $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0,7$?

No es posible.

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cup \bar{B}) &= P(\overline{A \cap B}) = 0,7 \rightarrow \\ &\rightarrow 1 - P(A \cap B) = 0,7 \rightarrow P(A \cap B) = 0,3 \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \\ &= 0,6 + 0,8 - 0,3 = 1,1 > 1 \end{aligned}$$

- 57 ¿Es posible que haya dos sucesos tales que $P(A) = 0,3$; $P(B) = 0,6$ y $P(A \cap B) = 0,3$? ¿Cómo son esos sucesos?

Sí, es posible.

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \\ &= 0,3 + 0,6 - 0,3 = 0,6 \end{aligned}$$

El suceso A está contenido en el suceso B .

- 58 ¿Es posible encontrar dos sucesos tales que $P(A) = 0,5$; $P(B) = 0,2$ y $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,6$?

Sí, es posible.

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = \\ &= 0,6 \rightarrow P(A \cup B) = 0,4 \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \\ &= 0,4 \rightarrow P(A \cap B) = 0,3 \end{aligned}$$

- 59 Si $P(A) = 0,7$ y $P(B) = 0,4$; ¿pueden A y B ser sucesos incompatibles?

No, porque si $P(A \cap B) = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) > 1$.

- 60 **INVENTA.** Describe un experimento aleatorio y dos sucesos A y B tales

que $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ y $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, y calcula.

- a) $P(\bar{A})$ d) $P(A - B)$
 b) $P(A \cup B)$ e) $P(\bar{B} - A)$
 c) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$ f) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Tirar una moneda y un dado, y anotar los resultados obtenidos.

A = «Sacar cara»

B = «Sacar número par»

$A \cap B$ = «Sacar cara y número par»

- a) $P(\bar{A}) = \frac{1}{2}$
 b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{4}$
 c) $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) =$
 $= 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
 d) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) =$
 $= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$
 e) $P(\bar{B} - A) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) =$
 $= 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$
 f) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) =$
 $= 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

61 Sabemos que $P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B)$.

•••

a) Decide cómo son los sucesos A y B .

b) Calcula $P(A \cup B)$ y $P(A \cap B)$.

$$P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Entonces: $P(B) = 0$ y $P(A \cap B) = 0$.

a) El suceso B es un suceso imposible.

$$b) P(A \cup B) = P(A) \quad P(A \cap B) = 0$$

62

•••

Si $E = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ es el espacio muestral de un experimento aleatorio:

- a) ¿Puede suceder que $P(S_1) = \frac{1}{5}$,
 $P(S_2) = \frac{2}{3}$, $P(S_3) = \frac{1}{4}$ y $P(S_4) = \frac{1}{6}$?
- b) ¿Y que $P(S_1) = \frac{1}{5}$, $P(S_2) = \frac{1}{3}$, $P(S_3) = \frac{1}{4}$
 y $P(S_4) = \frac{1}{6}$?

$$a) \frac{1}{5} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{77}{60} > 1 \rightarrow$$

→ No puede suceder porque la probabilidad del espacio muestral debe valer 1.

$$b) \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{57}{60} < 1 \rightarrow$$

→ No puede suceder porque la probabilidad del espacio muestral debe valer 1.

63

•••

MATEMÁTICAS Y... COMERCIO.

Los días festivos de apertura están regulados por ley, sin embargo el horario de apertura y cierre de comercios es libre. Un estudio en cierta población muestra que el 80% está a favor de la apertura en días festivos, el 40% prefiere una ley reguladora del horario comercial y el 30% está a favor de las dos cuestiones. Elegida al azar una persona de esa población, calcula:

- a) La probabilidad de que esté a favor de la apertura de comercios en días festivos o de que exista una ley reguladora del horario comercial.
- b) La probabilidad de que ni esté a favor de la apertura de comercios en días festivos ni de que exista una ley reguladora del horario comercial.

A = «Estar a favor de la apertura»

B = «Estar a favor de la ley reguladora»

$$P(A \cup B) = 0,8 + 0,4 - 0,3 = 0,9$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) =$$

$$= 1 - 0,9 = 0,1$$

64

•••

MATEMÁTICAS Y... SOCIOLOGÍA.

Las distintas administraciones públicas suelen tomar decisiones en base a estudios estadísticos. La concejalía de cultura de una población maneja una encuesta en la que el 40% lee el periódico, el 30% lee revistas culturales y el 20% lee ambos tipos de publicaciones. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar lea el periódico o lea revistas culturales?

A = «Leer habitualmente el periódico»

B = «Leer habitualmente revistas culturales»

$$P(A \cup B) = 0,4 + 0,3 - 0,2 = 0,5$$

- 65 Un estudio muestra que la probabilidad de que un estudiante apruebe Lengua española es 0,7, la probabilidad de que apruebe Lengua extranjera es 0,6 y la de aprobar ambas materias es 0,5. Elegido al azar un estudiante:

- ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe al menos una de las dos materias?
- ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe solo una de las dos?
- ¿Cuál es la probabilidad de que no apruebe ninguna?

A = «Aprobar Lengua española»

B = «Aprobar Lengua extranjera»

a) $P(A \cup B) = 0,7 + 0,6 - 0,5 = 0,8$

b) $(P(A) - P(A \cap B)) + (P(B) - P(A \cap B)) = 0,3$

c) $P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0,2$

Cálculo de probabilidades



ACTIVIDADES FLASH

- 66 Se extrae una carta de la baraja española. Identifica el número de casos favorables y posibles en cada caso e indica las probabilidades pedidas.

- De que sea un basto o una espada.
- De que sea un basto o un rey.
- De que sea una figura o un caballo.
- De que sea una copa o una figura.

a) A = «Sacar un basto»

B = «Sacar una espada»

Se trata de sucesos incompatibles, es decir, $A \cap B = \emptyset$. Por tanto:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{10}{40} + \frac{10}{40} = 0,5$$

b) A = «Sacar un basto»

B = «Sacar un rey»

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{10}{40} + \frac{4}{40} - \frac{1}{40} = 0,325$$

c) A = «Sacar una figura»

B = «Sacar un caballo»

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{12}{40} + \frac{4}{40} - \frac{4}{40} = 0,3$$

d) A = «Sacar una copa»

B = «Sacar una figura»

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{10}{40} + \frac{12}{40} - \frac{3}{40} = 0,475$$

- 67 Considera el experimento de escoger al azar una pieza de fruta de un frutero en el que hay 4 manzanas rojas, 6 naranjas, 3 manzanas verdes, 5 peras verdes, 2 plátanos y 1 pera amarilla. Calcula la probabilidad de escoger:

- Una pieza de color rojo.
- Una pieza de color verde.
- Una pieza que no sea verde ni roja.
- Una pieza que no sea amarilla.

Hay $4 + 6 + 3 + 5 + 2 + 1 = 21$ piezas de fruta en total.

- Hay 4 frutas rojas en el frutero → La probabilidad de coger una fruta roja es $\frac{4}{21} = 0,19$
- Hay $3 + 5 = 8$ frutas verdes en el frutero → La probabilidad de coger una fruta verde es $\frac{8}{21} = 0,38$
- $6 + 2 + 1 = 9$ frutas que no son ni rojas ni verdes en el frutero → La probabilidad de coger una fruta ni verde ni roja es $\frac{9}{21} = 0,43$

- d) Hay $1 + 2 = 3$ frutas amarillas en el frutero $\rightarrow$ La probabilidad de coger una fruta no amarilla es $\frac{21 - 3}{21} = 0,86$

68 Se extrae una bola de una urna con siete bolas rojas numeradas del 1 al 7, cuatro bolas azules numeradas del 8 al 11 y tres bolas verdes numeradas del 12 al 14. Calcula la probabilidad de que:

- La bola sea roja.
- La bola sea roja o verde.
- El número de la bola sea múltiplo de 5.
- El número de la bola sea mayor que 8 pero menor que 13.
- El número de la bola sea par y la bola de color verde.
- El número de la bola sea impar y la bola de color azul o verde.

Hay $7 + 4 + 3 = 14$ bolas en total.

R = «Extraer bola roja»

A = «Extraer bola azul»

V = «Extraer bola verde»

- $P(R) = \frac{7}{14} = 0,5$
- $P(R \cup V) = \frac{10}{14} = 0,71$
- $P(\text{«Ser múltiplo de 5»}) = \frac{2}{14} = 0,14$
- $P(\text{«Número mayor que 8 y menor 13»}) = \frac{4}{14} = 0,28$
- $P(V \cap \text{«Par»}) = \frac{2}{14} = 0,14$
- $P(A \cap \text{«Impar»}) = \frac{3}{14} = 0,21$

69 Se lanzan al aire dos dados, uno azul y otro rojo, y se anotan los pares de resultados. Calcula la probabilidad de que:

- Los resultados de ambos dados sean iguales.
- Los resultados de ambos dados sean pares.
- El primer resultado sea menor que el segundo.

- a) Como los dados se pueden diferenciar, tenemos en total 36 combinaciones posibles:

{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, ..., 64, 65, 66}

Y solo son iguales en seis casos:

{11, 22, 33, 44, 55, 66}

Por tanto, la probabilidad de que ambos resultados sean iguales es $\frac{6}{36} = 0,1\hat{6}$.

- b) Como los dados se pueden diferenciar, tenemos en total 36 combinaciones posibles:

{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, ..., 64, 65, 66}

Y son pares en ambos dados si en el primero que se lanza el resultado es par (2, 4 o 6), y luego el resultado del segundo también es par (2, 4 o 6), es decir, en $3 \cdot 3 = 9$ que son {22, 24, 26, 42, 44, 46, 62, 64, 66}.

Por tanto, la probabilidad de que ambos resultados sean pares es $\frac{9}{36} = 0,25$.

