BIBLIOTECA DEL PROFESORADO

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I

SOLUCIONARIO

1 BACHILLERATO

Este material es una obra colectiva concebida, diseñada y creada en el Departamento de Ediciones de Santillana, bajo la dirección de **Teresa Grence**.

En su elaboración han participado::
Sonia Alejo Sánchez
María Arribas Fernández
José María Fernández Díaz
Coral Victoria de la Iglesia Meleiro
Clara Inés Lavado Campos
Silvia Marín García
Natalia Polo Rodríguez
Lorena Ramos San Millán
Rocío Rubio Álvarez
María de las Mercedes Sánchez Martín

EDICIÓN
Sonia Alejo Sánchez
Clara Inés Lavado Campos
Silvia Marín García
Aída Moya Librero

EDICIÓN EJECUTIVA
Carlos Pérez Saavedra

DIRECCIÓN DEL PROYECTO
Domingo Sánchez Figueroa

PROYECTO construyendo mundos

Santillana

DESAFÍO

La huella del crimen

Mi bicicleta ha sido robada y la única pista son unas huellas marcadas en un tramo de arena que hay entre dos calles.

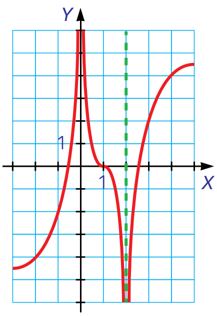
¿El ladrón ha ido a la derecha o a la izquierda?

La huella más marcada es la de la rueda de atrás, que soporta más peso. La huella que indica la dirección es la de la rueda delantera. El ladrón va de derecha a izquierda porque el último giro es levemente a la derecha en ese sentido y las huellas son más débiles, lo que parece indicar el final de la trayectoria.

PIENSA

PÁG. 201. ¿Puedes representar una función que sea creciente en $(-\infty, 0)$ y en $(2, +\infty)$ y decreciente en $(0, 2)$, pero que no tenga ningún máximo ni mínimo?

Respuesta abierta. Por ejemplo:



PÁG. 202. ¿Existe una función polinómica que pase por los puntos $(-2, -4)$ y $(2, 4)$ y que no tenga puntos de corte con el eje X? ¿Y con el eje Y?

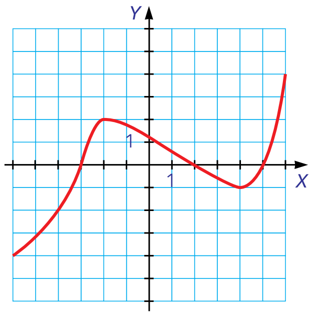
No existe una función polinómica que cumpla estos requisitos, porque al ser polinómica debe ser continua y, por tanto, para pasar del tercer cuadrante al primer cuadrante deberá cortar a ambos ejes.

Lo mismo ocurre con el eje Y, pues si no lo corta, eso quiere decir que $x = 0$ no pertenece al dominio y al ser la función polinómica, su dominio debe ser $\mathbb{R}$.

ACTIVIDADES

1 Dibuja la gráfica de una función creciente en los intervalos $(-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$ y decreciente en el resto.

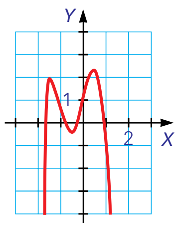
Respuesta abierta. Por ejemplo:



2 Dibuja la gráfica de una función definida en todos los números reales con dos máximos y un mínimo y cinco puntos de corte con los ejes X e Y.

Respuesta abierta, por ejemplo:

$f(x) = -x^6 - 5x^3 + 4x + 1$



3 Dibuja la gráfica de $f(x) = x^2$. A partir de ella, encuentra los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones.

a) $f(x) = (x - 1)^2$

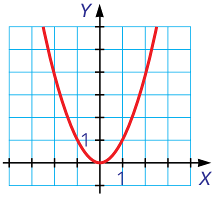
b) $f(x) = (x + 2)^2$

c) $f(x) = (x - 2)^2 + 1$

d) $f(x) = x^2 + 1$

e) $f(x) = x^2 - 3$

f) $f(x) = (x + 1)^2 - 2$



$f(x)$ decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$.

a) Se trata de una traslación de $f(x)$ 1 unidad a la derecha. El intervalo de decrecimiento es $(-\infty, 1)$ y el de crecimiento, $(1, +\infty)$.

b) Se trata de una traslación de $f(x)$ 2 unidades a la izquierda. El intervalo de decrecimiento es $(-\infty, -2)$ y el de crecimiento, $(-2, +\infty)$.

c) Se trata de una traslación de $f(x)$ 2 unidades a la derecha y una unidad hacia arriba. El intervalo de decrecimiento es $(-\infty, 2)$ y el de crecimiento, $(2, +\infty)$.

d) Se trata de una traslación de $f(x)$ 1 unidad hacia arriba. El intervalo de decrecimiento es $(-\infty, 0)$ y el de crecimiento, $(0, +\infty)$.

e) Se trata de una traslación de $f(x)$ 3 unidades hacia abajo. El intervalo de decrecimiento es $(-\infty, 0)$ y el de crecimiento, $(0, +\infty)$.

f) Se trata de una traslación de $f(x)$ una unidad hacia la izquierda y 2 unidades hacia abajo. El intervalo de decrecimiento es $(-\infty, -1)$ y el de crecimiento, $(-1, +\infty)$.

4 Estudia el crecimiento y el decrecimiento de las funciones.

a) $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$

b) $f(x) = -x^2 + 6x + 2$

a) $f'(x) = 4x + 4 = 0 \rightarrow x = -1$

$4x + 4 < 0 \rightarrow x \in (-\infty, -1)$
$\rightarrow$ En este intervalo la función decrece.

$4x + 4 > 0 \rightarrow x \in (-1, +\infty) \rightarrow$
$\rightarrow$ En este intervalo la función crece.

b) $f'(x) = -2x + 6 = 0 \rightarrow x = 3$

$-2x + 6 > 0 \rightarrow x \in (-\infty, 3) \rightarrow$
$\rightarrow$ En este intervalo la función crece.

$-2x + 6 < 0 \rightarrow x \in (3, +\infty) \rightarrow$
$\rightarrow$ En este intervalo la función decrece.

5 Encuentra los máximos y los mínimos de estas funciones.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2$

b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 1$

a) $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$, que se anula en $x = 0$ y $x = 2$.
Es creciente a la izquierda de 0 y decreciente a la derecha $\rightarrow$
$\rightarrow$ Máximo en $(0, 0)$.
Es decreciente a la izquierda de 2 y creciente a la derecha $\rightarrow$
$\rightarrow$ Mínimo en $(2, -4)$.

b) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 6(x - 3)(x + 2)$ y se anula en $x = 3$ y $x = -2$.
Es creciente a la izquierda de -2 y decreciente a la derecha $\rightarrow$
$\rightarrow$ Máximo en $(-2, 45)$.
Es decreciente a la izquierda de 3 y creciente a la derecha $\rightarrow$
$\rightarrow$ Mínimo en $(3, -80)$.

6 Encuentra los máximos y los mínimos de estas funciones utilizando la segunda derivada.

a) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$

c) $f(x) = x^3 - 6x^2$

d) $f(x) = x^2 + 9x$

e) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 4x$

f) $f(x) = x^3 - 3x + 1$

a) $f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2) =$
$= 4x\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = 0 \qquad x = -\sqrt{2} \qquad x = \sqrt{2}$

$f'(x) = 12x^2 - 8 = 4(3x^2 - 2)$

Para $x = -\sqrt{2}$:

$f''\left(-\sqrt{2}\right) = 4\left(3\left(-\sqrt{2}\right)^2 - 2\right) =$
$= 4(6 - 2) = 16 > 0 \rightarrow$

$\rightarrow$ Mínimo en $x = -\sqrt{2}$

Para $x = \sqrt{2}$:

$f''(\sqrt{2}) = 4\left(3(\sqrt{2})^2 - 2\right) = 4(6 - 2) =$

$= 16 > 0 \rightarrow$ Mínimo en $x = \sqrt{2}$

Para $x = 0$:

$f''(0) = 4(3 \cdot 0^2 - 2) = 4(0 - 2) =$

$= -8 < 0 \rightarrow$ Máximo en $x = 0$

b) $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = 0 \qquad x = 2$

$f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$

Para $x = 0$:

$f''(0) = 6(0 - 1) = -6 < 0 \rightarrow$

$\rightarrow$ Máximo en $x = 0$

Para $x = 2$:

$f''(2) = 6(2 - 1) = 6 > 0 \rightarrow$

$\rightarrow$ Mínimo en $x = 2$

c) $f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = 0 \qquad x = 4$

$f''(x) = 6x - 12$

Para $x = 0$:

$f''(0) = -12 < 0 \rightarrow$ Máximo en $x = 0$

Para $x = 4$:

$f''(4) = 12 > 0 \rightarrow$ Mínimo en $x = 4$

d) $f'(x) = 2x + 9 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-9}{2}$

$f''(x) = 2$

Para $x = \dfrac{-9}{2}$: $f''\left(\dfrac{-9}{2}\right) = 2 > 0 \rightarrow$

$\rightarrow$ Mínimo en $x = \dfrac{-9}{2}$

e) $f'(x) = 6x^2 + 18x - 4 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = \dfrac{-9 + \sqrt{105}}{6}, x = \dfrac{-9 - \sqrt{105}}{6}$

$f''(x) = 12x + 18$

Para $x = \dfrac{-9 + \sqrt{105}}{6}$:

$f''\left(\dfrac{-9 + \sqrt{105}}{6}\right) > 0 \rightarrow$

$\rightarrow$ Mínimo en $x = \dfrac{-9 + \sqrt{105}}{6}$

Para $x = \dfrac{-9 - \sqrt{105}}{6}$:

$f''\left(\dfrac{-9 - \sqrt{105}}{6}\right) < 0 \rightarrow$

$\rightarrow$ Máximo en $x = \dfrac{-9 - \sqrt{105}}{6}$

f) $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = 1 \qquad x = -1$

$f''(x) = 6x$

Para $x = -1$:

$f''(-1) = -6 < 0 \rightarrow$ Máximo en $x = -1$

Para $x = 1$:

$f''(1) = 6 > 0 \rightarrow$ Mínimo en $x = 1$

7 Considera la siguiente función racional.

$$f(x) = \frac{x^2}{x + 1}$$

Estudia su monotonía y encuentra sus máximos y mínimos.

