

ABAU GALICIA EXTRAORDINARIA 2021

1.- El peso de las naranjas para zumo recolectadas por un productor es una variable aleatoria que se distribuye normalmente con una media de $\mu = 200$ gramos y una desviación típica de $\sigma = 50$ gramos.

a) Si tomamos una muestra aleatoria de $n = 25$ naranjas, ¿cuál es la probabilidad de que su peso medio está comprendido entre 175 y 215 gramos?

*b) ¿De qué tamaño se ha tomado otra muestra aleatoria si la probabilidad de que el peso medio sea inferior a 210 gramos es del 97,72%?

Solución: a) 0,9270 b) 100 naranjas

2.- Tomamos una muestra aleatoria de 36 facturas de consumo mensual de luz (en euros) y el intervalo de confianza obtenido al 95% para el consumo mensual medio es [60,1; 69,9]. Según esta información:

a) ¿Cuál fue el consumo medio muestral de luz?

b) ¿Cuál es el error máximo cometido?

*c) Determine un intervalo de confianza al 90% para el consumo medio de luz

Solución: a) 65€ b) 4,9€ c) (60,89; 69,11)

3.- Se estima que el tiempo de reacción de un conductor ante un obstáculo imprevisto tiene una distribución normal con desviación típica de 0,05 segundos. Si se quiere conseguir que el error de estimación de la media no supere los 0,01 segundos, con un nivel de confianza del 98%, ¿qué tamaño mínimo ha de tener la muestra de tiempo de reacción?

Solución: 136 conductores

4.- En una encuesta realizada a 800 personas elegidas al azar del censo electoral, 240 declararon no tener dinero para unas vacaciones.

a) Estima con un nivel de confianza del 95,45% entre qué valores se encuentra la proporción de personas en todo el censo que no tienen dinero para unas vacaciones.

*b) Discute razonadamente el efecto que tendría sobre el intervalo de confianza el aumento o la disminución del nivel de confianza.

Solución: a) (0,2676; 0,3324)

5. Se quiere hacer un estudio sobre la proporción de ciudadanos que acuden al teatro con regularidad.

*a) Calcula el número mínimo de ciudadanos que deben entrevistarse para que el error sea del 0,1 con un nivel de confianza del 95%.

(Al ser la proporción poblacional desconocida utiliza el principio de máxima incertidumbre: $p=0,5$)

b) Finalmente se ha realizado una encuesta a 225 ciudadanos obteniendo que la proporción de ciudadanos que van al teatro regularmente está entre el 54,7% y el 65,3%, ¿cuántos

ciudadanos han contestado afirmativamente? ¿cuál es el error cometido? ¿cuál es el nivel de confianza utilizado en el cálculo de este intervalo?

Solución: a) 97 ciudadanos b) 135 ciudadanos contestaron afirmativamente / error es del 5,3% / El nivel de confianza es del 89,48%

PAU MADRID EXAMEN MODELO 2025 MATEMÁTICAS APLICADAS

6. Una comunidad autónoma española quiere evaluar el nivel de compromiso con el reciclaje de sus ciudadanos y ciudadanas. Para ello, se realiza un estudio en dos municipios seleccionados al azar.

MUNICIPIO 1

En el primer municipio, la proporción de personas comprometidas con el reciclaje es de $p=0,7$. Se toma una muestra aleatoria simple de 600 personas de dicho municipio:

*a) Determine el número esperado de personas en la muestra elegida que **no** estarán comprometidas con prácticas de reciclaje.

*b) Mediante la aproximación por una normal, calcule la probabilidad de que el número de personas comprometidas con el reciclaje esté entre 408 y 432 , ambos inclusive.

MUNICIPIO 2

c) Se tomó una muestra aleatoria simple de 450 personas de las cuales 351 se declaran comprometidas con prácticas de reciclaje. Obtenga un intervalo de confianza del 90% para la proporción de personas del segundo municipio comprometidas con prácticas de reciclaje.

d) Asumiendo que la proporción poblacional de los comprometidos con el reciclaje en este segundo municipio es $p=0,8$, determina el tamaño mínimo necesario de una muestra de personas para garantizar, con un nivel de confianza del 95%, que el margen de error en la estimación no supere el 3%.

Solución: a) 180 personas b) 0,733 c) (0,7479; 0,8121) d) 683 personas

*7.- El 85% de las personas que tienen redes sociales tienen cuenta de Instagram.

a) Si se toma una muestra de 150 personas, ¿cuál es la probabilidad de que haya más de 140 personas que tengan una cuenta en Instagram?

b) Si el tamaño muestral es el doble, ¿la probabilidad de que haya más de 280 personas que tengan una cuenta en Instagram es la misma?

