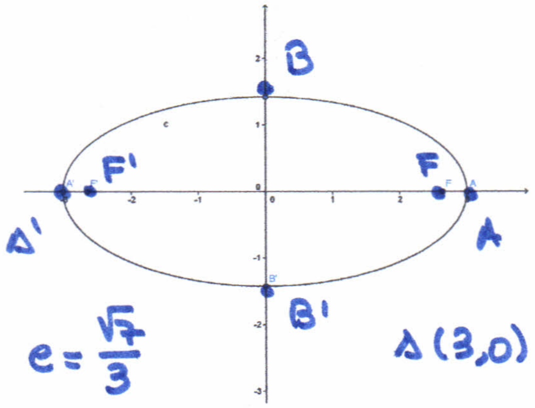
Ficha nº2: EJERCICIOS DE LA ELIPSE

1.- Dada la elipse $2x^2+9y^2=18$. Hallar sus elementos y excentricidad.



$$\frac{2x^2}{18}+\frac{9y^2}{18}=\frac{18}{18} \Rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{2}=1$$

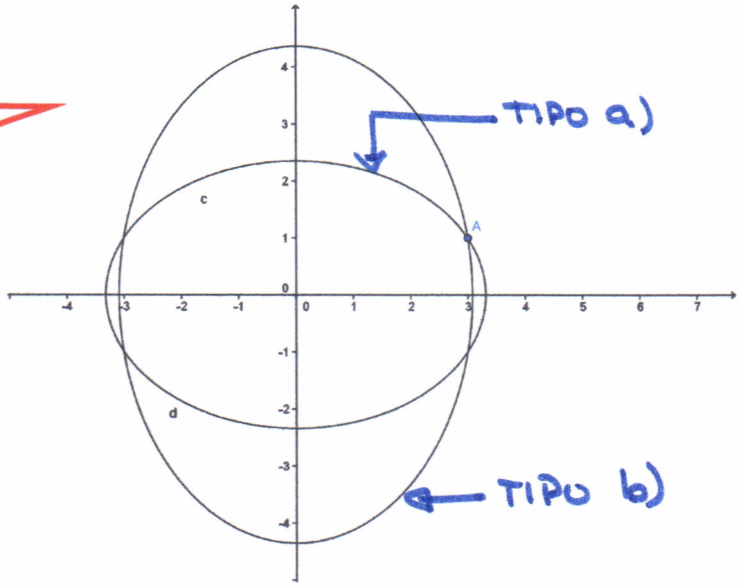
$$a=3\ ;\ b=\sqrt{2} \Rightarrow 9=2+c^2\ ;\ c=\sqrt{7}$$

$$e=\frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$A(3,0)\ ;\ A'(-3,0)\ ;\ B(0,\sqrt{2})\ ;\ B'(0,-\sqrt{2})\ ;\ F(\sqrt{7},0)\ ;\ F(-\sqrt{7},0)$$

2.- Hallar la ecuación de la elipse que pasa por el punto P(3,-1) y de excentricidad $\sqrt{2}/2$

Tenemos que suponer que es centrada en el origen y que los focos están en los ejes, y aún así tenemos dos posibles



a) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{c}{a} \\ \dfrac{9}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1 \\ a^2=b^2+c^2 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2=b^2+\frac{2}{4}a^2\ ;\ \left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{2}a^2=b^2 \\ \dfrac{9}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{9}{a^2}+\frac{1}{\frac{1}{2}a^2}=1$$

$$c=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$\Rightarrow \frac{9}{a^2}+\frac{2}{a^2}=1\ ;\ \frac{11}{a^2}=1\ ;\ a^2=11\ ;\ b^2=\frac{11}{2}$$

$$\text{Sol: } \frac{x^2}{11}+\frac{2y^2}{11}=1 \ ✓$$

LO MISMO QUE a)

$$\text{b) } \left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{2}a^2=b^2 \\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{9}{b^2}=1\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{18}{a^2}=1\ ;\ \frac{19}{a^2}=1\ ;\ a^2=19$$