$f'(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2} = 0 \rightarrow x^2 + 2x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = 0 \qquad x = -2$

$f''(x) = \dfrac{2}{(x + 1)^3}$

Para $x = 0$:

$f''(0) > 0 \rightarrow x = 0$ es un máximo.

Para $x = -2$:

$f''(-2) < 0 \rightarrow x = -2$ es un mínimo.

Por tanto, $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ y creciente en $(-2, 0)$.

8 Decide dónde son cóncavas y dónde son convexas estas funciones.

a) $f(x) = 7x^3 - x^2 - x + 2$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

a) $f'(x) = 21x^2 - 2x - 1$

$f''(x) = 42x - 2 = 0 \rightarrow x = \dfrac{1}{21}$

Para $x < \dfrac{1}{21}$:

$f''(0) = -2 < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

Para $x > \dfrac{1}{21}$:

$f''(1) = 40 > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

b) $f'(x) = \dfrac{2x}{(x^2 + 1)^2}$

$f''(x) = \dfrac{2(1 - 3x^2)}{(x^2 + 1)^3} = 0 \rightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Para $x < -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$:

$f''(-2) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

Para $-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$:

$f''(0) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

Para $\frac{\sqrt{3}}{3} < x$:

$f''(2) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

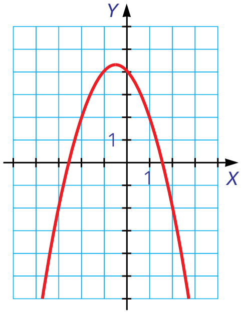
9 Halla los intervalos de concavidad y convexidad de las siguientes funciones, y comprueba el resultado gráficamente.

a) $f(x) = -x^2 - x + 4$

b) $f(x) = -x - 5x^2$

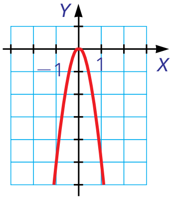
a) $f'(x) = -2x - 1 \rightarrow f''(x) = -2$

$f''(x) < 0$ siempre, por tanto, es convexa.



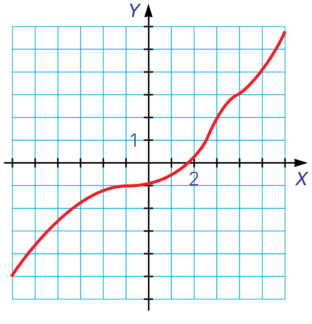
b) $f'(x) = -1 - 10x \rightarrow f''(x) = -10$

$f''(x) < 0$ siempre, por tanto, es convexa.



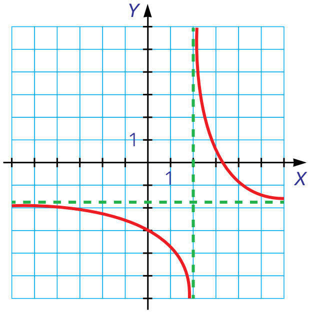
10 Dibuja la gráfica de una función siempre creciente que no tenga asíntotas.

Respuesta abierta. Por ejemplo:



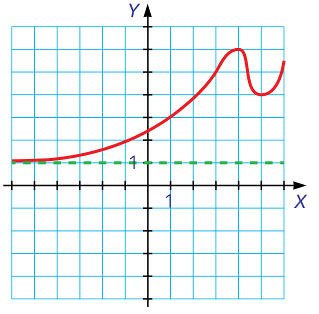
11 Dibuja la gráfica de una función siempre decreciente que tenga una asíntota vertical y otra horizontal.

Respuesta abierta. Por ejemplo:



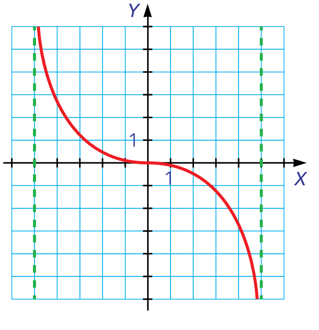
12 Dibuja la gráfica de una función siempre positiva con un máximo en (4, 6).

Respuesta abierta. Por ejemplo:



13 Dibuja la gráfica de una función cuyo dominio sea $(-5, 5)$, pase por el origen y tal que $\lim_{x \to -5} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to 5} f(x) = -\infty$.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

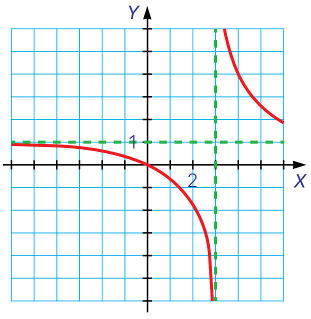


14 Representa gráficamente una función que cumpla todas las condiciones.

- Su dominio es $\mathbb{R} - \{3\}$.

- Corta los ejes en el punto (0, 0).
- Tiene una asíntota vertical en $x = 3$ y una horizontal en $y = 1$.
- Es siempre decreciente.
- Es convexa en $(-\infty, 3)$ y cóncava en $(3, +\infty)$.
- No tiene puntos de inflexión.

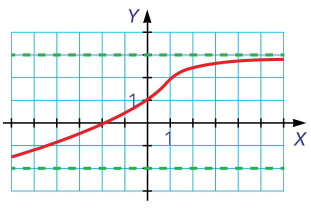
Respuesta abierta. Por ejemplo:



15 Representa gráficamente una función que cumpla todas las condiciones.

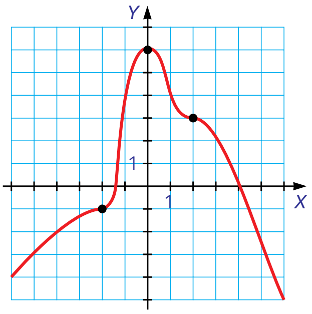
- Su dominio es $\mathbb{R}$.
- Corta el eje X en el punto $(-2, 0)$ y el eje Y en el punto $(0, 1)$.
- Tiene dos asíntotas horizontales, $y = 3$ e $y = -2$.
- Es siempre creciente.
- Es cóncava en $(-\infty, 1)$ y convexa en $(1, +\infty)$.
- Tiene un punto de inflexión en $(1, 2)$.

Respuesta abierta. Por ejemplo:



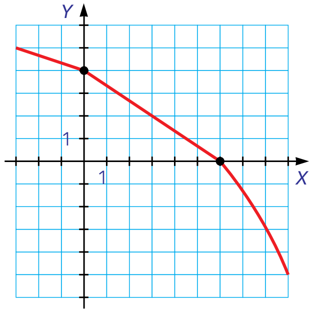
16 Dibuja la gráfica de una función cuyo dominio es $\mathbb{R}$, que pasa por $(-2, -1)$ y $(2, 3)$, es creciente en $(-\infty, 0)$, decreciente en $(0, +\infty)$ y tiene un máximo en $(0, 6)$.

Respuesta abierta. Por ejemplo:



17 Dibuja la gráfica de una función con dominio $\mathbb{R}$, cuyos puntos de corte con los ejes son (0, 4) y (6, 0), y tal que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

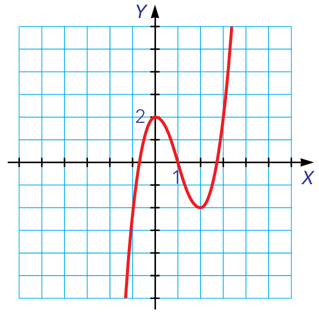


18 Representa gráficamente estas funciones.

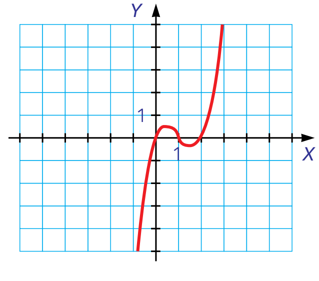
a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

a)



b)

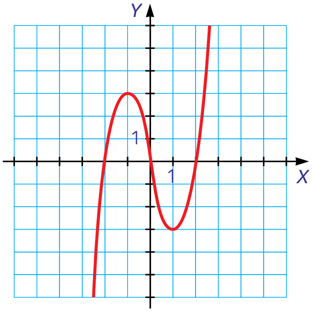


19 Representa gráficamente estas funciones.

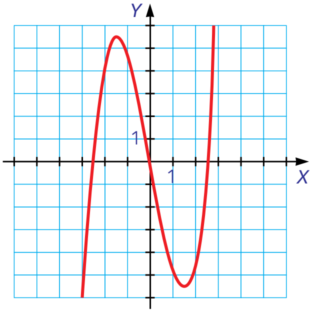
a) $f(x) = x^3 - 4x$

b) $f(x) = x^3 - 6x$

a)



b)



20 Determina cuántas y cuáles son las asíntotas de estas funciones.

a) $f(x) = \dfrac{3x}{x-2}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$

a) • Asíntotas verticales:

El denominador se anula en $x = 2$:

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x}{x-2} = \infty \to f$ tiene una asíntota vertical en $x = 2$.

• Asíntotas horizontales:

Como $\text{Gr}(3x) = \text{Gr}(x-2) \to f$ tiene una asíntota horizontal en $y = k$, donde

$k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x}{x-2} = 3 \to y = 3.$

• Asíntotas oblicuas:

No existe asíntota oblicua porque $\text{Gr}(3x) = \text{Gr}(x-2) = 1$.

b) • Asíntotas verticales:

El denominador se anula en $x = \pm 1$:

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2}{x^2-1} = \infty \to f$ tiene una asíntota vertical en $x = 1$.

$\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2}{x^2-1} = \infty \to f$ tiene una asíntota vertical en $x = -1$.

• Asíntotas horizontales:

Como $\text{Gr}(x^2) = \text{Gr}(x^2-1) \to f$ tiene una asíntota horizontal en $y = k$, donde

$k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2-1} = 1 \to y = 1.$

• Asíntotas oblicuas:

No existe asíntota oblicua porque $\text{Gr}(x^2) = \text{Gr}(x^2-1) = 2$.