- c) Como los dados se pueden diferenciar, tenemos en total 36 combinaciones posibles:

{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, ..., 64, 65, 66}

Ahora distingamos los casos.

Primer dado	Segundo dado
1	2, 3, 4, 5, 6
2	3, 4, 5, 6
3	4, 5, 6
4	5, 6
5	6
6	–

Nos valen {12, 13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 45, 46, 56}. Es decir, hay 15 posibilidades. Por tanto, la probabilidad de que el primer resultado sea menor que el segundo es $\frac{15}{36} = 0,41\hat{6}$.

70 Considera el experimento que consiste en lanzar dos dados, uno rojo y otro azul, y anotar la suma de las puntuaciones obtenidas. Calcula la probabilidad de que:

- a) La suma sea 7.
 b) La suma sea un número múltiplo de 3.
 c) La suma sea menor o igual que 9.
 d) La suma no sea mayor que 4.
- a) El espacio muestral es {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}. Como los dados se pueden diferenciar, tenemos en total 36 combinaciones posibles para realizar la suma de ambos dados. Distingamos los casos.

Primer dado	Segundo dado
1	6
2	5
3	4
4	3
5	2
6	1

El 7 lo podemos obtener con seis pares de resultados distintos: {16, 25, 34, 43, 52, 61}. Por tanto, la probabilidad de que la suma sea 7 es $\frac{6}{36} = 0,1\bar{6}$.

- b) El espacio muestral es {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}. Como los dados se pueden diferenciar, tenemos en total 36 combinaciones posibles para realizar la suma de ambos dados. Para que el resultado sea un múltiplo de 3, nos vale que la suma sea 3, 6, 9 o 12. Distingamos los casos:

Primer dado	Segundo dado
1	2, 5
2	1, 4
3	3, 6
4	2, 5
5	1, 4
6	3, 6

Hay 12 formas: {12, 15, 21, 24, 33, 36, 42, 45, 51, 54, 63, 66} → La probabilidad de que la suma sea 7 es $\frac{12}{36} = 0,3\bar{3}$.

- c) El espacio muestral es {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}. Como los dados se pueden diferenciar, tenemos en total 36 combinaciones posibles para realizar la suma de ambos dados. Vamos a ver en cuántos casos el resultado es mayor que 9. Distingamos los casos:
 Si en el primer dado sale 1 →
 → En el segundo no vale ninguna.
 Si en el primer dado sale 2 →
 → En el segundo no vale ninguna.
 Si en el primer dado sale 3 →
 → En el segundo no vale ninguna.
 Si en el primer dado sale 4 →
 → El segundo puede valer 4.
 Si en el primer dado sale 5 →
 → El segundo puede valer 5 o 6.
 Si en el primer dado sale 6 →
 → El segundo puede valer 4, 5 o 6.
 Son seis casos: {46, 55, 56, 64, 65, 66} →
 → La probabilidad de que la suma sea menor o igual que 9 es $\frac{30}{36} = 0,8\bar{3}$.
- d) El espacio muestral es {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}. Como los dados se pueden diferenciar, tenemos en total 36 combinaciones posibles para realizar la suma de ambos dados. Distingamos los casos.

Primer dado	Segundo dado
1	1, 2, 3
2	1, 2
3	1
4	–
5	–
6	–

En total hay seis casos: {11, 12, 13, 21, 22, 31} → La probabilidad de que la suma no sea mayor que 4 es $\frac{6}{36} = 0,1\bar{6}$.

- 71 RETO.** En una clase que no tiene más de 16 estudiantes, la probabilidad de que al escoger dos de ellos resulte que ambos han aprobado el último examen de Matemáticas es $\frac{1}{2}$. ¿Cuántos estudiantes hay en la clase y cuántos aprobaron dicho examen?

Consideramos que n es el número de estudiantes y m es el número de estudiantes que han aprobado.

La probabilidad de que el primer estudiante elegido haya aprobado es $\frac{m}{n}$ y la de que el segundo estudiante también haya aprobado es $\frac{m-1}{n-1}$.

La probabilidad de que hayan aprobado los dos estudiantes elegidos es:

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{m-1}{n-1} = \frac{1}{2} \rightarrow 2m(m-1) = n(n-1)$$

Como m y $m-1$ son números consecutivos, el primer miembro de la ecuación es múltiplo de 4, lo que conlleva que $n(n-1)$ también lo sea, y como $n \leq 16$, n puede valer 16, 13, 12, 9, 8, 5 y 4. El único valor de n para el que la ecuación tiene solución es 4, siendo entonces $m = 3$. Por tanto, hay 4 estudiantes y aprobaron 3 estudiantes.

- 72** ¿Cuál es la probabilidad de que al tirar dos dados aparezcan en la cara superior números consecutivos?

Anotamos en una tabla los posibles resultados de lanzar dos dados y vemos cuáles son consecutivos:

	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

$$\frac{10}{36} = \frac{5}{18} = 0,2\bar{7} \rightarrow \text{La probabilidad de sacar dos números consecutivos es } 0,2\bar{7}.$$

- 73** En un dado la probabilidad de que salga un 5 es el triple que la probabilidad de que salga cualquiera de los otros números.

- Asigna un valor a la probabilidad de que salga un 1.
- Halla la probabilidad de que salga un 5 en función de la probabilidad de que salga un 1.
- Calcula la probabilidad de que salga cada uno de los números, teniendo en cuenta que la suma total de las probabilidades es 1.

a) $P(1) = a$

b) $P(5) = 3 \cdot P(1) = 3a$

- c) Asumimos que la probabilidad de que salga 1, 2, 3, 4 o 6 es la misma:

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(6) = a$$

Y la suma de todas las probabilidades ha de ser 1. Es decir:

$$5a + 3a = 1 \rightarrow 8a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{8}$$

$$P(1) = \frac{1}{8}$$

$$P(5) = \frac{3}{8}$$

- 74** Calcula el valor de x sabiendo que al tirar un dado se tienen las siguientes probabilidades:

$$P(1) = P(2) = P(3) = \frac{1}{7}$$

$$P(4) = P(5) = P(6) = x$$

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

$$P(4 \cup 5 \cup 6) = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + x + x + x = 1 \rightarrow x = \frac{4}{21} = 0,1904$$

- 75** Se ha trucado un dado cúbico, de modo que las puntuaciones que son números primos tienen doble probabilidad de salir que las que no lo son.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener cada una de las puntuaciones?
- b) ¿Y de obtener una puntuación par al tirar el dado?

$$a) P(2) = P(3) = P(5) = 2x$$

$$P(1) = P(4) = P(6) = x$$

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

$$x + 2x + 2x + x + 2x + x = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow 9x = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{1}{9} = 0,1\hat{1}$$

La probabilidad de sacar un 1, un 4 o un 6 es del 11,11%.

La probabilidad de sacar un 2, un 3 o un 5 es del 22,22%.

$$P(2) + P(4) + P(6) = 0,4$$

- b) La probabilidad de obtener una puntuación par es del 44,44%.

76 MATEMÁTICAS E... HISTORIA.

- En el Museo de Arte Romano de Mérida se encuentra un curioso dado que utilizaban los romanos para sus juegos. Este dado tiene 6 caras cuadradas y 8 triangulares, siendo la probabilidad de obtener cada cara cuadrada el doble que la de obtener cada cara triangular. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara triangular?

C = «Salir cara cuadrada»

T = «Salir cara triangular»

$$P(C) = 2 \cdot P(T)$$

$$6 \cdot P(C) + 8 \cdot P(T) = 1 \rightarrow$$

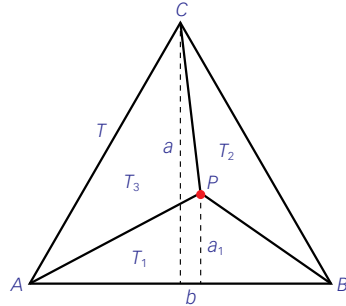
$$\rightarrow 6 \cdot 2 \cdot P(T) + 8 \cdot P(T) = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow 20 \cdot P(T) = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow P(T) = \frac{1}{20}$$

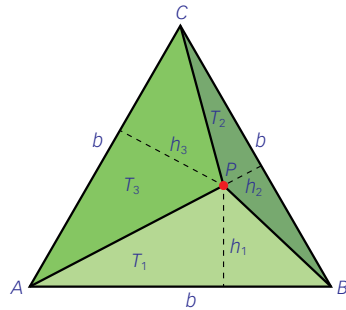
- 77 **INVESTIGA.** En el interior del triángulo equilátero ABC elegimos al azar un punto P . ¿Cuál es la probabilidad de que el área del triángulo ABP sea mayor que el área del triángulo ACP y que el área del triángulo BCP ?

Veamos dónde debe estar situado el punto P para que el área de ABP sea mayor que la de BCP y la del ACP .



$$\text{Área}(T_1) > \text{Área}(T_2) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{b \cdot h_1}{2} > \frac{b \cdot h_2}{2} \rightarrow h_1 > h_2$$

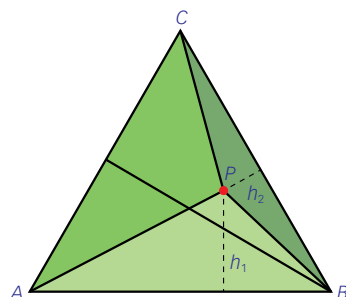


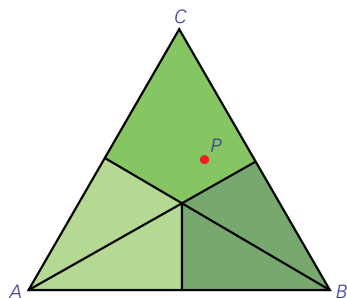
$$\text{Área}(T_1) > \text{Área}(T_3) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{b \cdot h_1}{2} > \frac{b \cdot h_3}{2} \rightarrow h_1 > h_3$$

Si dibujamos la bisectriz del ángulo B vemos que si el punto P está por encima entonces $h_1 > h_2$ y, por tanto, $\text{Área}(T_1) > \text{Área}(T_2)$.