$$b^2=\frac{19}{2}$$

$$\text{Sol: } \frac{x^2}{19}+\frac{2x^2}{19}=1 \ ✓$$

3.- Hallar los semiejes , vértices , focos y excentricidad de:

a) $x^2/169 + y^2/144 = 1$; $169 = 144 + c^2$; $c^2 = 25$; $c = 5$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$a = 13$ $b = 12$ $F(5,0)$; $F'(-5,0)$; $A(13,0)$; $A'(-13,0)$; $B(0,12)$; $B'(0,-12)$

b) $25x^2+9y^2=225$ $\Rightarrow \dfrac{25x^2}{225} + \dfrac{9y^2}{225} = \dfrac{225}{225}$; $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$; $\dfrac{y^2}{25} + \dfrac{x^2}{9} = 1$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$a = 5$ $b = 3$

$F(0,4)$; $F'(0,-4)$

$25 = 9 + c^2$; $c = 4$

$A(0,5)$; $A'(0,-5)$; $B(3,0)$; $B'(-3,0)$

4.- Ecuación de la elipse con centro en el origen de coordenadas y focos en el eje de abscisas que:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \;!!$$

a) su distancia focal es 16 y e=4/5.

$2c = 16$; $c = 8$ ✓

$e = \dfrac{c}{a}$; $\dfrac{4}{5} = \dfrac{8}{a} \Rightarrow a = 10$ ✓ ; $100 = b^2 + 64$ SOL: $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$

b) su semieje mayor es 9 y pasa por (6,4).

$a = 9 \Rightarrow \dfrac{36}{81} + \dfrac{16}{b^2} = 1$; $\dfrac{16}{b^2} = 1 - \dfrac{36}{81}$; $\dfrac{16}{b^2} = \dfrac{45}{81}$; $b^2 = \dfrac{144}{5}$

SOL: $\dfrac{x^2}{81} + \dfrac{5y^2}{144} = 1$

c) $e=\frac{1}{2}$ y pasa por (1,3)

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{9}{b^2} = 1 \\ \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{2} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c = \dfrac{a}{2} \\ a^2 = b^2 + \dfrac{a^2}{4} \\ b^2 = \dfrac{3}{4}a^2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{9}{\frac{3}{4}a^2} = 1 \\ \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{12}{a^2} = 1 \\ a^2 = 13 \; ; \; b^2 = \dfrac{39}{4} \end{array} \Rightarrow \text{SOL: } \frac{x^2}{13} + \frac{4y^2}{39} = 1$$

d) el eje menor mide 10 y pasa por (8,3).

$b = 5$; $\dfrac{64}{a^2} + \dfrac{9}{25} = 1$; $\dfrac{64}{a^2} = \dfrac{16}{25}$; $a^2 = 100$, $b^2 = 25$ $\Rightarrow$ SOL: $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

e) pasa por $(1, \sqrt{3}/2)$, $(\sqrt{2}, \sqrt{2}/2)$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{3}{4b^2} = 1 \\ \dfrac{2}{a^2} + \dfrac{2}{4b^2} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \dfrac{1}{a^2} = 1 - \dfrac{3}{4b^2} \\ \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{4b^2-3}{4b^2} \end{array} \Rightarrow 2.\left[1 - \frac{3}{4b^2}\right] + \frac{2}{4b^2} = 1 \Rightarrow$$

$$2 - \frac{6}{4b^2} + \frac{2}{4b^2} = 1 \Rightarrow$$

$1=\frac{4}{4b^2} \Rightarrow b^2=1$

$\frac{1}{a^2}=1-\frac{3}{4}$; $\frac{1}{a^2}=\frac{1}{4}$; $a^2=4$ Sol: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$

f) Los radios vectores de P miden 2 y 8 y uno de sus focos (3,0)

$d(P,F)=8$; $d(P,F')=2 \Rightarrow d(P,F)+d(P,F')=2a \Rightarrow a=5$

$F(3,0) \Rightarrow c=3$; $a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 25=b^2+9 \Rightarrow b^2=16$

Sol: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

g) Su semieje menor es 4 y es tangente a x-y-5=0 $\Rightarrow b=4$

$\left.\begin{array}{l}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{16}=1\\ x-y-5=0\end{array}\right\} \Rightarrow$ Para que sean tangente una única solución!