21 Determina las asíntotas oblicuas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$ b) $f(x) = x + \dfrac{x}{2-x}$

a) $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x(x+1)} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2+x} = 1$

$n = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx] =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \left[\dfrac{x^2}{x+1} - x\right] =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \left[\dfrac{x^2 - x^2 - x}{x+1}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x}{x+1} =$

$= -1$

Por tanto, la asíntota oblicua es $y = x - 1$.

b) $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x + \dfrac{x}{2-x}}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x - x^2}{x(2-x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3-x}{2-x} = 1$

$n = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx] =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \left[x + \dfrac{x}{2-x} - x\right] =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \left[\dfrac{x}{2-x}\right] = -1$

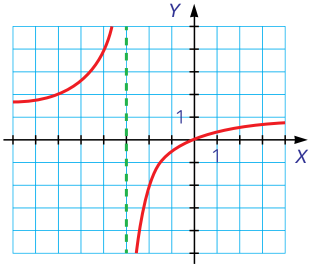
Por tanto, la asíntota oblicua es $y = x - 1$.

22 Representa estas funciones.

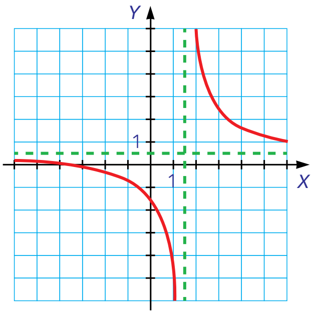
a) $f(x) = \dfrac{x}{x+3}$

b) $f(x) = \dfrac{x+4}{2x-3}$

a)



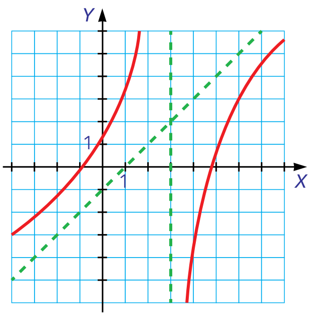
b)



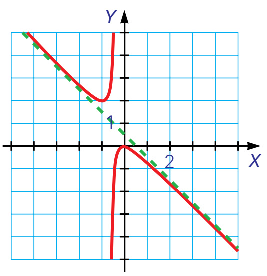
23 Representa las siguientes funciones.

a) $f(x) = x - \dfrac{x+4}{x-3}$ b) $f(x) = \dfrac{x}{x+1} - x$

a)



b)



PRACTICA

24 Estudia el crecimiento y el decrecimiento de la función.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x < -2 \\ 1 + \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < -2 \\ -\dfrac{2}{x^3} & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \to \begin{cases} 2x + 2 = 0 \to x = -1 \\ -\dfrac{2}{x^3} \neq 0 \end{cases} \to$$

$\to$ En $x = -1$ $f'(x)$ no toma el valor de la primera función. Por tanto, $f'(x)$ nunca se anula.

Para $x < -2$: $f'(-3) < 0 \to f(x)$ es decreciente.

Para $-2 < x < 0$: $f'(-1) > 0 \to f(x)$ es creciente.

Para $x > 0$: $f'(1) < 0 \to f(x)$ es decreciente.

Por tanto, la función es decreciente en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ y creciente en $(-2, 0)$.

25 La función $g(x) = 100 + 5x + x^2$ proporciona el gasto en euros de una empresa para fabricar x unidades de un producto. Si cada unidad tiene un precio de venta de 29 €, calcula la función beneficio y cuántas unidades hay que producir para que sea máximo.

El ingreso por cada unidad es $f(x) = 29x$, el gasto, $g(x)$ y el beneficio:

$$b(x) = f(x) - g(x) = 29x - 100 - 5x - x^2 =$$
$$= 24x - x^2 - 100$$

$b'(x) = 24 - 2x = 0 \to x = 12$

$b''(x) = -2 < 0 \to x = 12$ es un máximo.

Para maximizar el beneficio se deben fabricar 12 unidades. El beneficio será de 44 €.

26 Halla el valor de a para que en $x = 2$ estas funciones tengan un mínimo.

a) $f(x) = x^2 + ax + a$

b) $f(x) = ax^2 - 4x + 3$

a) $f'(x) = 2x + a = 0$

$f'(2) = 2 \cdot 2 + a = 0 \to a = -4$

$f''(x) = 2 \to f''(2) = 2 > 0$

Con $a = -4$, en $x = 2$ hay un mínimo.

b) $f'(x) = 2ax - 4 = 0$

$f'(2) = 4a - 4 = 0 \rightarrow a = 1$

$f''(x) = 2a \rightarrow f''(2) = 2 > 0$

Con $a = 1$, en $x = 2$ hay un mínimo.

27 Halla la ecuación de la parábola cuyo vértice es $(3, -8)$, sabiendo que pasa por el punto.

a) $(0, 1)$ b) $(1, 0)$

a) Una parábola tendrá como ecuación $f(x) = ax^2 + bx + c$, y como pasa por $(0, 1)$, al sustituir, se obtiene $c = 1$.

El vértice de la parábola pertenece a la misma y es un máximo o un mínimo.

$a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + 1 = -8$

$f'(3) = 0 \rightarrow f'(x) = 2ax + b \rightarrow$
$\rightarrow 6a + b = 0$

$$\left.\begin{aligned} a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + 1 &= -8 \\ 6a + b &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} 9a + 3b &= -9 \\ b &= -6a \end{aligned}\right\} \rightarrow 9a - 18a = -9 \rightarrow$$

$\rightarrow a = 1 \qquad b = -6$

Por tanto, $f(x) = x^2 - 6x + 1$.

b) Una parábola tendrá como ecuación $f(x) = ax^2 + bx + c$, y como pasa por $(1, 0)$, al sustituir se obtiene $a + b + c = 0$.

El vértice de la parábola pertenece a la misma y es un máximo o un mínimo.

$a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = -8$

$f'(3) = 0 \rightarrow f'(x) = 2ax + b \rightarrow$
$\rightarrow 6a + b = 0$

$$\left.\begin{aligned} a + b + c &= 0 \\ 9a + 3b + c &= -8 \\ 6a + b &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} -5a + c &= 0 \\ -9a + c &= -8 \end{aligned}\right\} \rightarrow 4a = 8 \rightarrow$$

$\rightarrow a = 2 \qquad b = -12 \qquad c = 10$

Por tanto, $f(x) = 2x^2 - 12x + 10$.

28 Estudia la monotonía de las funciones cuya derivada se representa con una recta de pendiente 3.

¿Qué tipo de funciones son?

La derivada es $f'(x) = 3x + n$. Esta función es la derivada de una función de segundo grado, por tanto, de una parábola. Al derivar de nuevo se obtiene $f''(x) = 3 > 0$, por tanto, la parábola es cóncava.

29 Estudia la monotonía de estas funciones.

a) $f'(x) = 2x^2 - 3x - 2$

b) $f'(x) = x^2 - 3x + 2$

a) $f'(x) = 2x^2 - 3x - 2 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{3^2 + 16}}{4} \rightarrow$

$\rightarrow x_1 = 2 \quad x_2 = -\dfrac{1}{2}$

Para $x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow$
$\rightarrow f(x)$ es creciente.

Para $x \in \left(-\dfrac{1}{2}, 2\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow$
$\rightarrow f(x)$ es decreciente.

Para $x \in (2, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow$
$f(x)$ es creciente.

b) $f'(x) = x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 8}}{2} \rightarrow$

$\rightarrow x_1 = 2 \quad x_2 = 1$

Para $x \in (-\infty, 1) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow$
$\rightarrow f(x)$ es creciente.

Para $x \in (1, 2) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow$
$\rightarrow f(x)$ es decreciente.

Para $x \in (2, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow$
$\rightarrow f(x)$ es creciente.

30 Estudia la concavidad y la convexidad de la función.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x < -2 \\ 1 + \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < -2 \\ -\dfrac{2}{x^3} & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

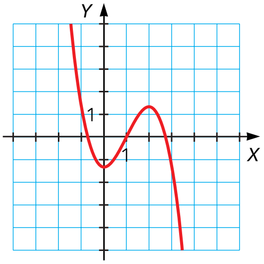
$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ \dfrac{6}{x^4} & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

Para $x < -2$: $f'' > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

Para $-2 < x < 0$:
$f''(-1) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

Para $x > 0$: $f'(1) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

31 Estudia la concavidad y la convexidad en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y $x = 2$.



En $x = -1$ la función es cóncava.

En $x = 1$ la función tiene un punto de inflexión.

En $x = 2$ la función es convexa.

32 Determina si la función $f(x) = \dfrac{2 - x^2}{x^2 - 1}$ tiene asíntotas horizontales y estudia su posición.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2 - x^2}{x^2 - 1} = -1 \rightarrow f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y = -1$.

Para $x = 1000$:

$$f(1000) = \frac{2 - (1000)^2}{(1000)^2 - 1} = \frac{-999\,998}{999\,999} = -0{,}999998 > -1$$

Por la derecha, la gráfica está situada por encima de la asíntota.

Para $x = -1000$:

$$f(-1000) = \frac{2 - (-1000)^2}{(-1000)^2 - 1} = -0{,}999998 > -1$$

Por la izquierda, la gráfica está situada por encima de la asíntota.

33 Calcula las asíntotas horizontales de la función $f(x) = \dfrac{x^3}{2x^3 + 3x^2 + 2}$ y estudia su posición.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3}{2x^3 + 3x^2 + 2} = \dfrac{1}{2} \rightarrow f$ tiene una asíntota horizontal en $y = \dfrac{1}{2}$.

Para $x = 1000$:

$$f(1000) = \frac{(1000)^3}{2(1000)^3 + 3(1000)^2 + 2} = 0{,}49925... < \frac{1}{2}$$

Por la derecha, la gráfica está situada por debajo de la asíntota.

Para $x = -1000$:

$$f(-1000) = \frac{(-1000)^3}{2(-1000)^3 + 3(-1000)^2 + 2} = 0{,}5007... > \frac{1}{2}$$

Por la izquierda, la gráfica está situada por encima de la asíntota.

34 Determina si la función $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 4}$ tiene asíntotas verticales y estudia su posición.