De forma análoga, si el punto P está por encima de la bisectriz del ángulo A entonces $h_1 > h_3$ y, por tanto, $\text{Área}(T_1) > \text{Área}(T_3)$.





La zona del triángulo ABC donde P verifica las condiciones pedidas es $\frac{1}{3}$ del área total del triángulo, luego la probabilidad de elegir un punto P con esas características es $\frac{1}{3}$.

- 78 En un dado truco se tienen estas probabilidades.

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(6) = 0,1$$

$$P(4) = a \quad P(5) = b \quad P(4) = 2P(5)$$

Calcula a y b .

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

$$0,1 + 0,1 + 0,1 + a + b + 0,1 = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow a + b = 0,6$$

$$P(4) = 2P(5) \rightarrow a = 2b$$

$$\left. \begin{array}{l} a + b = 0,6 \\ a = 2b \end{array} \right\} \rightarrow a = 0,4; b = 0,2$$

- 79 **RETO.** Seleccionamos dos números reales del intervalo $[-20, 10]$, ¿cuál es la probabilidad de que su producto sea positivo?

$A = \text{«Número positivo»}$

$$P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} = 0,3$$

$$P(\bar{A}) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3} = 0,6$$

$\bar{A} \cdot A = A \cdot \bar{A} = \text{Número negativo}$

$\bar{A} \cdot \bar{A} = A \cdot A = \text{Número positivo}$

$$P(\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) + P(A) \cdot P(A) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{9} = 0,5$$

La probabilidad de que el producto de dos números reales del intervalo $[-20, 10]$ sea positivo es $\frac{5}{9}$.

Probabilidad condicionada

- 80 En el experimento que consiste en lanzar dos dados, uno rojo y otro azul, y considerar los pares de puntuaciones, sean los sucesos:

$A = \text{«Las dos puntuaciones son iguales»}$

$B = \text{«Las dos puntuaciones son impares»}$

$C = \text{«Las dos puntuaciones son múltiplos de 3»}$

Calcula estas probabilidades.

a) $P(A/B)$ b) $P(C/B)$ c) $P(C/A)$

$$a) P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{9}{36}} = \frac{3}{9} = 0,3$$

$$b) P(C/B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{9}{36}} = \frac{1}{9} = 0,1$$

$$c) P(C/A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{2}{6} = 0,3$$

- 81 De todas las familias que tienen tres hijos, consideramos aquellas en las que hay, al menos, dos niñas. ¿Cuál es la probabilidad de que el otro hijo sea niño?

$A = \text{«Uno de los tres hijos es niño»}$

$B = \text{«Al menos dos de los tres hijos son niñas»}$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{4}{8}} = \frac{3}{4} = 0,75$$

- 82 Se elige al azar uno de los 100 primeros números naturales.

- a) Calcula la probabilidad de que sea un cuadrado perfecto.
- b) Calcula la probabilidad de que sea un múltiplo de 5.
- c) Calcula la probabilidad de que sea un cuadrado perfecto y, además, sea múltiplo de 5.

- d) Calcula la probabilidad de que sea un cuadrado perfecto, sabiendo que es un múltiplo de 5.

A = «Salir cuadrado perfecto»

B = «Salir múltiplo de 5»

$$a) P(A) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

$$b) P(B) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

$$c) P(A \cap B) = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$$

$$d) P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{50}}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{50} = \frac{1}{10}$$

- 83 En el experimento que consiste en lanzar dos dados, uno rojo y otro azul, calcula la probabilidad de que:

- a) Una de las puntuaciones sea impar, sabiendo que la suma de las dos puntuaciones es 9.

- b) Una de las puntuaciones sea par, sabiendo que la suma de las dos puntuaciones es 7.

- c) La suma de las puntuaciones sea 7, sabiendo que su diferencia es 3.

- a) A = «Una de las puntuaciones es impar»

B = «La suma de las dos puntuaciones es 9»

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{36}}{\frac{4}{36}} = 1$$

- b) A = «Una de las puntuaciones es par»

B = «La suma de las dos puntuaciones es 7»

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{6}{36}}{\frac{6}{36}} = 1$$

- c) A = «La suma de las dos puntuaciones es 7»

B = «La diferencia de las dos puntuaciones es 3»

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{2}{6} = 0,3$$

- 84 En el experimento que consiste en extraer una carta de la baraja española, calcula la probabilidad de sacar un rey, sabiendo que se ha obtenido una figura.



A = «Sacar un rey»

B = «Sacar una figura»

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{40}}{\frac{12}{40}} = \frac{4}{12} = 0,3$$

- 85 En una urna hay 50 tarjetas numeradas del 1 al 50. Calcula la probabilidad de que al sacar una tarjeta al azar esté numerada con un cuadrado perfecto, si se sabe que ha salido un múltiplo de 3.

A = «Sacar una tarjeta numerada con un cuadrado perfecto»

B = «Sacar una tarjeta numerada con un múltiplo de 3»

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{50}}{\frac{16}{50}} = \frac{2}{16} = 0,125$$

- 86 Calcula $P(A \cup B)$, sabiendo que $P(A) = 0,3$; $P(B) = 0,5$ y $P(A/B) = 0,2$.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) + P(B) - P(A \cup B)}{P(B)}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A/B) \cdot P(B) = 0,7$$

- 87 El médico de una empresa tiene una tabla en la que distribuye a los empleados según el sexo y su condición de fumadores, pero se ha perdido un dato. Complétala en tu cuaderno sabiendo que «Ser mujer» y «Ser fumador» son sucesos independientes.

	Fumador	No fumador
Mujer	30	45
Hombre	80	

M = Ser mujer

F = Ser fumador

Sea x el número de hombres no fumadores de la empresa.

Los sucesos M y F son independientes:

$$\begin{aligned}
 P(M \cap F) &= P(M) \cdot P(F) = \frac{30}{155 + x} = \\
 &= \frac{75}{155 + x} \cdot \frac{110}{155 + x} \rightarrow \\
 &\rightarrow 30(155 + x) = 8250 \rightarrow \\
 &\rightarrow 155 + x = 275 \rightarrow x = 120
 \end{aligned}$$

- 88 **RETO.** Una bolsa contiene 3 bolas rojas y 2 bolas blancas. Si sacamos las bolas, sin mirar, una a una, ¿cuál es la probabilidad de que en algún momento solo queden bolas blancas en la bolsa?

Para que en algún momento solo queden bolas blancas hay que extraer las tres bolas rojas, pero en la bolsa pueden quedar dos bolas blancas o una:

R = «Sacar una bola roja»

B = «Sacar una bola blanca»

$$\begin{aligned}
 P(R \cap R \cap R) &= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{60} = \\
 &= \frac{1}{10} = 0,1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(B \cap R \cap R \cap R) &= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \\
 &= \frac{12}{120} = \frac{1}{10} = 0,1
 \end{aligned}$$

A $P(B \cap R \cap R \cap R)$ la multiplicamos por 3 porque la bola blanca la podemos sacar en la primera, segunda o tercera posición

(y estos sucesos tienen la misma probabilidad). Por lo que en total queda:

$$\begin{aligned}
 P(\text{«Quedar solo bolas blancas»}) &= \\
 &= \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 0,4
 \end{aligned}$$

- 89 Al tirar dos dados, uno rojo y uno blanco, ¿cuál es la probabilidad de que en el rojo aparezca una puntuación superior a la del blanco?

Elaboramos una tabla de contingencia para observar todas las puntuaciones posibles.

	R1	R2	R3	R4	R5	R6
B1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
B2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
B3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
B4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
B5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
B6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$$P(A) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

Regla del producto

- 90 En un estuche hay 9 pinturas de color azul, 5 de color rojo, 3 de color verde y 1 de color morado. Se eligen tres al azar (con reemplazamiento). Calcula la probabilidad de que:

- Sean tres de color verde.
- Sean tres de color morado.
- Sean una azul y dos verdes.
- Sean de distinto color.
- Al menos haya una de color rojo.

$$\begin{aligned}
 a) \quad P(V) &= \frac{3}{18} = 0,1\hat{6} \rightarrow P(V) \cdot P(V) \cdot P(V) = \\
 &= \frac{3}{18} \cdot \frac{3}{18} \cdot \frac{3}{18} = \frac{27}{5832} = 0,0046
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad P(M) &= \frac{1}{18} = 0,0\hat{5} \rightarrow P(M) \cdot P(M) \cdot P(M) = \\
 &= \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{5832} = 0,00017
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} P(A) &= \frac{9}{18} = 0,5 \\ P(V) &= \frac{3}{18} = 0,1\hat{6} \end{aligned} \right\} \rightarrow \\
 & \rightarrow 3 \cdot P(A) \cdot P(V) \cdot P(V) = \\
 & = 3 \cdot \frac{9}{18} \cdot \frac{3}{18} \cdot \frac{3}{18} = \frac{81}{5832} = 0,041\hat{6}
 \end{aligned}$$

- d) Las únicas posibilidades son: *AVR*, *AVM*, *ARM* y *VRM*; pero hay que tener en cuenta que importan el orden en que sacamos cada color, es decir, *AVR* es distinto a *ARV*, pero tienen la misma probabilidad de ocurrir. En total, cada uno de los casos puede ocurrir 6 (es decir, 3!) veces, por lo que la probabilidad de que todos los colores sean distintos es:

$$\begin{aligned}
 & 6 \cdot (P(A) \cdot P(V) \cdot P(R) + P(A) \cdot P(V) \cdot P(M) + \\
 & + P(A) \cdot P(R) \cdot P(M) + P(V) \cdot P(R) \cdot P(M)) = \\
 & = 6 \cdot \left(\frac{135}{5832} + \frac{27}{5832} + \frac{45}{5832} + \frac{15}{5832} \right) = \\
 & = 0,2284
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } P(\text{«Al menos un rojo»}) &= \\
 &= 1 - P(\text{«Ningún rojo»}) = \\
 &= 1 - \frac{13}{18} \cdot \frac{13}{18} \cdot \frac{13}{18} = 0,6232
 \end{aligned}$$

- 91** Se considera el experimento que consiste en tomar al azar tres frutas de un frutero y comérselas.