$x=y+5$; $\frac{(y+5)^2}{a^2}+\frac{y^2}{16}=1 \Rightarrow$

$16y^2+a^2y^2+160y+400-16a^2=0$

$y=\frac{-160\pm\sqrt{160^2-4(16+a^2)\cdot(400-16a^2)}}{2(16+a^2)}$ ← EL DISCRIMINANTE DE SER CERO

$a^2\cdot(64a^2-576)=0$ $\Rightarrow a=0$, $\Rightarrow a=3$

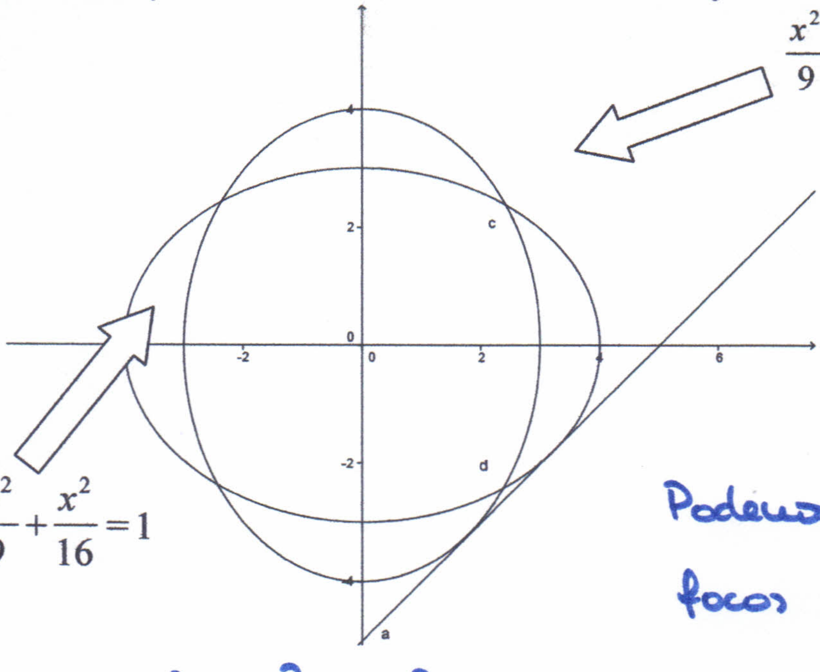
Podemos probar si colocando los focos en el otro eje sale

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{9}=1$

OJO!

LOS FOCOS ESTÁN EN EL EJE Y!

b NO ES SEMIEJE MENOR.



$\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{16}=1$

Podemos probar colocando los focos en el otro eje:

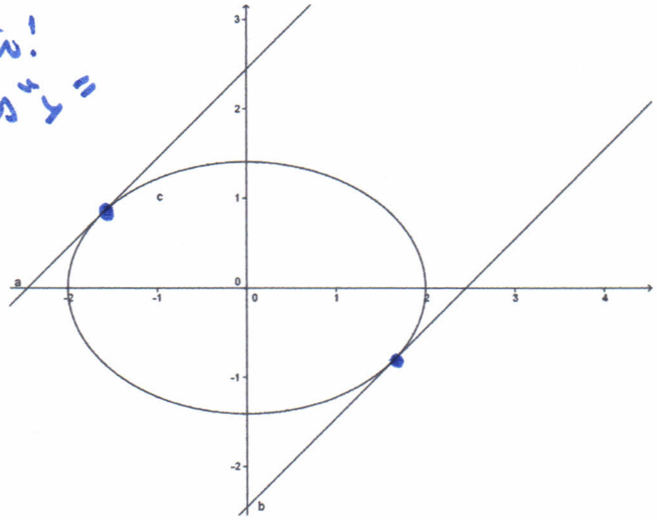
$\left.\begin{array}{l}\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{16}=1\\ x-y-5=0\end{array}\right\} \Rightarrow$ Repetimos todas las cuentas y vuelve a salir que b=4 es semieje menor