$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2) = 0 \rightarrow x = \pm 2$

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x + 1}{x^2 - 4} = \infty \rightarrow$
$\rightarrow$ Tiene una asíntota vertical en $x = 2$.

$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x + 1}{x^2 - 4} = \infty \rightarrow$
$\rightarrow$ Tiene una asíntota vertical en $x = -2$.

Para $x = -2{,}01$:

$f(-2{,}01) = \dfrac{-2{,}01 + 1}{(-2{,}01)^2 - 4} < 0 \rightarrow$
$\rightarrow \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$

Para $x = -1{,}99$:

$f(-1{,}99) = \dfrac{-1{,}99 + 1}{(-1{,}99)^2 - 4} > 0 \rightarrow$
$\rightarrow \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$

Para $x = 1{,}99$:

$f(1{,}99) = \dfrac{1{,}99 + 1}{(1{,}99)^2 - 4} < 0 \rightarrow \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

Para $x = 2{,}01$:

$f(2{,}01) = \dfrac{2{,}01 + 1}{(2{,}01)^2 - 4} > 0 \rightarrow \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

35 Calcula las asíntotas verticales de la función $f(x) = \dfrac{3x - 2}{x^2 - x - 6}$ y estudia su posición.

$x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3) = 0 \rightarrow$
$\rightarrow x = -2$, $x = 3$

$$\lim_{x \to -2} \frac{3x - 2}{x^2 - x - 6} = \infty \rightarrow$$
$\rightarrow$ Tiene asíntota vertical en $x = -2$.

$$\lim_{x \to 3} \frac{3x - 2}{x^2 - x - 6} = \infty \rightarrow$$
$\rightarrow$ Tiene asíntota vertical en $x = 3$.

Para $x = -2{,}01$:

$$f(-2{,}01) = \frac{3(-2{,}01) - 2}{(-2{,}01)^2 + 2{,}01 - 6} < 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow \lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$$

Para $x = -1{,}99$:

$$f(-1{,}99) = \frac{3(-1{,}99) - 2}{(-1{,}99)^2 + 1{,}99 - 6} > 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow \lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$$

Para $x = 2{,}99$:

$$f(2{,}99) = \frac{3(2{,}99) - 2}{(2{,}99)^2 - 2{,}99 - 6} < 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow \lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$$

Para $x = 3{,}01$:

$$f(3{,}01) = \frac{3(3{,}01) - 2}{(3{,}01)^2 - 3{,}01 - 6} > 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow \lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$$

ACTIVIDADES FINALES

1. Determina los puntos críticos y la monotonía de una función

ACTIVIDADES FLASH

36 A partir de la derivada de $f(x)$ decide si la función crece o decrece donde se indica.

a) $f'(x) = x^2 + 3$ en $x = 2$

b) $f'(x) = 5 - \sqrt{x}$ en $x = 9$

c) $f'(x) = -x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$ en $x = 0$

d) $f'(x) = 5x^{-3} + 4$ en $x = 1$

a) $f'(2) = 7 > 0$ $f(x)$ crece en $x = 2$.

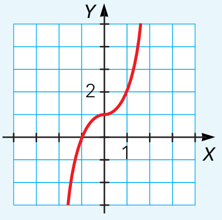
b) $f'(9) = 2 > 0$ $f(x)$ crece en $x = 9$.

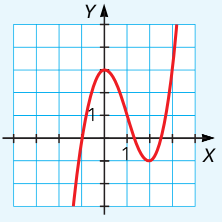
c) $f'(0) = -1 < 0$ $f(x)$ decrece en $x = 0$.

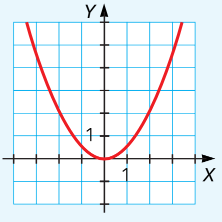
d) $f'(1) = 9 > 0$ $f(x)$ crece en $x = 1$.

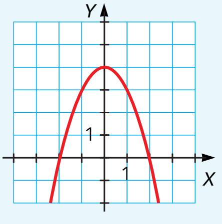
ACTIVIDADES FLASH

37 Estudia si la derivada es positiva o negativa en $x = 1$ en las siguientes funciones.

a)


b)


c)


d)


a) $f'(1) > 0$, porque en $x = 1$ la función es creciente.

b) $f'(1) < 0$, porque en $x = 1$ la función es decreciente.

c) $f'(1) > 0$, porque en $x = 1$ la función es creciente.

d) $f'(1) < 0$, porque en $x = 1$ la función es decreciente.

38 Decide si estas funciones crecen o decrecen donde se indica.

a) $f(x) = -2x^3 + 3x^2 - x + 1$ en $x = 1$

b) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x}$ en $x = -2$

c) $f(x) = 2^x + 3\ln x - 8$ en $x = 4$

d) $f(x) = 2x + 3\sqrt{x}$ en $x = 9$

a) $f'(x) = -6x^2 + 6x - 1$

$f'(1) = -1 < 0 \rightarrow$

$\rightarrow$ La función es decreciente en $x = 1$.

b) $f'(x) = \dfrac{(4x-3)x - (2x^2 - 3x + 1)}{x^2} = \dfrac{2x^2 - 1}{x^2}$

$f'(-2) = \dfrac{7}{4} > 0 \rightarrow$

$\rightarrow$ La función es creciente en $x = -2$.

c) $f'(x) = 2^x \cdot \ln 2 + \dfrac{3}{x}$

$f'(4) = 16\ln 2 + \dfrac{3}{4} > 0 \rightarrow$

$\rightarrow$ La función es creciente en $x = 4$.

d) $f'(x) = 2 + \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$

$f'(9) = \dfrac{5}{2} > 0 \rightarrow$

$\rightarrow$ La función es creciente en $x = 9$.

39 Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento de estas funciones. ¿Existe algún máximo o mínimo?

a) $f(x) = x^2 - 4x + 1$

b) $f(x) = -x^2 + 4$

c) $f(x) = 2x^2 - 8x$

d) $f(x) = -3x - x^2$

e) $f(x) = x^2 - 6x + 5$

f) $f(x) = 3x^2 - 2x$

a) $f'(x) = 2x - 4 \rightarrow f'(2) = 0$

En $(-\infty, 2)$ $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

En $(2, +\infty)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

Por tanto, $x = 2$ es un mínimo.

b) $f'(x) = -2x \rightarrow f'(0) = 0$

En $(-\infty, 0)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En $(0, +\infty)$ $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

Por tanto, $x = 0$ es un máximo.

c) $f'(x) = 4x - 8 \rightarrow f'(2) = 0$

En $(-\infty, 2)$ $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

En $(2, +\infty)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en este intervalo.

Por tanto, $x = 2$ es un mínimo.

d) $f'(x) = -3 - 2x \rightarrow f'\left(\dfrac{-3}{2}\right) = 0$

En $\left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right)$ $f'(x) > 0 \rightarrow$

$\rightarrow f(x)$ es creciente.

En $\left(-\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$ $f'(x) < 0 \rightarrow$

$\rightarrow f(x)$ es decreciente.

Por tanto, $x = -\dfrac{3}{2}$ es un máximo.

e) $f'(x) = 2x - 6 \rightarrow f'(3) = 0$

En $(-\infty, 3)$ $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

En $(3, +\infty)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

Por tanto, $x = 3$ es un mínimo.

f) $f'(x) = 6x - 2 \rightarrow f'\left(\dfrac{1}{3}\right) = 0$

En $\left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right)$ $f'(x) < 0 \rightarrow$

$\rightarrow f(x)$ es decreciente.

En $\left(\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

Por tanto, $x = \dfrac{1}{3}$ es un mínimo.

40 **INVENTA.** Escribe dos parábolas que tengan un máximo y otras dos que tengan un mínimo e indica sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Máximo

$f(x) = -x^2 + 3x - 2$

$f'(x) = -2x + 3 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = \dfrac{3}{2} \rightarrow \begin{cases} f'(0) > 0 \\ f'(2) < 0 \end{cases}$

$f(x)$ es creciente en $\left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right)$

y es decreciente en $\left(\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$.

$f(x) = -3x^2 + 4x - 2 \rightarrow$
$\rightarrow f'(x) = -6x + 4 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow x = \dfrac{2}{3} \rightarrow \begin{cases} f'(0) > 0 \\ f'(1) < 0 \end{cases}$

$f(x)$ es creciente en $\left(-\infty, \dfrac{2}{3}\right)$

y es decreciente en $\left(\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$.

Mínimo

$f(x) = 3x^2 + 4x - 2$
$f'(x) = 6x + 4 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow x = -\dfrac{2}{3} \rightarrow \begin{cases} f'(-1) < 0 \\ f'(1) > 0 \end{cases}$

$f(x)$ es decreciente en $\left(-\infty, -\dfrac{2}{3}\right)$

y es creciente en $\left(-\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$.

$f(x) = x^2 - 5x - 2$
$f'(x) = 2x - 5 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow x = \dfrac{5}{2} \rightarrow \begin{cases} f'(0) < 0 \\ f'(3) > 0 \end{cases}$

$f(x)$ es decreciente en $\left(-\infty, \dfrac{5}{2}\right)$

y es creciente en $\left(\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$.

41 Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones, y encuentra los posibles máximos o mínimos.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$
b) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$
c) $f(x) = x^3 - 3x$
d) $f(x) = x^4 - 4x$
e) $f(x) = 9x^4 - 2x^3 - 6x^2$

a) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow x = 1 \qquad x = 3$

En $(-\infty, 1)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En $(1, 3)$ $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

En $(3, +\infty)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En $x = 1$ tiene un máximo y en $x = 3$ un mínimo.

b) $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow x = -1 \qquad x = 3$

En $(-\infty, -1)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En $(-1, 3)$ $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

En $(3, +\infty)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En $x = -1$ tiene un máximo y en $x = 3$ un mínimo.

c) $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = 1 \qquad x = -1$

En $(-\infty, -1)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En $(-1, 1)$ $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

En $(1, +\infty)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En $x = -1$ tiene un máximo y en $x = 1$ un mínimo.

d) $f'(x) = 4x^3 - 4 = 0 \rightarrow x = 1$

En $(-\infty, 1)$ $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

En $(1, +\infty)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En $x = 1$ tiene un mínimo.

e) $f'(x) = 36x^3 - 6x^2 - 12x = 0 \rightarrow$
$\rightarrow x = 0 \qquad x = -\dfrac{1}{2} \qquad x = \dfrac{2}{3}$

En $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right)$ $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

En $\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En $\left(0, \dfrac{2}{3}\right)$ $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

En $\left(\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

Tiene un máximo en $x = 0$ y dos mínimos en $x = -\dfrac{1}{2}$ y $x = \dfrac{2}{3}$.