- Si en el frutero hay 4 naranjas, 2 manzanas y 6 plátanos, calcula la probabilidad de tomar una naranja.
- Si en el frutero hay 3 naranjas, 2 manzanas y 6 plátanos, calcula la probabilidad de tomar un plátano.
- Si en el frutero hay 3 naranjas, 2 manzanas y 5 plátanos, calcula la probabilidad de tomar una manzana.
- Si en el frutero hay 4 naranjas, 2 manzanas y 6 plátanos, calcula la probabilidad de tomar primero una naranja, segundo un plátano y tercero una manzana.

A = «Tomar una naranja»

B = «Tomar un plátano»

C = «Tomar una manzana»

$$\text{a) } P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\text{b) } P(B) = \frac{6}{11}$$

$$\text{c) } P(C) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } P(A_1 \cap B_2 \cap C_3) &= \frac{4}{12} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{2}{10} = \\
 &= \frac{48}{1320} = \frac{2}{55} = 0,03\hat{6}
 \end{aligned}$$

92

- En una bolsa hay 8 caramelos de fresa, 4 de menta y 6 de limón. Una niña escoge al azar un caramelo de la bolsa y, después de comérselo, escoge al azar un segundo caramelo de la misma bolsa. Calcula la probabilidad de que:

- Los dos caramelos sean de fresa.
- Los dos caramelos sean del mismo sabor.
- Los dos caramelos sean de distinto sabor.
- El segundo sea de menta.
- El segundo no sea de fresa.
- Al menos uno haya sido de limón.

F_i = «Coger un caramelo de fresa en i -ésimo lugar»

M_i = «Coger un caramelo de menta en i -ésimo lugar»

L_i = «Coger un caramelo de limón en i -ésimo lugar»

$$\text{a) } P(F_1 \cap F_2) = \frac{8}{18} \cdot \frac{7}{17} = \frac{28}{153} = 0,183$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) Fresa} \rightarrow P(F_1 \cap F_2) &= \frac{8}{18} \cdot \frac{7}{17} = \\
 &= \frac{28}{153} = 0,183
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Menta} \rightarrow P(M_1 \cap M_2) &= \frac{4}{18} \cdot \frac{3}{17} = \\
 &= \frac{2}{51} = 0,0392
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Limón} \rightarrow P(L_1 \cap L_2) &= \frac{6}{18} \cdot \frac{5}{17} = \\
 &= \frac{5}{51} = 0,098
 \end{aligned}$$

$$P(\text{«Coger dos caramelos iguales»}) = \frac{28}{153} + \frac{2}{51} + \frac{5}{51} = \frac{49}{153} = 0,3203$$

$$\begin{aligned} \text{c) } P(\text{«Coger dos caramelos distintos»}) &= \\ &= 1 - P(\text{«Coger dos caramelos iguales»}) = \\ &= 1 - \frac{49}{153} = 0,6797 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) Fresa} \rightarrow P(F_1 \cap M_2) &= \frac{8}{18} \cdot \frac{4}{17} = \frac{16}{153} = \\ &= 0,1046 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Menta} \rightarrow P(M_1 \cap M_2) &= \frac{4}{18} \cdot \frac{3}{17} = \\ &= \frac{2}{51} = 0,0392 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Limón} \rightarrow P(L_1 \cap M_2) &= \frac{6}{18} \cdot \frac{4}{17} = \frac{4}{51} = \\ &= 0,0784 \end{aligned}$$

$$P(M_2) = \frac{16}{153} + \frac{2}{51} + \frac{4}{51} = \frac{34}{153} = 0,2$$

$$\text{e) Fresa} \rightarrow P(F_1 \cap \bar{F}_2) = \frac{8}{18} \cdot \frac{10}{17} = \frac{40}{153}$$

$$\text{Menta} \rightarrow P(M_1 \cap \bar{F}_2) = \frac{4}{18} \cdot \frac{9}{17} = \frac{2}{17}$$

$$\text{Limón} \rightarrow P(L_1 \cap \bar{F}_2) = \frac{6}{18} \cdot \frac{9}{17} = \frac{3}{17}$$

$$P(\bar{F}_2) = \frac{40}{153} + \frac{2}{17} + \frac{3}{17} = \frac{85}{153} = 0,5$$

$$\text{f) } P(\bar{L}_1 \cap \bar{L}_2) = \frac{12}{18} \cdot \frac{11}{17} = \frac{22}{51} = 0,4314$$

$$\begin{aligned} P(\text{«Al menos uno sea de limón»}) &= \\ &= 1 - P(\bar{L}_1 \cap \bar{L}_2) = 1 - \frac{22}{51} = 0,5686 \end{aligned}$$

- 93 RETO.** Ana, Beatriz y Carlos lanzan un dado. Ana gana si saca 1, 2 o 3; Beatriz gana si saca 4 o 5, y Carlos gana si saca 6. El dado va pasando de Ana a Beatriz, de Beatriz a Carlos, de Carlos a Ana..., hasta que alguien gane. ¿Cuál es la probabilidad de que gane Carlos?

A = «Ana saque un 4, 5 o 6»

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$$

B = «Beatriz saque un 1, 2, 3 o 6»

$$P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0,6$$

C = «Carlos saque un 6»

$$P(C) = \frac{1}{6} = 0,1\hat{6}$$

$$P(\bar{C}) = \frac{5}{6} = 0,8\hat{3}$$

P(«Carlos gane en una ronda») =

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18} = 0,0\hat{5}$$

P(«Carlos gane en una ronda») =

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{18} \cdot \frac{5}{18} = 0,0154$$

P(«Carlos gane en tres rondas») =

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} = \\ &= \frac{1}{18} \cdot \frac{5}{18} \cdot \frac{5}{18} = 0,0043 \end{aligned}$$

En la tirada n -ésima, la probabilidad de que Carlos gane es de $\frac{1}{18} \cdot \left(\frac{5}{18}\right)^{n-1}$

La probabilidad de que Carlos gane es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{18} \cdot \left(\frac{5}{18}\right)^{n-1} = \frac{1}{13}$$

- 94** De una caja que contiene 3 fichas azules y 5 rojas sacamos 2 fichas. Determina las siguientes probabilidades.

- Salgan 2 fichas azules.
- Sean 2 fichas rojas.
- La primera sea azul y la segunda roja.
- Haya una ficha azul y otra roja.
- La segunda sea roja, si la primera es azul.
- La segunda sea azul, si la primera es roja.
- La segunda sea roja, si la primera es roja.

A_1 = «Salir azul la 1.^a»

A_2 = «Salir azul la 2.^a»

R_1 = «Salir roja la 1.^a»

R_2 = «Salir roja la 2.^a»

$$\begin{aligned} \text{a) } P(A_1 \cap A_2) &= P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \\ &= \frac{6}{56} = \frac{3}{28} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(R_1 \cap R_2) &= P(R_1) \cdot P(R_2) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \\ &= \frac{20}{56} = \frac{5}{14} \end{aligned}$$

$$\text{c) } P(A_1 \cap R_2) = P(A_1) \cdot P(R_2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } P(A_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap A_2) &= \\ &= \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56} + \frac{15}{56} = \\ &= \frac{30}{56} = \frac{15}{28} \end{aligned}$$

$$\text{e) } P(R_2/A_1) = \frac{P(A_1 \cap R_2)}{P(A_1)} = \frac{\frac{15}{56}}{\frac{3}{8}} = \frac{5}{7}$$

$$\text{f) } P(A_2/R_1) = \frac{P(A_2 \cap R_1)}{P(R_1)} = \frac{\frac{15}{56}}{\frac{5}{8}} = \frac{3}{7}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } P(R_2/R_1) &= \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_1)} = \frac{\frac{5}{14}}{\frac{5}{8}} = \frac{8}{14} = \\ &= \frac{4}{7} \end{aligned}$$

- 95 Sea el experimento que consiste en extraer tres monedas (sin reemplazamiento) de un monedero que contiene 5 monedas de 0,50 €, 7 monedas de 1 € y 3 de 2 €.

Calcula la probabilidad de que:

- Sean la primera de 1 €, la segunda de 0,50 € y la tercera de 2 €.
- Sean las dos primeras iguales y la tercera desigual.
- Sean tres monedas de igual valor.