$a=3$; $b=4$

5.- Hallar k para que x-y+k=0 sea tangente a $x^2+2y^2=4$

$$\begin{cases} x-y+k=0 \\ x^2+2y^2=4 \end{cases} \Rightarrow$$

UNA ÚNICA SOLUCIÓN!
SÓLO UNA "x" Y UNA "y"



$x=y-k$

$(y-k)^2+2y^2=4$

$y^2-2ky+k^2+2y^2-4=0$

$3y^2-2ky+k^2-4=0$

DISCRIMINANTE = 0

$$y=\frac{2k\pm\sqrt{4k^2-12(k^2-4)}}{6} \Rightarrow 4k^2-12k^2+48=0\ ;\ k^2=6$$

$k=\pm\sqrt{6}$

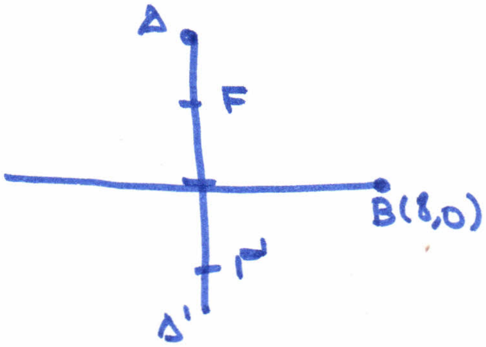
6.- Halla la ecuación reducida de una elipse que pasa por el punto (3,2) y que un vértice es (8,0).

¿QUÉ VÉRTICE?

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ a=8 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{9}{64}+\frac{4}{b^2}=1 \Rightarrow b^2=\frac{256}{55}$$

SOL: $\frac{x^2}{64}+\frac{55y^2}{256}=1$



$$\begin{cases} \frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1 \\ b=8 \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{a^2}+\frac{9}{64}=1 \Rightarrow a^2=\frac{256}{55}$$

SOL: $\frac{55y^2}{256}+\frac{x^2}{64}=1$

SALE LA MISMA!

7.- Halla el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la razón de las distancias al punto (3,0) y a la recta x-2=0 es $1/2$. ¿De qué lugar se trata?. Hallar e.

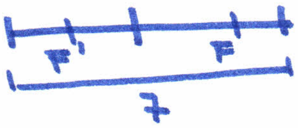
$$\frac{d(P,(3,0))}{d(P,\ x-2=0)}=\frac{1}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}{\frac{|x-2|}{\sqrt{1^2+0^2}}}=\frac{1}{2}\ ;$$

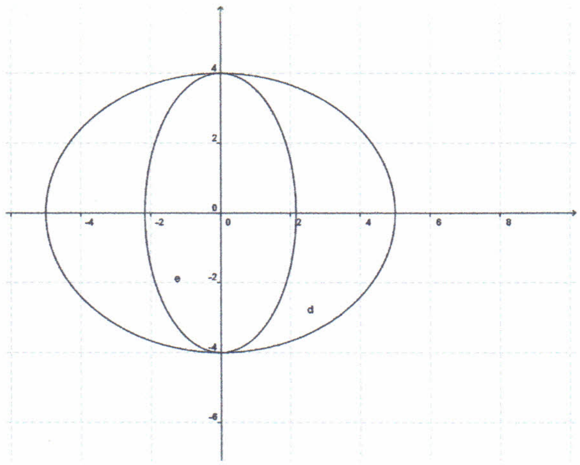
operaciones...