42 Estudia el crecimiento de estas funciones.

a) $f(x) = x^3$
b) $f(x) = x^4$
c) $f(x) = \sqrt{x}$

a) $f'(x) = 3x^2 \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$.

En $(-\infty, 0)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En $(0, +\infty)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

b) $f'(x) = 4x^3 \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$.

En $(-\infty, 0)$ $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

En $(0, +\infty)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

c) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

En $(-\infty, 0)$ la función no está definida.

En $(0, +\infty)$ $f'(x) > 0 \rightarrow$
$\rightarrow f(x)$ es creciente.

43 Analiza en qué intervalos crece y en cuáles decrece cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 3\,sen\,2x$

b) $f(x) = 2^{x+1}$

c) $f(x) = e^{2x-1}$

d) $f(x) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x + 5$

a) $f'(x) = 6\cos 2x \rightarrow f'(x) = 0$ cuando $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

En los intervalos $\left(\dfrac{\pi}{4} + k\pi, \dfrac{3\pi}{4} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$,
$f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

En los intervalos $\left(\dfrac{3\pi}{4} + k\pi, \dfrac{5\pi}{4} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$,
$f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

b) $f'(x) = 2^{x+1}\ln 2 > 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$

Por tanto, $f(x)$ es creciente en toda la recta real.

c) $f'(x) = 2e^{2x-1} > 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$

Por tanto, $f(x)$ es creciente en toda la recta real.

d) $f'(x) = -\ln 4 \cdot 4^{-x} < 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$

Por tanto, $f(x)$ es decreciente en toda la recta real.

44 Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \ln x$

b) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

c) $f(x) = \log_2 \dfrac{1}{x}$

d) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x^2 + 1}\right)$

a) $\text{Dom } f(x) = (0, +\infty)$

$f'(x) = \dfrac{1}{x} > 0\ \forall\ x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x)$ es siempre creciente.

b) $x^2 + 1 > 0\ \forall\ x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$

$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1} \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$

En $(-\infty, 0)$ $f'(x) < 0 \rightarrow$
$\rightarrow f(x)$ es decreciente.

En $(0, +\infty)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

c) $\text{Dom } f(x) = (0, +\infty)$

$f'(x) = -\dfrac{1}{x \ln 2} < 0\ \forall\ x \in \mathbb{R} \rightarrow$
$\rightarrow f(x)$ es siempre decreciente.

d) $\dfrac{1}{x^2 + 1} > 0\ \forall\ x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$

$f'(x) = \dfrac{-2x}{x^2 + 1} \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$

En $(-\infty, 0)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En $(0, +\infty)$ $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

$f(x)$ tiene un máximo en $x = 0$.

45 **INVESTIGA.** ¿Es cierto que la función $f(x) = x^3$ es siempre creciente? ¿Qué ocurre en el origen de coordenadas?

$f'(x) = 3x^2 > 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$

Como $f'(x)$ es siempre positiva, $f(x)$ es siempre creciente.

$f''(x) = 6x \rightarrow 6x = 0 \rightarrow x = 0$ es un punto de inflexión.

46 Analiza en qué intervalos crece y en cuáles decrece cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ c) $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$

b) $f(x) = \dfrac{x+2}{x+3}$ d) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$

a) $f'(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2} \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$

$f'(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2} < 0 \rightarrow$

$\rightarrow x \in (-\infty, 0) \rightarrow$

$\rightarrow$ En este intervalo $f(x)$ es decreciente.

$f'(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2} > 0 \rightarrow$

$\rightarrow x \in (0, +\infty) \rightarrow$

$\rightarrow$ En este intervalo $f(x)$ es creciente.

b) Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{-3\}$

$f'(x) = \dfrac{1}{(x+3)^2} > 0$ en todo el dominio, por lo que $f(x)$ es siempre creciente.

c) Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{-1\}$

$f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2} > 0$ en todo el dominio, por lo que $f(x)$ es siempre creciente.

d) Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{2\}$

$f'(x) = -\dfrac{4}{(x-2)^2} < 0$ en todo el dominio, por lo que $f(x)$ es siempre decreciente.

47 Determina los intervalos donde las siguientes funciones son crecientes o decrecientes.

a) $f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{si } x \leq 1 \\ 3-2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2+5x-2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{x^2}{2}+3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2+2x-9 & \text{si } x \leq 2 \\ 8-3x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ -2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1)$.

$f(x)$ es decreciente en $(1, +\infty)$.

b) $f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ 6x+5 & \text{si } x > 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 & \text{si } x < 0 \\ f'(x) > 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$.

$f(x)$ es creciente en $(0, +\infty)$.

c) $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 & \text{si } x < 0 \\ f'(x) > 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$.

$f(x)$ es creciente en $(0, +\infty)$.

d) $f'(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si } x < 2 \\ -3 & \text{si } x > 2 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} f'(x) < 0 & \text{si } x < -1 \\ f'(x) > 0 & \text{si } -1 < x < 2 \\ f'(x) < 0 & \text{si } 2 < x \end{cases}$

$f(x)$ es creciente en $(1, 2)$.

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

48 Estudia el crecimiento y el decrecimiento de las siguientes funciones donde se indica.

a) $f(x) = |3x+2|$ en $x = 1$ y $x = -4$

b) $f(x) = |-x+3|$ en $x = 0$ y $x = 5$

c) $f(x) = |-(x-3)|$ en $x = -1$ y $x = 2$

d) $f(x) = \left|\dfrac{3x}{2}+1\right|$ en $x = -2$ y $x = 0$

e) $f(x) = |x^2-3|$ en $x = -3$, $x = -1$ y $x = 4$

f) $f(x) = |-x^2+3x|$ en $x = -2$, $x = 2$ y $x = 6$

a) $f(x) = \begin{cases} -3x-2 & \text{si } x < -\dfrac{2}{3} \\ 3x+2 & \text{si } x \geq -\dfrac{2}{3} \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow f'(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } x < -\dfrac{2}{3} \\ 3 & \text{si } x > -\dfrac{2}{3} \end{cases}$

$f(x)$ es decreciente en $\left(-\infty, -\dfrac{2}{3}\right)$.

$f(x)$ es creciente en $\left(-\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$.

En $x = 1$ crece y en $x = -4$ decrece.

b) $f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{si } x > 3 \\ 3-x & \text{si } x \le 3 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 3 \\ -1 & \text{si } x < 3 \end{cases}$

$f(x)$ es creciente en $(3, +\infty)$.

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 3)$.

En $x = 0$ decrece y en $x = 5$ crece.

c) $f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{si } x > 3 \\ 3-x & \text{si } x \le 3 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 3 \\ -1 & \text{si } x < 3 \end{cases}$

$f(x)$ es creciente en $(3, +\infty)$.

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 3)$.

En $x = -1$ decrece y en $x = 2$ decrece.

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-3x-2}{2} & \text{si } x < -\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{3x+2}{2} & \text{si } x \ge -\dfrac{2}{3} \end{cases} \rightarrow$

$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-3}{2} & \text{si } x < -\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{3}{2} & \text{si } x > -\dfrac{2}{3} \end{cases}$

$f(x)$ es decreciente en $\left(-\infty, -\dfrac{2}{3}\right)$.

$f(x)$ es creciente en $\left(-\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$.

En $x = -2$ decrece y en $x = 0$ crece.

e) $f(x) = \begin{cases} x^2-3 & \text{si } x \le -\sqrt{3} \\ 3-x^2 & \text{si } -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \\ x^2-3 & \text{si } \sqrt{3} \le x \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -\sqrt{3} \\ -2x & \text{si } -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \\ 2x & \text{si } \sqrt{3} < x \end{cases}$

$f(x)$ es decreciente en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$.

$f(x)$ es creciente en $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$.

$f(x)$ es decreciente en $\left(0, \sqrt{3}\right)$.

$f(x)$ es creciente en $\left(\sqrt{3}, +\infty\right)$.

En $x = -3$ decrece, en $x = -1$ crece
y en $x = 4$ crece.

f) $f(x) = \begin{cases} x^2-3x & \text{si } x \le 0 \\ 3x-x^2 & \text{si } 0 < x < 3 \\ x^2-3x & \text{si } 3 \le x \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } x < 0 \\ 3-2x & \text{si } 0 < x < 3 \\ 2x-3 & \text{si } 3 < x \end{cases}$

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$.

$f(x)$ es creciente en $\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$.

$f(x)$ es decreciente en $\left(\dfrac{3}{2}, 3\right)$.

$f(x)$ es creciente en $(3, +\infty)$.

En $x = -2$ decrece, en $x = 2$ decrece
y en $x = 6$ crece.

49 **RETO.** Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones que aparecen a continuación.

a) $f(x) = |x^2 - x - 5|$

b) $f(x) = \left|\dfrac{1}{x}\right|$

c) $f(x) = \left|\dfrac{x}{x^2+1}\right|$

d) $f(x) = -\sqrt{|x|}$

e) $f(x) = |\ln x|$

f) $f(x) = \ln(|x| + 1)$

a) $f(x) = x^2 - x - 5$

si $x \in \left(-\infty, \dfrac{1-\sqrt{21}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}, +\infty\right)$

$f'(x) = 2x - 1 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 & \text{si } x > \dfrac{1}{2} \\ f'(x) < 0 & \text{si } x < \dfrac{1}{2} \end{cases} \rightarrow$

$f(x)$ crece en $\left(\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}, +\infty\right)$

y decrece en $\left(-\infty, \dfrac{1-\sqrt{21}}{2}\right)$.

$f(x) = -x^2 + x + 5$

si $x \in \left(\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$

$f'(x) = -2x + 1 \rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 & \text{si } x < \dfrac{1}{2} \\ f'(x) < 0 & \text{si } x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$f(x)$ crece en $\left(\frac{1-\sqrt{21}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

y decrece en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$.