A_i = «Tomar una moneda de 0,50 € en i -ésimo lugar»

B_i = «Tomar una moneda de 1 € en i -ésimo lugar»

C_i = «Tomar una moneda de 2 € en i -ésimo lugar»

$$\begin{aligned} \text{a) } P(\text{«Tomar primero 1 €, luego 0,50 € y luego 2 €»}) &= P(B_1 \cap A_2 \cap C_3) = \\ &= \frac{7}{15} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{3}{13} = \frac{1}{26} = 0,0385 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 0,50 \text{ €} \rightarrow P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) &= \\ &= \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{10}{13} = \frac{20}{273} = 0,0733 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 \text{ €} \rightarrow P(B_1 \cap B_2 \cap \overline{B_3}) &= \\ &= \frac{7}{15} \cdot \frac{6}{14} \cdot \frac{8}{13} = \frac{8}{65} = 0,123 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \text{ €} \rightarrow P(C_1 \cap C_2 \cap \overline{C_3}) &= \\ &= \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{14} \cdot \frac{12}{13} = \frac{12}{455} = 0,0263 \end{aligned}$$

$P(\text{«Tomar las dos primeras monedas iguales y la tercera distinta»}) =$

$$= \frac{20}{273} + \frac{8}{65} + \frac{12}{455} = \frac{304}{1365} = 0,223$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 0,50 \text{ €} \rightarrow P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \\ &= \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{3}{13} = \frac{2}{91} = 0,022 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 \text{ €} \rightarrow P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) &= \\ &= \frac{7}{15} \cdot \frac{6}{14} \cdot \frac{5}{13} = \frac{1}{13} = 0,0769 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \text{ €} \rightarrow P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) &= \\ &= \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{14} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{455} = 0,0022 \end{aligned}$$

$P(\text{«Tomar tres monedas iguales»}) =$

$$= \frac{2}{91} + \frac{1}{13} + \frac{1}{455} = \frac{46}{455} = 0,1011$$

- 96 En la nevera de José hay 5 refrescos de cola, 8 de naranja y 2 de limón. Primero coge uno al azar. En el caso de que sea de limón o cola, repite tomándose un segundo refresco escogido también al azar. Calcula la probabilidad de que:

- Se tome dos refrescos de limón.
- Se tome primero uno de cola y segundo uno de naranja.
- Se tome uno de cola y otro de limón.
- Se tome dos refrescos.
- Se tome dos refrescos del mismo sabor.
- Se tome uno de naranja y otro de limón.

C_i = «Coger un refresco de cola en i -ésimo lugar»

N_i = «Coger un refresco de naranja en i -ésimo lugar»

L_i = «Coger un refresco de limón en i -ésimo lugar»

$$a) P(L_1 \cap L_2) = \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{14} = \frac{1}{105} = 0,0095$$

$$b) P(C_1 \cap N_2) = \frac{5}{15} \cdot \frac{8}{14} = \frac{4}{21} = 0,1905$$

$$c) P(C_1 + L_2) = \frac{5}{15} \cdot \frac{2}{14} = \frac{1}{21} = 0,0476$$

Como esta probabilidad es la misma que si se toma primero el de limón y luego el de cola, entonces el resultado es $2 \cdot 0,0476 = 0,0952$.

$$d) P(\text{«Tomar dos refrescos»}) = 1 - P(N_1) = 1 - \frac{8}{15} = 0,4\hat{6}$$

$$e) \text{Cola} \rightarrow P(C_1 \cap C_2) = \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = \frac{2}{21} = 0,0952$$

$$\text{Limon} \rightarrow P(L_1 \cap L_2) = \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{14} = \frac{1}{105} = 0,0095$$

$$P(\text{«Tomar dos refrescos iguales»}) = \frac{2}{21} + \frac{1}{105} = \frac{11}{105} = 0,1048$$

$$f) P(L_1 \cap N_2) = \frac{2}{15} \cdot \frac{8}{14} = \frac{8}{105} = 0,0762$$

$$P(N_1) \cdot P(L_2/N_1) = \frac{8}{15} \cdot \frac{2}{14} = \frac{8}{105} = 0,0762$$

$$P(\text{«Coger un refresco de naranja y uno de limón»}) = \frac{8}{105} + \frac{8}{105} = \frac{16}{105} = 0,1534$$

97 Realiza la actividad anterior suponiendo que solo hay un refresco de limón.

C_i = «Coger un refresco de cola en i -ésimo lugar»

N_i = «Coger un refresco de naranja en i -ésimo lugar»

L_i = «Coger un refresco de limón en i -ésimo lugar»

a) No puede tomarse dos refrescos de limón porque solo hay uno:
 $P(L_1 \cap L_2) = 0$

$$b) P(C_1 \cap N_2) = \frac{5}{14} \cdot \frac{8}{13} = \frac{20}{91} = 0,2198$$

$$c) P(C_1 \cap L_2) = \frac{5}{14} \cdot \frac{1}{13} = \frac{5}{182} = 0,0275$$

Como esta probabilidad es la misma que si se toma primero el de limón y luego el de cola, entonces el resultado es $2 \cdot 0,0275 = 0,0549$.

$$d) P(\text{«Tomar dos refrescos»}) = 1 - P(N_1) = 1 - \frac{8}{14} = 0,4286$$

$$e) P(C_1 \cap C_2) = \frac{5}{14} \cdot \frac{4}{13} = \frac{10}{91} = 0,1099$$

$$f) P(L_1 \cap N_2) = \frac{1}{14} \cdot \frac{8}{13} = \frac{4}{91} = 0,044$$

98 Se hacen dos grupos con las cartas de una baraja española: G_1 con las copas y G_2 con el resto. Se lanza un dado y si el resultado es un número menor o igual que 4 se escoge al azar una carta de G_2 , y si sale mayor que 4 se elige de G_1 . Calcula la probabilidad de que:

a) Salga una figura de oros o de copas.

b) Salga el as de copas.

c) Salga un caballo, sabiendo que al tirar el dado salió un 6.

A = «Sacar un número mayor que 4»

B = «Sacar un número menor o igual que 4»

C = «Salir una figura»

D = «Salir un as»

F = «Salir un caballo»

G = «Sacar un 6»

$$a) P(C) = P(A) \cdot P(C/A) + P(B) \cdot P(C/B) = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{10} + \frac{4}{6} \cdot \frac{9}{30} = \frac{3}{10} = 0,3$$

$$b) P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{10} + \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{30} = \frac{1}{10} = 0,1$$

$$c) P(F/G) = \frac{P(F \cap G)}{P(G)} = \frac{\frac{1}{60}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{10} = 0,1$$

99 En un restaurante hay 26 hombres, 20 mujeres y 3 niños. De ellos 15 hombres, 8 mujeres y 1 niño están comiendo a la carta, mientras que el resto lo hace

con el menú del día. Se elige una persona al azar. Calcula la probabilidad de que sea hombre y esté tomando un menú del día.



A = «Ser un hombre»

B = «Tomar un menú del día»

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{26}{49} \cdot \frac{11}{26} = 0,2245$$

- 100** Se tiran tres dados y se multiplican los resultados. ¿Cuál es la probabilidad de que su producto sea 36?

El espacio muestral del experimento está formado por $6^3 = 216$ elementos.

Veamos cuántas formas de obtener 36 existen:

(1,6,6), (2,3,6), (2,6,3), (3,2,6), (3,3,4), (3,4,3), (3,6,2), (4,3,3), (6,1,6), (6,2,3), (6,3,2), (6,6,1)

Hay 12 formas.

$$P(A) = \frac{12}{216} = \frac{1}{18} = 0,0\hat{5}$$

- 101** En un hospital de tres plantas, el 50% de los enfermos que están ingresados ocupan la primera planta, el 30% ocupan la segunda planta y el resto está en la tercera planta. Son hombres el 62% de los enfermos de la primera planta, el 44% de los de la segunda planta y el 35% de los de la tercera planta. Elegido al azar un enfermo de este hospital, determina la probabilidad de que sea:

- Un hombre.
- Una mujer de la segunda planta.
- Un hombre de la primera planta o una mujer de la tercera planta.
- Una mujer que no esté en la primera planta.



A_1 = «Enfermo de la primera planta»

A_2 = «Enfermo de la segunda planta»

A_3 = «Enfermo de la tercera planta»

H = «Hombre»

M = «Mujer»

$$\begin{aligned} \text{a) } P(H) &= P(A_1) \cdot P(H/A_1) + P(A_2) \cdot P(H/A_2) + P(A_3) \cdot P(H/A_3) = \\ &= \frac{50}{100} \cdot \frac{62}{100} + \frac{30}{100} \cdot \frac{44}{100} + \\ &\quad + \frac{20}{100} \cdot \frac{35}{100} = \frac{64}{125} = 0,512 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(M \cap A_2) &= P(A_2) \cdot P(M/A_2) = \\ &= \frac{30}{100} \cdot \frac{56}{100} = \frac{21}{125} = 0,168 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } P((H \cap A_1) \cup (M \cap A_3)) &= \\ &= P(M \cap A_1) + P(M \cap A_3) = \\ &= \frac{50}{100} \cdot \frac{62}{100} + \frac{20}{100} \cdot \frac{65}{100} = \frac{11}{25} = \\ &= 0,44 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } P(M \cap \overline{A_1}) &= \frac{30}{100} \cdot \frac{56}{100} + \frac{20}{100} \cdot \frac{65}{100} = \\ &= \frac{149}{500} = 0,298 \end{aligned}$$

- 102** Se lanza una moneda. Si sale cara, se elige al azar un número del 1 al 10; si sale cruz, se lanza un dado. Calcula la probabilidad de que el número que se obtiene sea:

- Un número par.
- Un múltiplo de 3.
- Un múltiplo de 5.
- Un número par o un múltiplo de 3.

A = «Salir cara»

B = «Salir cruz»

C = «Salir un número par»

D = «Salir un múltiplo de 3»

F = «Salir un múltiplo de 5»

$$\text{a) } P(C) = P(A) \cdot P(C/A) + P(B) \cdot P(C/B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$\text{b) } P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} = \frac{19}{60} = 0,31\hat{6}$$

$$\text{c) } P(F) = P(A) \cdot P(F/A) + P(B) \cdot P(F/B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{60} = 0,18\hat{3}$$

$$\text{d) } P(C \cap D) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{20} + \frac{1}{12} = \frac{3+5}{60} = \frac{2}{15}$$

$$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) = \frac{1}{2} + \frac{19}{60} - \frac{2}{15} = \frac{41}{60} = 0,68\bar{3}$$

103 En el montón de cartas M_1 hay 5 cartas deoros y 6 de bastos, y en el M_2 hay 7 cartas deoros, 3 de bastos y 2 de espadas. Se saca una carta de M_1 y se mete en M_2 . A continuación se saca una carta de M_2 . Calcula la probabilidad de que:

- Salga una carta deoros.
- Salga una carta de espadas.
- Salga una carta deoros después de meter una de bastos.
- Salga una carta de bastos después de meter una deoros.