$$2\cdot\sqrt{(x-3)^2+y^2}=|x-2| \ldots$$

8.- Escribe la ecuación reducida de la elipse en los siguientes casos: $\Rightarrow$ CENTRO (0,0)

a) sus ejes miden 7 y 5 y está referida a esos ejes $\Rightarrow$

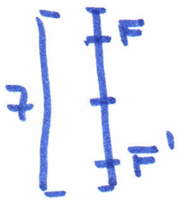




$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$a=7/2\ ;\ b=5/2$$

SOL: $\frac{4x^2}{49}+\frac{4y^2}{25}=1$



SOL: $\frac{4y^2}{49}+\frac{4x}{25}=1$

b) pasa por (0,4) y su excentricidad e=3/5

$$\frac{c}{a}=\frac{3}{5}\Rightarrow c=\frac{3}{5}a$$

$$a^2=b^2+\frac{9}{25}a^2\Rightarrow\frac{16}{25}a^2=b^2$$

$$\begin{cases}\frac{0}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1\\ \frac{16}{25}a^2=b^2\end{cases}\Rightarrow\ \frac{16}{b^2}=1\ ;\ b^2=16\qquad \frac{16}{25}a^2=16\Rightarrow a^2=25\qquad \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

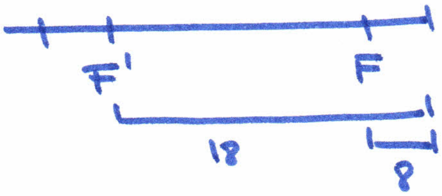
$$\begin{cases}\frac{16}{a^2}+\frac{0}{b^2}=1\\ \frac{16}{25}a^2=b^2\end{cases}\Rightarrow\ \frac{16}{a2}=1\ ;\ a^2=16\qquad \frac{16.16}{25}=b^2\qquad\Rightarrow\ \frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{\frac{256}{25}}=1$$

c) pasa por (2,1) y su eje menor mide 4 $\Rightarrow$ $b=2$

- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{4}=1\ ;\ \frac{4}{a2}+\frac{1}{4}=1\ ;\ a^2=\frac{16}{3}$; SOL: $\frac{x^2}{16/3}+\frac{y^2}{4}=1$

- $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{4}=1\ ;\ \frac{1}{a^2}+\frac{4}{4}=1\ ;\ \frac{1}{a^2}=0$ IMPOSIBLE! SÓLO UNA SOLUCIÓN!

d) uno de los vértices dista 8 de un foco y 18 del otro

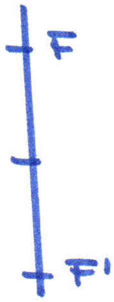


$\Rightarrow F'F = 10 \;;\; c = 5$

$8 + 18 = 2a \;;\; a = 13$

$169 = b^2 + 25 \Rightarrow b^2 = 144$

SOL: $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{144} = 1$



$\Rightarrow a = 13 \;;\; b = 12 \;;\; c = 5$

SOL: $\dfrac{y^2}{169} + \dfrac{x^2}{144} = 1$

e) el eje mayor mide 9 cm. y la distancia focal $4\sqrt{2}$

$2a = 9 \Rightarrow a = \dfrac{9}{2} \;;\; 2c = 4\sqrt{2} \Rightarrow c = 2\sqrt{2}$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \dfrac{81}{4} = b^2 + 8 \;;\; b^2 = \dfrac{49}{4}$

SOL: $\dfrac{x^2}{81/4} + \dfrac{y^2}{49/4} = 1$ SOL: $\dfrac{y^2}{81/4} + \dfrac{x^2}{49/4} = 1$

f) su excentricidad e=$\frac{1}{2}$ y la distancia focal es 1

$2c = 1 \Rightarrow c = \dfrac{1}{2}$ $\dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{\frac{1}{2}}{a} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow a = 1$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 1 = b^2 + \dfrac{1}{4} \Rightarrow b^2 = \dfrac{3}{4}$

SOL: $\dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{\frac{3}{4}} = 1$ SOL: $\dfrac{y^2}{1} + \dfrac{x^2}{\frac{3}{4}} = 1$

g) e=4/5 y el semieje menor b=3 ; $\dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{5} \;;\; c = \dfrac{4}{5}a \quad b = 3$