$f(x)$ decrece en

$\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$

y crece en

$\left(\frac{1-\sqrt{21}}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{21}}{2}, +\infty\right)$.

b) $f(x) = \left|\frac{1}{x}\right| = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ -\frac{1}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 & \text{si } x < 0 \\ f'(x) < 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$f(x)$ crece en $(-\infty, 0)$ y decrece en $(0, +\infty)$.

c) $f(x) = \left|\frac{x}{x^2+1}\right| =$

$= \begin{cases} -\frac{x}{x^2+1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{x^2+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} f'(x) < 0 & \text{si } x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty) \\ f'(x) > 0 & \text{si } x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1) \end{cases}$

$f(x)$ decrece en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
y crece en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

d) $f(x) = -\sqrt{|x|} = \begin{cases} -\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \\ -\sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{-x}} & \text{si } x < 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} f'(x) < 0 & \text{si } x > 0 \\ f'(x) < 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$f(x)$ crece en $(-\infty, 0)$ y decrece en $(0, +\infty)$.

e) $f(x) = |\ln x| = \begin{cases} -\ln x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} f'(x) < 0 & \text{si } 0 < x < 1 \\ f'(x) > 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$f(x)$ decrece en $(0, 1)$ y crece en $(1, +\infty)$.

f) $f(x) = \ln(|x| + 1) =$

$= \begin{cases} \ln(1-x) & \text{si } x < 0 \\ \ln(x+1) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} f'(x) < 0 & \text{si } x < 0 \\ f'(x) > 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$f(x)$ decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$.

ACTIVIDADES FLASH

50 La función f es derivable en todo su dominio. Además, $f(0) > 0$ y $f''(x) < 0$ en $(-\infty, 0)$. ¿En cuál de las siguientes gráficas puede estar representada f?

Gráfico A

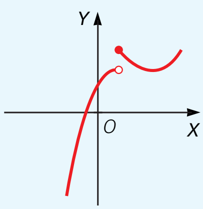


Gráfico B

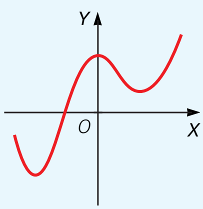
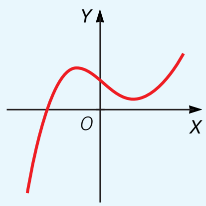


Gráfico C



La gráfica A no puede ser porque no es continua y, por tanto, no puede ser derivable en todo su dominio.

La gráfica B no cumple que $f''(x) < 0$ en $(-\infty, 0)$.

Por tanto, es la gráfica C.

51 Determina los máximos y los mínimos de las siguientes funciones utilizando la segunda derivada.

a) $f(x) = 3x + 2$

b) $f(x) = x^2 - 4$

c) $f(x) = \dfrac{5 - 2x}{4}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$

e) $f(x) = 2x^2 - 12x + 5$

f) $f(x) = 2x^4 - 4x^2$

g) $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 1}$

h) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 4}$

a) $f'(x) = 3 \neq 0\ \forall\ x \in \mathbb{R} \rightarrow$ No existe máximo ni mínimo en esta función.

b) $f'(x) = 2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$
$\rightarrow f''(x) = 2 > 0 \rightarrow$ Mínimo en $x = 0$

c) $f'(x) = -\dfrac{1}{2} \neq 0\ \forall\ x \in \mathbb{R} \rightarrow$ No existe máximo ni mínimo en esta función.

d) $f'(x) = \dfrac{x(x - 2)}{(x - 1)^2} = 0 \rightarrow x = 0$ y $x = 2$

$f''(x) = \dfrac{2}{(x - 1)^3}$

Para $x = 0$: $f''(0) = -2 < 0 \rightarrow$
$\rightarrow$ Máximo en $x = 0$

Para $x = 2$: $f''(2) = 2 > 0 \rightarrow$
$\rightarrow$ Mínimo en $x = 2$

e) $f'(x) = 4x - 12 = 4(x - 3) = 0$
$4(x - 3) = 0 \rightarrow x = 3$

$f''(x) = 4$

Para $x = 3$: $f''(3) = 4 \rightarrow$ Mínimo en $x = 3$

f) $f'(x) = 8x^3 - 8x = 8x(x^2 - 1) = 0 \rightarrow$
$\rightarrow x = 0 \qquad x = 1 \qquad x = -1$

$f''(x) = 8(3x^2 - 1)$

Para $x = 0$: $f''(0) = -8 < 0 \rightarrow$
$\rightarrow$ Máximo en $x = 0$

Para $x = 1$: $f''(1) = 16 > 0 \rightarrow$
$\rightarrow$ Mínimo en $x = 1$

Para $x = -1$: $f''(-1) = 16 > 0 \rightarrow$
$\rightarrow$ Mínimo en $x = -1$

g) $f'(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2} = 0 \rightarrow$
$\rightarrow x = 0 \qquad x = -2$

$f''(x) = \dfrac{2}{(x + 1)^3}$

Para $x = 0$: $f''(0) = 2 > 0 \rightarrow$
$\rightarrow$ Mínimo en $x = 0$

Para $x = -2$: $f''(-2) = -2 < 0 \rightarrow$
$\rightarrow$ Máximo en $x = -2$

h) $f'(x) = \dfrac{x^4 + 12x^2}{(x^2 + 4)^2} = 0 \rightarrow x = 0$

$f''(x) = \dfrac{-8x^3 + 96x}{(x^2 + 4)^3}$

Para $x = 0$: $f''(0) = 0 \rightarrow$
$\rightarrow$ Punto de inflexión en $x = 0$

52 Calcula, utilizando la derivada, la expresión algebraica de las coordenadas del vértice de una parábola genérica, $f(x) = ax^2 + bx + c$.

El vértice de una parábola es el máximo si la parábola es cóncava y es el mínimo si la parábola es convexa.

$$f'(x) = 2ax + b = 0 \rightarrow x = \frac{-b}{2a}$$

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c = c - \frac{b^2}{4a}$$

Por tanto, el vértice de la parábola es $\left(\dfrac{-b}{2a}, c - \dfrac{b^2}{4a}\right)$.

53 Averigua los valores de a, b y c para que la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ tenga su vértice en el punto $(-1, -8)$ y corte el eje Y en $(0, -5)$.

La función debe cumplir las siguientes condiciones:

$$\left.\begin{array}{r} f'(-1) = 0 \\ f(-1) = -8 \\ f(0) = -5 \end{array}\right\} \to$$

$$\to \left.\begin{array}{r} f'(-1) = -2a + b \\ f(-1) = a - b + c = -8 \\ f(0) = c = -5 \end{array}\right\} \to$$

$$\to \left.\begin{array}{r} -2a + b = 0 \\ a - b = -3 \end{array}\right\} \to a = 3 \qquad b = 6$$

Por tanto, $f(x) = 3x^2 + 6x - 5$.

54 Halla los valores de a y b para que la función polinómica $f(x) = x^3 + ax + b$ tenga un mínimo en estos puntos.

a) $A(1, 5)$
b) $B(-1, 5)$
c) $C(1, 2)$
d) $D(-1, -2)$

a) $5 = 1 + a + b \to 4 = a + b$

Como $(1, 5)$ es un mínimo:

$f'(x) = 3x^2 + a \to f'(1) = 0 \to$
$\to 0 = 3 + a \to a = -3$

$$\left.\begin{array}{r} a + b = 4 \\ a = -3 \end{array}\right\} \to b = 7$$

b) $5 = -1 - a + b \to a - b = -6$

Como $(-1, 5)$ es un mínimo:

$f'(x) = 3x^2 + a \to$
$\to f'(-1) = 3 + a = 0 \to a = -3$

$$\left.\begin{array}{r} a - b = -6 \\ a = -3 \end{array}\right\} \to b = 3$$

c) $2 = 1 + a + b \to a + b = 1$

Como $(1, 2)$ es un mínimo:

$f'(x) = 3x^2 + a \to$
$\to f'(1) = 3 + a = 0 \to a = -3$

$$\left.\begin{array}{r} a + b = 1 \\ a = -3 \end{array}\right\} \to b = 4$$

d) $-2 = -1 - a + b \to a - b = 1$

Como $(-1, -2)$ es un mínimo:

$f'(x) = 3x^2 + a \to$
$\to f'(-1) = 3 + a = 0 \to a = -3$

$$\left.\begin{array}{r} a - b = 1 \\ a = -3 \end{array}\right\} \to b = -4$$

55 Determina los valores de a, b y c para que la función $f(x) = ax^3 + bx + c$ pase por el punto $(2, 6)$ y tenga un mínimo en $(1, 2)$.

Pasa por $(2, 6) \to 6 = a2^3 + b2 + c \to$
$\to 6 = 8a + 2b + c$

Pasa por $(1, 2) \to 2 = a1^3 + b1 + c \to$
$\to 2 = a + b + c$

Como $(1, 2)$ es un mínimo:

$f'(x) = 3ax^2 + b \to f'(1) = 3a + b = 0$

$$\left.\begin{array}{r} 8a + 2b + c = 6 \\ a + b + c = 2 \\ 3a + b = 0 \end{array}\right\} \to$$

$$\to \left.\begin{array}{r} 8a - 6a + c = 6 \\ a - 3a + c = 2 \end{array}\right\} \to$$

$$\to \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -3 \to f(x) = x^3 - 3x + 4 \\ c = 4 \end{array}\right.$$

$f''(x) = 6x \to f''(1) = 6 > 0 \to$
$\to x = 1$ mínimo

56 Halla a, b y c para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga dos puntos de corte con el eje X en $x = -4$ y $x = -3$, y tal que la tangente sea horizontal en $x = -4$ y $x = \frac{-10}{3}$. Indica si estos dos últimos puntos son máximos o mínimos.

$$\left.\begin{array}{l} 0 = a(-4)^3 + b(-4)^2 + c(-4) + d \\ 0 = a(-3)^3 + b(-3)^2 + c(-3) + d \end{array}\right\} \to$$

$$\to \left.\begin{array}{l} 0 = -64a + 16b - 4c + d \\ 0 = -27a + 9b - 3c + d \end{array}\right\}$$