O_i = «Sacar oros de M_i »

C_i = «Sacar copas de M_i »

B_i = «Sacar bastos de M_i »

S_i = «Sacar espadas de M_i »

$$\text{a) } P(B_1 \cap O_2) = \frac{6}{11} \cdot \frac{7}{13} = \frac{42}{143} = 0,2937$$

$$P(O_1 \cap O_2) = \frac{5}{11} \cdot \frac{8}{13} = \frac{40}{143} = 0,2797$$

$$P(O) = \frac{40}{143} + \frac{42}{143} = \frac{82}{143} = 0,5734$$

$$\text{b) } P(B_1 \cap S_2) = \frac{6}{11} \cdot \frac{2}{13} = \frac{12}{143} = 0,0839$$

$$P(O_1 \cap S_2) = \frac{5}{11} \cdot \frac{2}{13} = \frac{10}{143} = 0,0699$$

$$P(S) = \frac{10}{143} + \frac{12}{143} = \frac{22}{143} = 0,1538$$

$$\text{c) } P(B_1 \cap O_2) = \frac{6}{11} \cdot \frac{7}{13} = \frac{42}{143} = 0,2937$$

$$P(O_2/B_1) = \frac{\frac{42}{143}}{\frac{6}{11}} = \frac{7}{13} = 0,5385$$

$$\text{d) } P(O_1 \cap B_2) = \frac{5}{11} \cdot \frac{3}{13} = \frac{15}{143} = 0,1049$$

$$P(B_2/O_1) = \frac{\frac{15}{143}}{\frac{5}{11}} = \frac{3}{13} = 0,2308$$

104 Se tienen dos cajas. En la caja C_1 hay 9 fichas rojas y 5 fichas negras. En la caja C_2 hay 6 fichas rojas, 3 fichas negras y 2 blancas. Se lanzan dos monedas al aire. Si salen dos caras, se saca una ficha de C_1 ; si no, se saca de C_2 . Calcula la probabilidad de que:

- La ficha sea roja.
- La ficha sea blanca.
- Salieran dos caras al lanzar las monedas, sabiendo que la ficha que ha salido es negra.

A = «Sacar dos caras»

R = «Sacar una ficha roja»

B = «Sacar una ficha blanca»

N = «Sacar una ficha negra»

$$\text{a) } P(R) = P(A) \cdot P(R/A) + P(\bar{A}) \cdot P(R/\bar{A}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{14} + \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{11} = \frac{351}{616} = 0,5698$$

$$\text{b) } P(B) = P(A) \cdot P(B/A) + P(\bar{A}) \cdot P(B/\bar{A}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{0}{14} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{11} = \frac{3}{22} = 0,13\hat{6}$$

$$\text{c) } P(N) = P(A) \cdot P(N/A) + P(\bar{A}) \cdot P(N/\bar{A}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{14} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{11} = \frac{181}{616} = 0,2938$$

$$P(A/N) = \frac{P(A) \cdot P(N/A)}{P(N)} = \frac{\frac{5}{56}}{\frac{181}{616}} = \frac{55}{181} = 0,3039$$

- 105 En la caja C_1 hay un dado de cuatro caras, en la caja C_2 hay un dado cúbico y en la caja C_3 hay un dado de ocho caras. Se elige al azar una de las cajas y se lanza el dado que contiene. Calcula la probabilidad de que:

- Salga un 4.
- Salga un número par.
- Salga un número mayor que 5.
- El dado sea de la caja C_1 , sabiendo que ha salido un 4.
- El dado sea de la caja C_2 , sabiendo que ha salido un 6.

C_1 = «Elegir la caja 1»

C_2 = «Elegir la caja 2»

C_3 = «Elegir la caja 3»

D_4 = «Sacar un 4»

P = «Sacar un número par»

D_5 = «Sacar un número mayor que 5»

D_6 = «Sacar un 6»

$$\begin{aligned} \text{a) } P(D_4) &= P(C_1) \cdot P(D_4/C_1) + \\ &\quad + P(C_2) \cdot P(D_4/C_2) + \\ &\quad + P(C_3) \cdot P(D_4/C_3) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} = \\ &= \frac{13}{72} = 0,1806 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(P) &= P(C_1) \cdot P(P/C_1) + P(C_2) \cdot P(P/C_2) + \\ &\quad + P(C_3) \cdot P(P/C_3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} + \\ &\quad + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } P(D_5) &= P(C_1) \cdot P(D_5/C_1) + \\ &\quad + P(C_2) \cdot P(D_5/C_2) + \\ &\quad + P(C_3) \cdot P(D_5/C_3) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{0}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} = \\ &= \frac{13}{72} = 0,1806 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } P(D_4) &= P(C_1) \cdot P(D_4/C_1) + \\ &\quad + P(C_2) \cdot P(D_4/C_2) + \\ &\quad + P(C_3) \cdot P(D_4/C_3) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} = \\ &= \frac{13}{72} = 0,1806 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(C_1/D_4) &= \frac{P(C_1) \cdot P(D_4/C_1)}{P(D_4)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{13}{72}} = \\ &= \frac{6}{13} = 0,4615 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } P(D_6) &= P(C_1) \cdot P(D_6/C_1) + \\ &\quad + P(C_2) \cdot P(D_6/C_2) + \\ &\quad + P(C_3) \cdot P(D_6/C_3) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{0}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} = \\ &= \frac{7}{72} = 0,0972 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(C_2/D_6) &= \frac{P(C_2) \cdot P(D_6/C_2)}{P(D_6)} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{7}{72}} = \\ &= \frac{4}{7} = 0,5714 \end{aligned}$$

- 106 En la urna U_1 hay 4 bolas rojas y 5 negras, y en la urna U_2 hay 6 bolas rojas y 3 negras. Se saca una bola de U_1 y se mete en U_2 . Se saca entonces al azar una bola de U_2 . Calcula la probabilidad de que:

- Salga una bola roja.
- Salga una bola negra después de haber sacado una roja en la primera urna.
- La bola extraída de U_1 sea negra, sabiendo que la que ha salido de la urna U_2 también es negra.

R_i = «Sacar una bola roja de U_i »

N_i = «Sacar una bola negra de U_i »

$$\begin{aligned} \text{a) } P(R) &= P(R_1) \cdot P(R/R_1) + P(N_1) \cdot P(R/N_1) = \\ &= \frac{4}{9} \cdot \frac{7}{10} + \frac{5}{9} \cdot \frac{6}{10} = \frac{29}{45} = 0,64 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(N \cap R) &= P(R) \cdot P(N/R) \rightarrow P(N/R) = \\ &= \frac{P(N \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{12}{90}}{\frac{4}{9}} = \frac{3}{10} = 0,3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } P(N) &= P(R_1) \cdot P(N/R_1) + P(N_1) \cdot P(N/N_1) = \\ &= \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{10} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{10} = \frac{16}{45} = 0,3\bar{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(N_1/N) &= \frac{P(N_1) \cdot P(N/N_1)}{P(N)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{16}{45}} = \\ &= \frac{5}{8} = 0,625 \end{aligned}$$

107 Se tienen tres bolsas, B_1 , B_2 y B_3 .

... Su contenido es el siguiente.

B_1 : 4 bolas blancas y 3 negras.

B_2 : 2 bolas blancas y 5 negras.

B_3 : 5 bolas blancas y 4 negras.

Se lanza un dado. Si sale 1, 2 o 3, se extrae una bola de B_1 ; si sale 4 o 5, se extrae de B_2 ; si sale 6, se extrae de B_3 . Sabiendo que la bola extraída es blanca, calcula la probabilidad de que sea de la bolsa B_2 .

B_1 = «Elegir la bolsa 1»

B_2 = «Elegir la bolsa 2»

B_3 = «Elegir la bolsa 3»

A = «Sacar una bola blanca»

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1) \cdot P(A/B_1) + \\ &\quad + P(B_2) \cdot P(A/B_2) + P(B_3) \cdot P(A/B_3) = \\ &= \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{7} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{7} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{9} = \frac{179}{378} = \\ &= 0,4735 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B_2/A) &= \frac{P(B_2) \cdot P(A/B_2)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{179}{378}} = \\ &= \frac{36}{179} = 0,2011 \end{aligned}$$

108 Un cine tiene tres salas de proyección.

... En la sala A están proyectando una película y hay 240 espectadores.

En la sala B hay 180 butacas ocupadas y en la sala C hay 80 personas. Se sabe que la película de la sala A agrada al 40% de los espectadores, mientras que las películas de las otras salas tienen un 50% y un 90% de aceptación.

A la salida de las tres películas se elige un espectador al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la película le haya gustado?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que le haya gustado si ha estado en la sala C?

c) ¿Y cuál es la probabilidad de que salga de la sala C si sabemos que la película le ha gustado?