Solución: a) 0,0015 b) No, es aproximadamente 0. (Hecho por binomial con corrección)

a) 0,0021 b) No, es aproximadamente 0. (Hecho por proporción)

REPASA LOS PROBLEMAS DE CONTEXTO PROPUESTOS POR CIUG:

A partir de datos obtidos con máis de 100.000 traballadores, estableceuse que o tempo medio en España da duración do traxecto dende o domicilio ata o posto de traballo é de 36 minutos. Aínda que algunhas persoas aproveitan ditos desprazamentos para escoitar música ou ler, a maioría da poboación considera ditos desprazamentos como unha perda de tempo. Aqueles que empregan medios de transporte privados teñen maior probabilidade de sufrir un accidente, ademais de contribuír ao aumento da contaminación.

Os responsables dunha gran empresa fixeron un estudo sobre os modos de desprazamento dos seus traballadores, chegando á conclusión de que o 60% empregaban medios propios e o 40% restante fan os seus desprazamentos ao traballo en medios de transporte públicos. Para analizar se hai diferencias entre os tempos de desprazamento ata o traballo entre os dous grupos, se elixiron 100 persoas ao azar de cada un deles, medindo os seus tempos de desprazamento. Pódese supoñer que ditos tempos teñen distribución normal coa mesma varianza para os dous grupos. O intervalo de confianza, cun nivel de confianza do 95%, para o tempo medio de desprazamento dos que empregaron transporte privado foi (24,06;29,94). Para os que empregaron medios de transporte público, o tempo medio obtido coa mostra de 100 persoas foi de 24 minutos. Responda estes tres apartados:

1. Supoñendo que o tempo medio de desprazamento para os traballadores da empresa que empregan medios propios é de 27 minutos, calcule a probabilidade de que un deses empregados tarde máis de 25 minutos en chegar dende o domicilio ata o lugar de traballo.

2. Supoñendo que o tempo medio de desprazamento do persoal que emprega medios públicos é de 25 minutos, se se elixe ao azar un dos traballadores da empresa, cal é a probabilidade de que empregue máis de 25 minutos en chegar dende o domicilio ata o posto de traballo?

3. Sen realizar o cálculo do correspondente intervalo, indique os motivos polo que os intervalos (19,27) e (22,26) non poderían corresponderse coa estimación por intervalo de confianza, cun nivel de confianza do 99%, do tempo medio de desprazamento daqueles empregados que fan os desprazamentos ao traballo en medios de transporte público. Xustifique as respostas.

Nota: Para resolver algúns dos apartados anteriores poden empregarse algúns dos seguintes valores relacionados coas táboas da normal estándar:

$$P(|Z| < 1,64) = 0,90 ; P(Z > -0,17) = 0,5675 ; P(Z < 0,13) = 0,5517 ; P(Z > 1,96) = 0,025$$

Soluciones Problemas Competenciais. Problema 1**1.1.**

Temos a variable: $X_{MP} =$ "Tempo medio de desprazamento para traballadores que empregan medios propios". $X_{MP} \rightarrow N(27, \sigma)$

Para calcular a probabilidade solicitada, debemos calcular previamente o valor da desviación típica σ . Sabemos polos datos do exercicio que o intervalo de confianza con nivel de confianza do 95% para a media da variable X_{MP} foi (24,06 ; 29,94).

Tendo en conta a expresión do intervalo de confianza con nivel de confianza $1-\alpha$ para a media dunha variable con distribución normal, $\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, podemos igualar dita expresión a (24,06; 29,94).

Como coñecemos $\bar{x} = 27$ que coincide co punto medio do intervalo, $z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96$ e $\sqrt{n} = \sqrt{100} = 10$, temos que $24,06 = 27 - 1,96 \times \frac{\sigma}{10}$.

Despexando obtemos que $\sigma = 12$. Polo tanto, a probabilidade pedida é :

$$P(X_{MP} > 25) = P\left(Z > \frac{25-27}{12}\right) = P(Z > -0,17) = 0,5675.$$

1.2.

Consideremos os seguintes sucesos tendo en conta os medios de transporte empregados polos traballadores para acudir ao traballo:

MP="Empregan medios propios", e

TP="Empregan transporte público".

Sábase que $P(MP) = 0,6$, $P(TP) = 0,4$.