$f(x) = 0$ en $x = -4$ y $x = -\frac{10}{3}$.

$$\left.\begin{array}{l} 0 = 3a(-4)^2 + 2b(-4) + c \\ 0 = 3a\left(-\frac{10}{3}\right)^2 + 2b\left(-\frac{10}{3}\right) + c \end{array}\right\} \to$$

$$\to \left.\begin{array}{l} 0 = 48a - 8b + c \\ 0 = 100a - 20b + 3c \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} -64a + 16b - 4c + d = 0 \\ -27a + 9b - 3c + d = 0 \\ 48a - 8b + c = 0 \\ 100a - 20b + 3c = 0 \end{array}\right\}$$

El sistema es compatible indeterminado, por tanto, no existe una única solución. Dejando d como variable libre:

$$a = \frac{d}{48},\ b = \frac{11d}{48},\ c = \frac{5d}{6},\ d \in \mathbb{R}$$

57 Estudia el crecimiento, el decrecimiento, los máximos y los mínimos de esta función.

$$f(x) = \sqrt{2x^3 - \frac{13}{2}x^2 - 5x}$$

$$\text{Dom } f = \left\{x \in \mathbb{R}\colon 2x^3 - \frac{13}{2}x^2 - 5x > 0\right\} =$$

$$= \left[\frac{13 - \sqrt{329}}{8}, 0\right] \cup \left[\frac{13 + \sqrt{329}}{8}, +\infty\right)$$

$$f'(x) = \frac{6x^2 - 13x - 5}{2\sqrt{2x^3 - \frac{13}{2}x^2 - 5x}} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 6x^2 - 13x - 5 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = -\frac{1}{3} \text{ y } x = \frac{5}{2}$$

Se descarta $x = \frac{5}{2}$ por no encontrarse en el dominio de la función.

Se calcula la segunda derivada para comprobar si $x = -\frac{1}{3}$ es un máximo o un mínimo.

$$f''(x) = \frac{12x^4 - 52x^3 - 60x^2 - 25}{\sqrt{2}\,(x(4x^2 - 13x - 10))^{3/2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow f''\left(-\frac{1}{3}\right) = -51\sqrt{\frac{3}{94}} < 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = -\frac{1}{3} \text{ máximo}$$

La función crece en

$$\left(\frac{13 - \sqrt{329}}{8}, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{13 + \sqrt{329}}{8}, +\infty\right),$$

y decrece en $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$.

58 **INVESTIGA.** Indica cuáles deben ser los valores de a, b, c y d para que la función polinómica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cumpla lo siguiente.

- Tenga un máximo en el vértice de la parábola $g(x) = x^2 + 12x + 202$.
- Tenga un mínimo en el vértice de la parábola $h(x) = -2x^2 + 8x - 98$.

El máximo tendrá como coordenadas

$x = -\frac{b}{2a} = -6$ y $g(-6) = 166$

y el mínimo $x = -\frac{b}{2a} = 2$ y $h(2) = -90$.

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} f(-6) = 166 \\ f(2) = -90 \\ f'(-6) = 0 \\ f'(2) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} -216a + 36b - 6c + d = 166 \\ 8a + 4b + 2c + d = -90 \\ 108a - 12b + c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow a = 1,\ b = 6,\ c = -36,\ d = -50$$

Por tanto: $f(x) = x^3 + 6x^2 - 36x - 50$.

59 **RETO.** Calcula los valores de a y b para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ tenga un máximo en un punto donde corta al eje X, un mínimo en su punto de corte con el eje Y, y cumpla que $a + b = -1$.

Los puntos de corte son $(0, b)$ y $(x_0, 0)$, donde x_0 será una raíz del polinomio $x^3 + ax^2 + b$.

En estos puntos, la primera derivada se anula; $(0, b)$ es un mínimo y $(x_0, 0)$ es un máximo.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax \rightarrow$$

$$f'(0) = 3 \cdot 0^2 + 2a \cdot 0 = 0$$

$$f'(x_0) = 3x_0^2 + 2ax_0 = 0 \rightarrow \left.\begin{array}{r} x_0 = 0 \\ 3x_0 + 2a = 0 \end{array}\right\}$$

Si $x_0 = 0$, $f(x_0) = b = 0 \rightarrow a = -1$ y $f(x) = x^3 - x^2$, pero $(0, b) = (x_0, 0) = (0, 0)$ no es máximo y mínimo a la vez.

$$\text{Si } a = -\frac{3x_0}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow f(x_0) = x_0^3 + \left(-\frac{3x_0}{2}\right)x_0^2 + b = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x_0^3 - 3x_0^3 + 2b = 0 \\ -\frac{3x_0}{2} + b = -1 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} b = \dfrac{x_0^3}{2} \\ -\dfrac{3x_0}{2} + \dfrac{x_0^3}{2} = -1 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow x_0 = -2,\ b = -4,\ a = 3$

o bien $x_0 = 1,\ b = \dfrac{1}{2},\ a = -\dfrac{3}{2}$

Las posibles funciones son:

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ y $f(x) = x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}$

Comprobamos si los puntos obtenidos $(0, b)$ y $(x_0, 0)$ son el mínimo y el máximo respectivamente.

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

$f'(x) = 3x^2 + 6x$

$f''(x) = 6x + 6$

$f''(0) = 6 > 0 \rightarrow x = 0$ mínimo

$f''(-2) = -6 < 0 \rightarrow x = -2$ máximo

$f(x) = x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}$

$f'(x) = 3x^2 - 3x$

$f''(x) = 6x - 3$

$f''(0) = -3 < 0 \rightarrow x = 0$ máximo

$f''(1) = 3 > 0 \rightarrow x = 1$ mínimo

La función es $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$.

60 ¿En qué puntos de las gráficas de estas funciones es horizontal la tangente? Decide si estos puntos son máximos o mínimos.

a) $f(x) = 3x^2 - 15x + 13$

b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 8$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x + 1}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 9}{x}$

La tangente es horizontal cuando su pendiente es 0, por tanto, la primera derivada de la función es nula.

a) $f'(x) = 6x - 15 = 0 \rightarrow x = \dfrac{5}{2}$

$f''(x) = 6 > 0 \rightarrow x = \dfrac{5}{2}$ mínimo

b) $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$

$f''(x) = 12x + 6 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} f''(2) > 0 \rightarrow x = 2 \text{ mínimo} \\ f''(-3) < 0 \rightarrow x = -3 \text{ máximo} \end{cases}$

c) $f'(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 6}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} x = -1 - \sqrt{7} \\ x = -1 + \sqrt{7} \end{cases}$

$f''(x) = \dfrac{14}{(x+1)^3} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} f''\left(-1 - \sqrt{7}\right) < 0 \\ f''\left(-1 + \sqrt{7}\right) > 0 \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} x = -1 - \sqrt{7} \text{ máximo} \\ x = -1 + \sqrt{7} \text{ mínimo} \end{cases}$

d) $f'(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$

$f''(x) = \dfrac{18}{x^3} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} f''(3) > 0 \rightarrow x = 3 \text{ mínimo} \\ f''(-3) < 0 \rightarrow x = -3 \text{ máximo} \end{cases}$

61 Indica toda la información que sea posible sobre el punto de abscisa $x = a$ de la función $f(x)$ en cada caso.

a) $\begin{cases} f'(a) = 0 \\ f''(a) \text{ es negativa} \end{cases}$

b) $\begin{cases} f(a) = 0 \\ f'(a) = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} f'(a) = 0 \\ f(a) = 3 \\ f(x) \leq 3 \text{ siempre} \end{cases}$

d) $\begin{cases} f'(a) = 0 \\ f''(a) = 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} f'(a) = 0 \\ f''(a) = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} f'(a) = 0 \\ f'(x) > 0 \text{ para } x < a \\ f'(x) < 0 \text{ para } x > a \end{cases}$

a) $x = a$ es un máximo.

b) $x = a$ es un punto crítico, pero no se sabe si es máximo o mínimo.

c) $x = a$ es un punto crítico y como $f(x) \leq 3$ siempre y $f(a) = 3$, es un máximo o bien la función es constante en $x = a$.

d) $x = a$ es un mínimo.

e) $x = a$ es un punto crítico pero no se sabe si es un máximo, un mínimo o un punto de inflexión.

f) $x = a$ es un máximo, porque $f'(a) = 0$, crece en $x < a$ y decrece en $x > a$.

62 **INVESTIGA.** Si $f(x) = x^2 + 5x + 7$ explica, de manera razonada, cuáles son las coordenadas del mínimo de estas funciones.

a) $f(x - 2)$

b) $f(x) - 2$

c) $f(x + 1)$

d) $f(x) + 1$

$$f'(x) = 2x + 5 = 0 \to x = -\frac{5}{2}$$

El mínimo de $f(x)$ es $\left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

a) La función está desplazada 2 unidades a la derecha, por tanto, el mínimo es $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

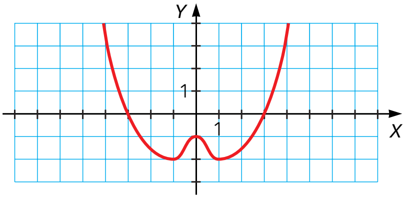
b) La función está desplazada 2 unidades hacia abajo, por tanto, el mínimo es $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{5}{4}\right)$.

c) La función está desplazada 1 unidad a la izquierda, por tanto, el mínimo es $\left(-\frac{7}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

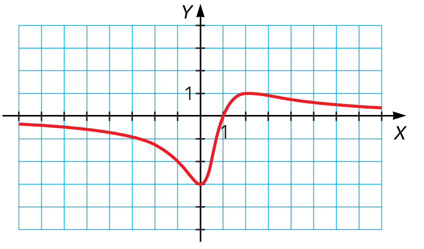
d) La función está desplazada 1 unidad hacia arriba, por tanto, el mínimo es $\left(-\frac{5}{2}, \frac{7}{4}\right)$.

63 Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y los mínimos de las siguientes funciones.