G = «Gustarle la película»

C = «Ver la película en la sala C»

$$\begin{aligned} \text{a) } P(G) &= P(A) \cdot P(G/A) + P(B) \cdot P(G/B) + \\ &\quad + P(C) \cdot P(G/C) = \frac{240}{500} \cdot \frac{40}{100} + \\ &\quad + \frac{180}{500} \cdot \frac{50}{100} + \frac{80}{500} \cdot \frac{90}{100} = \\ &= \frac{129}{250} \end{aligned}$$

$$\text{b) } P(G/C) = \frac{9}{10}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } P(C/G) &= \\ &= \frac{P(C) \cdot P(G/C)}{P(A) \cdot P(G/A) + P(B) \cdot P(G/B) + P(C) \cdot P(G/C)} = \\ &= \frac{\frac{80}{500} \cdot \frac{90}{100}}{\frac{129}{250}} = \frac{36}{129} \end{aligned}$$

109 MATEMÁTICAS Y...

... **GLOBALIZACIÓN.** En el mundo actual cada vez es mayor la interconexión entre los países en todos los ámbitos humanos. Aunque no está exenta de riesgos, en general es beneficiosa para todos. A nivel industrial optimiza la producción, distribución y venta de productos. Por ejemplo, una empresa puede fabricar el 60% de los productos en Portugal; el 30% en España y el resto, en Andorra. Intentando mantener la calidad, el 1% de los productos de Portugal sale defectuoso, en España y Andorra esos porcentajes son del 0,5 y el 3% respectivamente.

a) Determina la probabilidad de que un producto resulte defectuoso.

b) Si compramos un producto y resulta defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de Andorra?

- c) Halla la probabilidad de que un producto venga de España y no esté defectuoso.
- d) Si compramos un producto que no está defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de Portugal?

D = «Ser defectuoso»

A = «Proceder de Andorra»

S = «Proceder de España»

L = «Proceder de Portugal»

- a) $P(D) = 0,6 \cdot 0,01 + 0,3 \cdot 0,005 + 0,1 \cdot 0,03 = 0,0105$
- b) $P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0,1 \cdot 0,03}{0,0105} = 0,286$
- c) $P(S \cap \bar{D}) = 0,3 \cdot 0,995 = 0,2985$
- d) $P(L/\bar{D}) = \frac{P(L \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{0,6 \cdot 0,99}{1 - 0,0105} = 0,6$

110 MATEMÁTICAS Y... POLÍTICA.

En política los sondeos son fundamentales en la toma de decisiones. Por ejemplo, si en un sondeo el 60% de los adultos es votante del partido QW y el resto vota al partido SZ. Además, el 35% de los votantes de QW está a favor de una propuesta, mientras que el 90% de los votantes de SZ también está dispuesto a apoyarla.

- a) Si se realiza la votación, ¿cuál es la probabilidad de que la propuesta del referéndum sea aprobada?
- b) Elegimos al azar un votante de los que votaron afirmativamente. ¿Cuál es la probabilidad de que esta persona sea votante de QW?

A = «Ser aprobada»

QW = «Ser votante de QW»

SZ = «Ser votante de SZ»

- a) $P(A) = P(QW) \cdot P(A/QW) + P(SZ) \cdot P(A/SZ) = 0,6 \cdot 0,35 + 0,4 \cdot 0,9 = 0,57$
- b) $P(QW/A) = \frac{P(QW) \cdot P(A/QW)}{P(QW) \cdot P(A/QW) + P(SZ) \cdot P(A/SZ)} = \frac{0,6 \cdot 0,35}{0,57} = 0,37$

- 111 ¿Cuál es la probabilidad de tener 14 aciertos en una quiniela de fútbol compuesta por 14 partidos? ¿Y de tener 13 aciertos?

$$P(\text{«Tener 14 aciertos»}) = \frac{1}{3^{14}} = 0,00000021$$

$$P(\text{«Tener 13 aciertos»}) = 14 \cdot \frac{1}{3^{13}} \cdot \frac{2}{3} = 0,0000059$$

- 112 Las guardias en un hospital son tres días a la semana.

- a) Calcula la probabilidad de que un médico haga guardia el lunes, el martes y el miércoles.
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que libre el fin de semana?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que esté de guardia tres días alternos? Es decir, con un día de descanso entre las guardias.

a) $P(\text{«Hacer guardia L, M y X»}) = \frac{1}{C_{7,3}} = \frac{1}{35}$

b) $P(\text{«No hacer guardia S y D»}) = 1 - P(\text{«Hacer guardia S, D y otro día de la semana»}) = 1 - \frac{5}{35} = \frac{6}{7}$

c) $P(\text{«Hacer guardia L, X y V»}) + P(\text{«Hacer guardia M, J y S»}) + P(\text{«Hacer guardia X, V y D»}) = \frac{2}{7}$

113 MATEMÁTICAS Y... BIOLOGÍA.

Los estudios sobre las especies piscícolas son imprescindibles para la repoblación y su control. El 1% de los ejemplares de una variedad europea de pez no tiene aleta dorsal. Ese defecto está presente en el 3% de los peces de la variedad africana. En un criadero de peces, el 80% de sus ejemplares es de procedencia europea y el resto africana.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que un pez del criadero no tenga aleta dorsal?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que un pez que no tiene aleta dorsal sea de la variedad africana?

- c) ¿Cuál es la probabilidad de que un pez del criadero con aleta dorsal sea de la variedad europea?
- d) Si el criadero tiene aproximadamente dos millones de peces, ¿cuántos no tendrán aleta dorsal?

D = «Tener aleta dorsal»

A = «Ser africano»

B = «Ser europeo»

$$a) P(\bar{D}) = P(B) \cdot P(\bar{D}/B) + P(A) \cdot P(\bar{D}/A) = 0,8 \cdot 0,01 + 0,2 \cdot 0,03 = 0,014$$

$$b) P(A/\bar{D}) = \frac{P(\bar{D} \cap A)}{P(\bar{D})} = \frac{0,2 \cdot 0,03}{0,014} = 0,428$$

$$c) P(B/D) = \frac{P(D \cap B)}{P(D)} = \frac{0,8 \cdot 0,99}{1 - 0,014} = 0,803$$

$$d) 0,014 \cdot 2\,000\,000 = 28\,000$$

No tendrán aleta dorsal 28 000 ejemplares.

- 114** Averigua la relación que deben cumplir x , y , z y t para que A y P sean sucesos independientes.

	A	B
P	x	y
Q	z	t

	A	B	
P	x	y	$x + y$
Q	z	t	$z + t$
	$x + z$	$y + t$	$x + y + z + t$

Si A y P son independientes, entonces:

$$P(A \cap P) = P(A) \cdot P(P)$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \frac{x}{x + y + z + t} = \\ &= \frac{x + z}{x + y + z + t} \cdot \frac{x + y}{x + y + z + t} \\ &\rightarrow x^2 + xy + xz + xt = \\ &= x^2 + xy + xz + yz \rightarrow xt = yz \end{aligned}$$

- 115** En un juego se lanza una moneda al aire y si sale cara, pierde un punto Beatriz

y lo gana Jesús, y si sale cruz, ocurre lo contrario. Entre ambos acuerdan que solo se puede jugar si se dispone de puntos para perder.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que Jesús tenga que dejar de jugar al tercer lanzamiento?
- b) ¿Y cuál es la probabilidad de que, tras lanzar la moneda cuatro veces, Jesús tenga solo un punto?

Suponemos que el juego es equitativo, es decir, que Beatriz y Jesús parten con un mismo número de puntos.

- a) Queremos calcular la probabilidad de que Jesús pierda todos sus puntos al tercer lanzamiento.

Esto quiere decir que debe tener 1 punto después del segundo lanzamiento y que salga cruz en el tercero.

Como tras el segundo lanzamiento tiene 1 punto, la única posibilidad es que tras el primer lanzamiento tenga 2 puntos, es decir, en el segundo lanzamiento debe salir cruz.

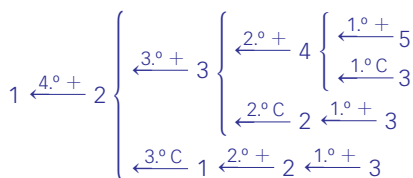
Si tras el primer lanzamiento tiene 2 puntos, necesariamente ha de tener 1 o 3 puntos al comenzar a jugar, pero no puede tener 1 punto, ya que esto significaría que el juego acaba en la primera tirada, pues Jesús o Beatriz se quedarían sin puntos para jugar.

Por tanto, la única opción válida para que Jesús termine de jugar en el tercer lanzamiento es que haya partido con tres puntos y que salgan 3 cruces seguidas.

$$P(+++) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Si al comienzo de la partida, tuvieran un número de puntos distinto de 3, la probabilidad de que Jesús pierda al tercer lanzamiento es cero.

- b) Con un razonamiento análogo al anterior, que podemos resumir en el siguiente cuadro, comprobamos que las únicas opciones válidas para que Jesús tenga 1 punto tras la cuarta tirada es que haya comenzado con 3 puntos o con 5 puntos.



Si ha comenzado con 3 puntos:

$$P(\text{«Acabar con 1 punto»}) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$$

Y si ha comenzado con 5 puntos:

$$P(\text{«Acabar con 1 punto»}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

- 116** Lanzamos tres dados al aire. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números aparecidos en dos de ellos coincida con el del otro dado?

El espacio muestral tiene $6^3 = 216$ elementos.

De ellos, solamente cumplen la condición los 15 siguientes: (1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 3, 4), (1, 4, 5), (1, 5, 6), (2, 1, 3), (2, 2, 4), (2, 3, 5), (2, 4, 6), (3, 1, 4), (3, 2, 5), (3, 3, 6), (4, 1, 5), (4, 2, 6), (5, 1, 6).

$$P(A) = \frac{15}{216} = \frac{5}{72} = 0,07$$

- 117 INVESTIGA.** En la ecuación de segundo grado $x^2 + ax + b = 0$, los coeficientes, a y b , son los posibles resultados al lanzar dos dados.

Calcula la probabilidad de que la ecuación no tenga solución real.