Pídese calcular a probabilidade do seguinte suceso T="Un empregado elixido ao azar tarde máis de 25 minutos en chegar dende o domicilio ata o traballo". Como temos unha partición (ou un sistema completo de sucesos) podemos empregar o Teorema da probabilidade total.

$$P(T) = P(T/MP)P(MP) + P(T/TP)P(TP).$$

Tendo en conta os datos do exercicio, que $P(T/MP) = P(X_{MP} > 25)$ e a simetría da variable con distribución normal (o que significa que $P(T/TP) = 0,5$ por ser a media 25) teríamos substituíndo na expresión anterior o seguinte resultado:

$$P(T) = P(T/MP)P(MP) + P(T/TP)P(TP) = 0,5675 \times 0,6 + 0,5 \times 0,4 = 0,427.$$

1.3.

O primeiro intervalo (19; 27) non podería ser xa que está centrado en 23, e o punto medio tería que coincidir coa estimación da media que foi 24.

O segundo intervalo (22; 26) ten lonxitude igual a 4. Tendo en conta que os datos da desviación típica e o tamaño de mostra coinciden para os dous grupos, como agora o nivel de confianza é maior, a lonxitude do intervalo de confianza para a media do tempo de desprazamento dos que empregan transporte público con nivel de confianza do 99% tería que ser maior que a lonxitude do intervalo proporcionado para media da variable X_{MP} con nivel de confianza do 95%, que foi de 5,88.

Segundo información de diversos estudos, mais de 2.000 millóns de persoas viven no mundo con escaseza de auga, situación que posiblemente empeorará nos vindeiros anos, por diversas causas como o incremento da poboación ou problemas derivados do cambio climático. Calculouse, a partir dunha mostra aleatoria, un intervalo de confianza para o consumo medio de auga por día e por persoa na poboación española cun nivel de confianza do 90%, dito intervalo foi igual a (133,142) litros por día. Nunha certa rexión da costa española tensionada polo turismo quérese comprobar se o aumento de poboación no verán repercute sobre o consumo por persoa e día, xa que se pensa que os turistas non están tan concienciados co aforro de auga como a poboación autóctona. Para iso no mes de Agosto escóllese unha mostra aleatoria de 200 persoas que resultan ter un consumo medio de 145 litros. Considere que o consumo de auga segue unha distribución normal con desviación típica igual a 20 litros.

Responda estes tres apartados:

1. Calcule un intervalo de confianza ao 90% para o consumo medio desa rexión no verán. É acertada a suposición do enunciado sobre o consumo de auga dos turistas?
2. Deséxase afinar o dato do consumo estival, calculando un intervalo de lonxitude máis pequeno, que opcións temos para iso?
3. Se se decide considerar a mesma mostra, pero tomando un nivel de confianza do 92%, cal sería a amplitude do intervalo no que se atoparía o consumo medio de litros de auga por persoa e día no verán?

Nota: Para resolver algúns dos apartados anteriores poden empregarse algúns dos seguintes valores relacionados coas táboas da normal estándar:

$$P(Z > -1,96) = 0,975 ; P(Z > 1,64) = 0,05 ; P(Z > 1,75) = 0,04 ; P(Z < 1,41) = 0,92$$

RECUERDA ESCRIBIR LA SOLUCIÓN CON CONTEXTO

Solucións Problemas Competenciais. Problema 7**7.1.**

Temos a variable: $X = \text{“Consumo de auga na poboación no verán”}$. $X \rightarrow N(\mu, 20)$

A expresión do intervalo de confianza con nivel de confianza $1-\alpha$ para a media dunha variable con distribución normal é $\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

A partir desa expresión, como $\bar{x} = 145$, $n = 200$, $z_{\alpha/2} = z_{0,05} = 1,645$ e $\sigma = 20$ teríamos o seguinte intervalo de confianza

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(145 - 1,645 \times \frac{20}{\sqrt{200}}, 145 + 1,645 \times \frac{20}{\sqrt{200}}\right) = (142,67; 147,33).$$

O intervalo para a media do consumo da poboación española é (133;142), polo que a suposición de que o consumo medio por persoa é maior en verán parece acertada, xa que o intervalo calculado ten extremos superiores a 142 litros.

7.2.

Tendo en conta a expresión do intervalo de confianza con nivel de confianza $1-\alpha$ para a media dunha variable con distribución normal $\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, para ter un intervalo de lonxitude máis pequena, deberíamos diminuír o valor de $z_{\alpha/2}$, é dicir, considerar un menor nivel de confianza ou aumentar o tamaño da mostra n .

7.3.

A amplitude do intervalo de confianza é $2 \times z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Tomando un nivel de confianza do 92%, teríamos que $z_{\alpha/2} = z_{0,04} = 1,75$, polo que temos que dita amplitude é igual a

$$2 \times z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \times 1,75 \times \frac{20}{\sqrt{200}} = 4,95.$$