

1. VARIABLE ALEATORIA DISCRETA - DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Una variable aleatoria X sigue una **distribución binomial** si cumple:

1) Estudiamos un experimento compuesto por **n experimentos independientes** entre sí.

2) El resultado de cada experimento elemental ha de admitir sólo dos categorías, a las que se denomina **éxito y fracaso**.

El valor de ambas posibilidades ha de ser constante en todos los experimentos, y se denotan como **p y q** respectivamente, o p y $1-p$ de forma alternativa.

3) Se designa por **X a la variable que mide el número de éxitos** que se han producido en los n experimentos.

Cuando se dan estas circunstancias, se dice que la variable X sigue una distribución de probabilidad binomial, y se denota $X \sim B(n, p)$.

La función de probabilidad de la binomial es: $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ donde $q = 1-p$

Siendo $\binom{n}{k}$ un número combinatorio: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Media:
$$\mu = \sum_{k=0}^n k \cdot P(X=k) = \sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = n \cdot p$$

Varianza: $\sigma^2 = \sum_{k=0}^n k^2 \cdot P(X=k) - \mu^2 = n \cdot p \cdot q$ **Desviación típica:** $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

2.1. DISTRIBUCIÓN BINOMIAL - EJERCICIO MODELO:

Ejercicio: La probabilidad de ganar un sorteo es $1/3$. Suponiendo que se van a jugar cuatro sorteos:

- Describe la variable aleatoria que cuenta el número de sorteos ganados. Justifica si se trata o no de una variable binomial.
- Haz la tabla de la función de probabilidad.
- Calcula la media y la varianza de esta variable.
- Probabilidad de que gane la mitad de los sorteos.
- Probabilidad de que gane más de la mitad de los sorteos.
- Probabilidad de que gane algún sorteo.
- Probabilidad de que pierda a lo sumo 1 sorteo

SOLUCIÓN:

a) Describe la variable aleatoria que cuenta el número de sorteos ganados. Justifica si se trata o no de una variable binomial:

$X = n.º$ de sorteos ganados X sigue una distribución binomial con $n = 4$ y $p = 1/3$ porque son 4 experimentos aleatorios independientes e iguales con dos únicos resultados posibles “ganar” o “perder”: $X \sim B(4, 1/3)$

b) Haz la tabla de la función de probabilidad

k (n.º de sorteos ganados)	P(X=k)
0	$P(X=0)=\binom{4}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^{4-0}=\frac{16}{81}$
1	$P(X=1)=\binom{4}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^{4-1}=\frac{32}{81}$
2	$P(X=2)=\binom{4}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{4-2}=\frac{24}{81}$
3	$P(X=3)=\binom{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^{4-3}=\frac{8}{81}$
4	$P(X=4)=\binom{4}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^{4-4}=\frac{1}{81}$

La suma de todas las probabilidades es 1.

c) Calcula a partir de la tabla la media y la varianza de esta variable:

Media: $\mu = n \cdot p = 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

Varianza: $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q = \frac{8}{3} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{24}{9} - \frac{16}{9} = \frac{8}{9}$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

d) Probabilidad de que gane la mitad de los sorteos:

$$P(X=2)=\binom{4}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{4-2}=\frac{24}{81}=0,2963$$

e) Probabilidad de que gane más de la mitad de los sorteos:

$$P(X>2)=P(X=3)+P(X=4)=\binom{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^{4-3}+\binom{4}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^{4-4}=\frac{9}{81}=\frac{1}{9}=0,1111$$

f) Probabilidad de que gane algún sorteo:

$$P(X>0)=1-P(X=0)=1-\binom{4}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^{4-0}=1-\frac{16}{81}=\frac{65}{81}=0,8025$$

g) Probabilidad de que pierda a lo sumo 1 sorteo

Podemos definir la variable aleatoria Y = n.º de sorteos perdidos $Y \sim B(4, \frac{2}{3})$

$$P(Y \leq 1)=P(Y=0)+P(X=1)=\binom{4}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^{4-0}+\binom{4}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^{4-1}=\frac{1}{81}+\frac{8}{81}=\frac{1}{9}=0,1111$$