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

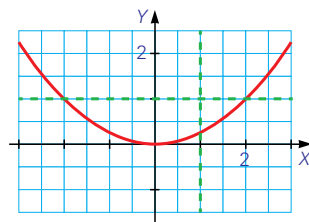
La ecuación de segundo grado no tiene solución si el discriminante es negativo:

$$\Delta = a^2 - 4b < 0 \rightarrow a^2 < 4b \rightarrow \rightarrow P(\text{«No tener solución»}) = \frac{17}{36}$$

- 118 RETO.** En la ecuación de segundo grado $x^2 + ax + b = 0$, los coeficientes, a y b , son dos números reales escogidos al azar en el intervalo $[0, 1]$. Calcula la probabilidad de que tenga dos soluciones reales distintas.

La ecuación de segundo grado tiene 2 soluciones distintas si

$$\Delta = a^2 - 4b > 0 \rightarrow a^2 > 4b$$



$$\begin{aligned} \text{Área bajo la curva} &= \int_0^1 \frac{x^2}{4} dx = \left[\frac{x^3}{12} \right]_0^1 = \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{«Tener dos soluciones distintas»}) &= \\ &= \frac{\text{Área favorable}}{\text{Área posible}} = \frac{\frac{1}{12}}{1} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

- 119** Calcula.

- ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentren dos amigos y hayan nacido el mismo día de la semana?
- Y si se encuentran tres amigos, ¿cuál es la probabilidad de que haya, por lo menos, dos amigos que nacieran el mismo día de la semana?
- ¿Cuántos amigos han de juntarse para poder asegurar, con más del 50% de probabilidad, que haya dos amigos, al menos, que nacieran el mismo día de la semana?

$S = \text{«Haber nacido un día de la semana concreto»}$

$$a) 7 \cdot P(S \cap S) = 7 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{7} = 0,14$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(\text{«Al menos dos nacieron el mismo día»}) &= \\ &= P(\text{«Dos nacieron el mismo día»}) + \\ &\quad + P(\text{«Tres nacieron el mismo día»}) = \\ &= 3 \cdot 7 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{6}{7} + 7 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} = \\ &= \frac{19}{49} = 0,39 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } P(\text{«Al menos dos nacieron el mismo día»}) &= \\ &= 1 - P(\text{«Todos nacieron en distinto día»}) = \\ &= 1 - 7 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{223}{343} = 0,65 \end{aligned}$$

120 RETO. Considerando que un año tiene 365 días, ¿cuál es el mínimo número de personas necesarias para que la probabilidad de que al menos dos de ellas cumplan años el mismo día sea superior al 50%?

Si estudiamos un grupo de n personas, el número de casos posibles es 365^n .

$$P(\text{«}n\text{ personas no cumplen años el mismo día»}) = \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}$$

$$\begin{aligned} P(\text{«Al menos dos personas del grupo de } n \text{ personas cumplen años el mismo día»}) &= \\ &= 1 - P(\text{«}n\text{ personas no cumplen años el mismo día»}) = \end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}$$

n	5	10	15	20	25
Probabilidad	0,027	0,12	0,25	0,41	0,57

Buscamos el primer número n cuya probabilidad supere 0,5.

n	20	21	22	23
Probabilidad	0,41	0,44	0,47	0,51

El mínimo número de personas es 23.

FAKE NEWS

¡Imposible que vuelva a caer!

Alrededor de tres cuartas partes de la población adulta compra la lotería del sorteo de Navidad.

El número preferido por la gente que compra lotería es el terminado en 5, ya que el Gordo ha terminado en este número 27 veces en los pocos más de 200 años que se lleva jugando.

Desde luego, si quieres que te toque el Gordo, no debes coger números que terminen en 09, 10, 21, 25, 31, 34, 41, 42, 43, 51, 54, 59, 67, 78 y 82, ya que nunca han caído.



Así como, por supuesto, nadie volvería a comprar el mismo número en que cayó el año anterior, pues este número ya ha tocado.

Y tú, ¿qué opinas?

Es falso, ya que la probabilidad de que salga un número es la misma cada año, no influye que el número ya fuera premiado otro año.

PROBLEMAS APARENTEMENTE DISTINTOS

121 Calcula.

- $V_{10,2}$
- $C_{10,5}$
- P_5
- Las variaciones con repetición de 10 elementos tomados de tres en tres.

$$\text{a) } V_{10,2} = \frac{10!}{8!} = 90$$

$$\text{b) } C_{10,5} = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = 252$$

$$\text{c) } P_5 = 5! = 120$$

$$\text{d) } VR_{10,3} = 10^3 = 1000$$

122 Un equipo de baloncesto se compone de 10 jugadores.

- ¿De cuántas formas se puede elegir un delegado y un subdelegado?
- ¿De cuántas maneras se puede elegir al quinteto inicial?

- c) ¿De cuántas maneras se puede rotar a los cinco jugadores iniciales, de forma que entren a jugar los otros cinco?
- d) ¿Cómo se pueden repartir las 3 primeras faltas personales?

a) $V_{10,2} = \frac{10!}{8!} = 90$ formas diferentes de elegir delegado y subdelegado.

b) $C_{10,5} = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = 252$ formas de elegir al quinteto inicial.

c) $P_5 = 5! = 120$ formas diferentes de rotar.

d) $VR_{10,3} = 10^3 = 1\,000$ maneras diferentes.

- 123** En un experimento aleatorio, se tiene que $P(A) = 0,4$; $P(A \cap B) = 0,1$ y $P(B) = 0,5$. Calcula.

a) $P(A \cap \bar{B})$

c) $P(\overline{A \cup B})$

b) $P(B \cap \bar{A})$

d) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$

a) $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,4 - 0,1 = 0,3$

b) $P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B) = 0,5 - 0,1 = 0,4$

c) $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - 0,4 - 0,5 + 0,1 = 0,2$

d) $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,1 = 0,9$

- 124** De las personas que van a un restaurante un determinado día, el 40% pidió ensalada de primer plato y el 50% pidió pescado de segundo.

Si solo el 10% pidió ensalada y pescado, contesta.

- a) ¿Qué porcentaje pidió ensalada, pero no pescado?
- b) ¿Qué porcentaje pidió pescado, pero no ensalada?
- c) ¿Qué porcentaje no pidió ni ensalada ni pescado?
- d) ¿Qué porcentaje no pidió las dos cosas a la vez?



$A = \text{«Pedir ensalada»}$

$B = \text{«Pedir pescado»}$

a) $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,4 - 0,1 = 0,3$

El 30% pidió ensalada pero no pescado.

b) $P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B) = 0,5 - 0,1 = 0,4$

El 40% pidió pescado pero no ensalada.

c) $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - 0,4 - 0,5 + 0,1 = 0,2$

El 20% no pidió ensalada ni pescado.

d) $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,1 = 0,9$

El 90% no pidió las dos cosas a la vez.

- 125** En un experimento aleatorio se tienen los sucesos A y B con las siguientes probabilidades: $P(A) = 0,000043$, $P(B) = 0,831$ y $P(B/A) = 0,72$. Calcula:

a) $P(A \cap B)$

c) $P(A/B)$

b) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

d) $P(A/\bar{B})$

a) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = 0,000043 \cdot 0,72 = 0,00003096$

b) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - (0,000043 + 0,831 - 0,00003096) = 0,169$

c) $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,00003096}{0,831} = 0,0000373$

d) $P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{0,000043 - 0,00003096}{1 - 0,831} = 0,0000712$

- 126** En un determinado día, en un hospital de Cantabria, el 72% de los hospitalizados por COVID-19 estaba vacunado. En ese momento, el 83,1% de la población de

Cantabria estaba vacunada y el 0,0043% estaba en el hospital. Elegida una persona de Cantabria al azar:

- ¿Cuál es la probabilidad de que esté hospitalizada por COVID-19 y esté vacunada?
- ¿Cuál es la probabilidad de que no esté en el hospital por COVID-19 y no esté vacunada?
- ¿Y de que esté hospitalizada por COVID-19 si está vacunada?
- ¿Y de que esté hospitalizada por COVID-19 si no está vacunada?

A = «Estar hospitalizada por COVID-19»

B = «Estar vacunada»

- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = 0,000043 \cdot 0,72 = 0,00003096$
- $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - (0,000043 + 0,831 - 0,00003096) = 0,169$
- $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,00003096}{0,831} = 0,0000373$
- $P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{0,000043 - 0,00003096}{1 - 0,831} = 0,0000712$

¿PARA QUÉ SIRVE?...

- ¿Cuál es el aporte de los italianos al dominó?
Introdujeron en Europa la versión de 28 fichas.
- ¿Se puede decir que el dominó es un juego de probabilidades? Razona tu respuesta.
Sí, ya que las fichas se escogen al azar y la elección de ellas marca el desarrollo del juego.

- Si las puntuaciones fueran desde cero hasta tres, ¿cuántas fichas serían necesarias?

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} + 4 = 10$$

Se necesitarían 10 fichas.

- Calcula la probabilidad de que se obtenga la blanca doble cuando se elige al azar una ficha de dominó.

Como en total hay 28 fichas y de la blanca doble solo hay una, entonces la probabilidad es $\frac{1}{28} = 0,0357$.

- Se escoge al azar una ficha de dominó, calcula la probabilidad de que la suma de sus puntos sea mayor que 6.

En una tabla representamos todas las fichas disponibles y marcamos las que la suma de sus puntos sea mayor que seis:

(0, 0)						
(0, 1)	(1, 1)					
(0, 2)	(1, 2)	(2, 2)				
(0, 3)	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)			
(0, 4)	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)		
(0, 5)	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	
(0, 6)	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)

En total son 12; por tanto, la probabilidad es $\frac{12}{28} = 0,4286$.

- Escogida una ficha de dominó, calcula la probabilidad de que esta ficha tenga un 3 sabiendo que la suma total de sus puntos es mayor que 6.

A = «La suma de los puntos es mayor que 6»

B = «Tener un tres»

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{28}}{\frac{12}{28}} = \frac{1}{4} = 0,25$$

La probabilidad es $\frac{1}{4} = 0,25$, es decir, un 25%.