$a^2 = 9 + \dfrac{16}{25}a^2 \Rightarrow a^2 = 25$

SOL: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ SOL: $\dfrac{y^2}{25} + \dfrac{x^2}{9} = 1$

h) la distancia focal es 6 y los radios vectores de P, 2 y 8

$2c = 6 \Rightarrow c = 3$ $\quad d(P,F) + d(P,F') = 2+8 = 2a \Rightarrow a = 5$

$25 = b^2 + 9 \;:\; b^2 = 16$

Sol: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ Sol: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

9.- Hallar el lugar geométrico de los puntos del plano que verifican la condición de que es constante la suma de sus distancias a los puntos:

a) (4,0) y (-4,0) siendo esas sumas 10

$d(P,F) + d(P,F') = 10 \Rightarrow 10 = 2a \Rightarrow a = 5$

$25 = b^2 + 16 \Rightarrow b^2 = 9$ $\quad$ Sol: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

b) (0,3) y (0,-3) siendo esas sumas 12

$F(0,3)\quad F'(0,-3) \Rightarrow c = 3 \;:\; 2a = 12 \Rightarrow a = 6$

$36 = b^2 + 9 \quad b^2 = 27$ $\quad$ Sol: $\dfrac{y^2}{36} + \dfrac{x^2}{27} = 1$

10.- Halla la ecuación de la elipse de centro (1,2), foco (6,2) y pasa por (4,6).

Suponemos que los focos están en una paralela al eje x

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

El centro es el punto medio de FF': $\left(\dfrac{x+6}{2}, \dfrac{y+2}{2}\right) = (1,2)$

$F'(-4,2)$

Distancia entre focos es 2c : $\sqrt{(6+4)^2 + (2-2)^2} = 2c$

$10 = 2c \Rightarrow c = 5$

$$\frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{(y-2)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{9}{a^2} + \dfrac{16}{b^2} = 1 \\ a^2 = b^2 + 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 9b^2 + 16a^2 = a^2b^2 \\ 9b^2 + 16(b^2+25) = \ldots \end{array}$$

$9b^2 + 16b^2 + 400 = b^4 + 25b^2 \Rightarrow b^4 = 400 \Rightarrow b^2 = 20$

$a^2 = 45$

Sol: $\dfrac{(x-1)^2}{45} + \dfrac{(y-2)^2}{20} = 1$

11.- Dada le elipse $x^2/2 + y^2/8 = 1$, se pide:

a) ecuación de la recta tangente y normal en el punto (-1,2)

Usando la interpretación geométrica de la derivada:

"La derivada en el punto de tangencia a la pendiente de la tang"

Derivamos de forma implícita: $\frac{2x}{2} + \frac{2y \cdot y'}{8} = 0$

Sustituimos el punto de tangencia: $-1 + \frac{2y'}{8} = 0 \Rightarrow y' = 2$

RECTA TANGENTE POR (-1,2) : $y - 2 = 2 \cdot (x+1)$

RECTA NORMAL POR (-1,2) : $y - 2 = -\frac{1}{2}(x+1)$

b) ecuación de las tangentes a la elipse trazadas por (10,0). $\Rightarrow$ PUNTO EXTERIOR.

Construimos todas las rectas que pasan por (10,0):

$y = mx + n \;;\; 0 = 10m + n \;;\; n = -10m$

$y = mx - 10m \Rightarrow mx - y - 10m = 0$

$\begin{cases} \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1 \\ y = mx - 10m \end{cases} \Rightarrow$ De forma que tenga una única solución.

$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 8 \\ y = mx - 10m \end{cases} \Rightarrow 4x^2 + (mx - 10m)^2 = 8$

$4x^2 + m^2x^2 - 20m^2x + 100m^2 - 8 = 0$

$$x = \frac{20m^2 \pm \sqrt{400m^4 - 4\cdot(4+m^2)\cdot(100m^2 - 8)}}{2(4+m^2)}$$

↑ DISCRIMINANTE = 0

$\cancel{400m^4} - 1600m^2 + 128 - \cancel{400m^4} + 32m^2 = 0$

$-1568m^2 + 128 = 0 \;;\; m^2 = \frac{49}{4} \;;\; m = \pm\frac{7}{2}$

DOS SOLUCIONES: $y = \frac{7}{2}x - 35$

$y = -\frac{7}{2}x + 35$ ✓

12.- Hallar las ecuaciones de las tangentes a la elipse $x^2/16 + y^2/9 = 1$ y paralelas a la recta $2x-y+2=0$.

Si son paralelas a $2x+y+2=0 \Rightarrow 2x+y+C'=0$ F. General

ó $\Rightarrow y=2x+n$ F. explícita

$$\begin{cases} \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1 \\ y=2x+n \end{cases} \Rightarrow \text{única solución}$$

$$\begin{cases} 9x^2+16y^2=144 \\ y=2x+n \end{cases} \Rightarrow 9x^2+16(2x+n)^2-144=0$$

$$9x^2+64x^2-64nx+16n^2-144=0$$

$$73x^2+64nx+16n^2-144=0$$

$$x=\frac{\pm\sqrt{}}{} \rightarrow \text{DISCRIMINANTE}=0.$$

$$(64n)^2-4.73.(16n^2-144)=0$$

$$576n^2=42048 \; ; \; n^2=73 \; ; \; n=\pm\sqrt{73}$$

Sol: $y=2x+\sqrt{73}$

$y=2x-\sqrt{73}$

13.- Hallar la tangente y normal a la elipse $x^2+3y^2=6$ en el punto de $x=\sqrt{3}$ y ordenada negativa.

Hallamos punto de tangencia: $x=\sqrt{3}$; $3+3y^2=6$; $y=\pm 1$

Podemos usar el mismo procedimiento que en el 12.- o usar derivadas como ejercicio 11.-

Derivamos: $2x+6yy'=0$; $2\sqrt{3}+6.(-1).y'=0$

$$y'=\frac{2\sqrt{3}}{6} \; ; \; y'=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

RECTA TANG: $y+1=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-\sqrt{3})$

Para la NORMAL usamos $m \cdot m_N = -1$; $m_N = -\frac{3}{\sqrt{3}}$

$$y+1 = -\frac{3}{\sqrt{3}}(x-\sqrt{3})$$

14.- Halla la distancia focal y la ecuación de la tangente a la elipse $12x^2+36y^2=432$ en el punto (3,-3).

a) $\frac{12x^2}{432} + \frac{36y^2}{432} = \frac{432}{432}$; $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{12} = 1$ // $a = 6$; $b = \sqrt{12}$

$36 = 12 + c^2 \Rightarrow c^2 = 24 \Rightarrow c = \sqrt{24}$ //

b) Si el punto es de la elipse podemos usar derivación...., si no lo es entonces obligatoriamente construimos todas las rectas que pasan por ese punto.

$12 \cdot 9 + 36(-3)^2 = 432$ ✓

$24x + 72yy' = 0$; $24 \cdot 3 + 72 \cdot (-3) \cdot y' = 0$

$y' = \frac{1}{3} \Rightarrow m = \frac{1}{3}$

TANGENTE: $y + 3 = \frac{1}{3}(x-3)$ //

O construyendo: $y + 3 = m(x-3)$; $y = mx - 3m - 3$

$$\left.\begin{cases} 12x^2+36y^2=436 \\ y = mx-3m-3 \end{cases}\right\} \Rightarrow \text{única solución.}$$

Las ecuaciones se complican muchísimo.....

15.- Hallar "m" para que la recta x-2y=m sea tangente a la elipse $9x^2+4y^2=36$.

$$\begin{cases} 9x^2+4y^2=36 \\ x = m+2y \end{cases} \Rightarrow 9(m+2y)^2 + 4y^2 = 36 \;;$$

$40y^2 + 36my + 9m^2 - 36 = 0 \Rightarrow$ DISCRIMINANTE $= 0$

$1296m^2 - 1440m^2 + 5760 = 0 \Rightarrow m = \pm\sqrt{40}$