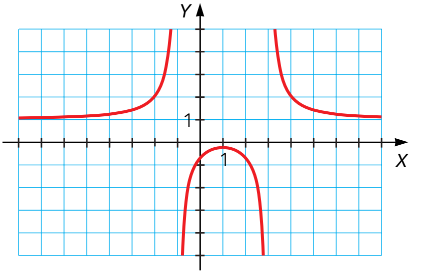
a)



b)



c)



a) Decrece en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ y crece en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

Tiene máximo en $(0, -1)$.

Tiene dos mínimos, en $(-1, -2)$ y $(1, -2)$.

b) Decrece en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y crece en $(0, 2)$.

Tiene un mínimo en $(0, -3)$ y un máximo en $(2, 1)$.

c) Crece en $(-\infty, -1) \cup (-1, 1)$ y decrece en $(1, 3) \cup (3, +\infty)$.

Tiene un máximo en $(1, -0{,}25)$.

64 Halla los máximos y los mínimos de estas funciones.

a) $f(x) = (x - 1)^2 \cdot (x + 3)^2$

b) $f(x) = (x - 2)^2 \cdot (x - 1)^2$

c) $f(x) = (x + 2)^2 \cdot (x - 1)^2$

a) $f'(x) = 4(x - 1)(x + 1)(x + 3) = 0 \to$
$\to x = 1 \quad x = -1 \quad x = -3$

$f''(x) = 4(3x^2 + 6x - 1)$
$f''(-1) = -16 < 0 \to x = -1$ máximo
$f''(1) = 32 > 0 \to x = 1$ mínimo
$f''(-3) = 32 > 0 \to x = -3$ mínimo

b) $f'(x) = 2(x - 1)(x - 2)(2x - 3) = 0 \to$
$\to x = 1 \quad x = 2 \quad x = \frac{3}{2}$

$f''(x) = 2(6x^2 - 18x + 13)$

$f''(1) = 2 > 0 \rightarrow x = 1$ mínimo

$f''\left(\frac{3}{2}\right) = -1 < 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$ máximo

$f''(2) = 2 > 0 \rightarrow x = 2$ mínimo

c) $f'(x) = 2(x - 1)(x + 2)(2x + 1) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = 1 \quad x = -2 \quad x = -\frac{1}{2}$

$f''(x) = 6(2x^2 + 2x - 1)$

$f''(-2) = 18 > 0 \rightarrow x = -2$ mínimo

$f''\left(-\frac{1}{2}\right) = -9 < 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$ máximo

$f''(1) = 18 > 0 \rightarrow x = 1$ mínimo

65 **RETO.** Sea f una función cuya derivada pasa por el punto (2, 6), indica el valor de $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 2x}$.

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 2x} = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x(x - 2)} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}\right) = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x} \cdot f'(2) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot f'(2) = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$$

66 **INVESTIGA.** Sea $f(x) = 2x^3 - kx^2 + 2x - k$, ¿para qué valores de k tiene $f(x)$ dos extremos relativos?

$f'(x) = 6x^2 - 2kx + 2 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = \frac{2k \pm \sqrt{4k^2 - 48}}{12}$

Para que tenga dos soluciones:

$4k^2 - 48 > 0 \rightarrow 4k^2 > 48 \rightarrow$

$\rightarrow k^2 > \frac{48}{4} = 12 \rightarrow$

$\rightarrow k \in \left(-\infty, -\sqrt{12}\right) \cup \left(\sqrt{12}, +\infty\right)$

67 **MATEMÁTICAS Y... MEDICINA.** Para estudiar la velocidad de propagación de una enfermedad, los epidemiólogos estudian los datos de incidencia de esa enfermedad hasta llegar a una fórmula matemática con la que calcular el número de infectados con el paso del tiempo.

El número de personas infectadas por una bacteria a partir del primer día que se detecta una enfermedad se puede calcular con la función:

$$f(x) = (x - 5)[(x - 5)^2 - 36(x - 5) + 225] + 15(x - 5) + 1856$$

en la que x representa el número de días transcurridos desde que se ha detectado la enfermedad.

a) Calcula la derivada de la función $f(x)$ y halla los valores en los que $f'(x) = 0$. ¿Qué significado tienen estos valores?

b) Determina la segunda derivada de $f(x)$ y sustituye, en la segunda derivada, los valores de x que anulan la primera derivada.

c) ¿En qué día habrá menos contagios? ¿En qué día habrá más?

a) $f(x) = x^3 - 51x^2 + 675x - 369$

$f'(x) = 3x^2 - 102x + 675 = 0 \rightarrow$

$x = 24$ y $x = 10$ son los posibles extremos relativos.

b) $f''(x) = 6x - 102 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} f''(24) > 0 \\ f''(10) < 0 \end{cases}$

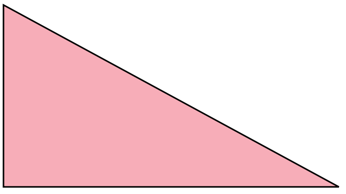
$x = 24$ es un mínimo y $x = 10$, un máximo.

c) El día en que habrá menos contagios será el 24.º y el día en que habrá más contagios será el 10.º.

Esta actividad puede utilizarse para trabajar el ODS 3, salud y bienestar.

GEOGEBRA

68 ●●○ Dados todos los triángulos rectángulos de hipotenusa 10:



a) Asigna una variable a cada uno de los catetos.

b) Aplica el teorema de Pitágoras para relacionar la longitud de los catetos y la hipotenusa.

c) Escribe la fórmula del área en función de los catetos.

d) Despeja un cateto en función del otro cateto en el teorema de Pitágoras.

e) Sustituye en la fórmula del área para obtener una función con una sola incógnita.

f) Deriva la función área y obtén sus máximos y mínimos.

g) Calcula las medidas de los catetos del triángulo de mayor área.

a) $x \rightarrow$ base $\qquad y \rightarrow$ altura

b) $x^2 + y^2 = 100$

c) $A = \dfrac{x \cdot y}{2}$

d) $y^2 = 100 - x^2 \rightarrow y = \sqrt{100 - x^2}$

e) $A = \dfrac{x \cdot \sqrt{100 - x^2}}{2}$

f) $$A' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{100 - x^2} + x\frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}}\right) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{100 - x^2 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} =$$
$$= \frac{50 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow x = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$
$$f''(x) = \frac{x(x^2 - 150)}{(100 - x^2)^{3/2}}$$
$$f''\left(\sqrt{50}\right) < 0 \rightarrow x = \sqrt{50} \text{ máximo}$$

g) $x = 5\sqrt{2} \qquad y = \sqrt{100 - 50} = 5\sqrt{2}$

Se trata de un triángulo rectángulo isósceles.

69 ●●○ Descompón el número 20 en dos sumandos tales que la suma de sus cuadrados sea mínima.

$$\left.\begin{array}{r} 20 = x + y \\ x^2 + y^2 = f(x, y) \end{array}\right\} \rightarrow$$
$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 20 - x = y \\ x^2 + (20 - x)^2 = f(x) \end{array}\right\}$$
$$f(x) = 2x^2 - 40x + 400$$
$$f'(x) = 4x - 40 = 0 \rightarrow x = 10$$
$$f''(x) = 4 > 0 \text{ siempre} \rightarrow x = 10 \text{ mínimo}$$
$$y = 20 - x \rightarrow y = 10$$

La descomposición pedida es $20 = 10 + 10$.

70 ●●○ Encuentra el número positivo que hace mínima la suma de él mismo y el cuádruple de su inverso.

$$\left.\begin{array}{l} x > 0 \\ x + \dfrac{4}{x} = f(x) \end{array}\right\}$$
$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = 0 \rightarrow x = 2$$
$$f''(x) = \frac{8}{x^3} \rightarrow f''(2) = 1 > 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow x = 2 \text{ mínimo}$$

Se descarta $x = -2$ porque el número buscado tiene que ser positivo.

71 ●●○ De todos los triángulos rectángulos en los que los catetos suman 10, ¿cuál tiene mayor área?

$$\left.\begin{array}{r} 10 = x + y \\ \dfrac{xy}{2} = f(x,y) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 10 - x = y \\ \dfrac{x(10 - x)}{2} = f(x) \end{array}\right\}$$
$$f'(x) = 5 - x = 0 \rightarrow x = 5$$
$$f''(x) = -1 < 0 \text{ siempre} \rightarrow$$
$$\rightarrow x = 5 \text{ máximo}$$
$$y = 10 - x \rightarrow y = 5$$

El triángulo con mayor área es el que tiene por catetos $x = 5$ e $y = 5$.

72 Se quiere construir el marco de una valla publicitaria rectangular de 12 metros cuadrados. Cada metro lineal de tramo horizontal cuesta 1,50 €, mientras que cada metro lineal de tramo vertical cuesta 2 €.

a) Determina las dimensiones del marco para que el coste sea mínimo.

b) ¿Cuánto cuesta el marco como mínimo?

a) $\left.\begin{array}{r} xy = 12 \\ \dfrac{3}{2}x + 2y = f(x, y) \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} y = \dfrac{12}{x} \\ \dfrac{3x}{2} + \dfrac{24}{x} = f(x) \end{array}\right\}$

$f'(x) = \dfrac{3x^2 - 48}{2x^2} = 0 \to x = 4$

$f''(x) = \dfrac{48}{x^3} \to f''(4) = \dfrac{48}{64} > 0 \to$

$\to x = 4$ mínimo

$y = \dfrac{12}{x} \to y = 3$

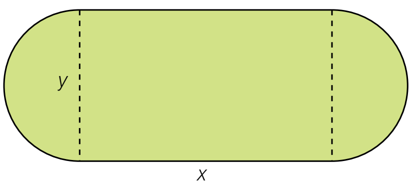
El marco de menor coste mide 4 m de largo y 3 m de ancho.

b) $2 \cdot 4 \cdot 1{,}5 + 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$

El marco cuesta 24 € como mínimo.

GEOGEBRA

73 Tenemos 200 m de tela metálica para vallar un recinto formado por un rectángulo y dos semicírculos.



Determina las dimensiones de x y de y para que el área del recinto sea máxima.

El perímetro del reciento es la suma del perímetro de la circunferencia y los dos lados más largos del rectángulo.

$P = \pi y + 2x = 200$

$A = \dfrac{\pi y^2}{4} + xy$

$\left.\begin{array}{r} \pi y + 2x = 200 \\ \dfrac{\pi y^2}{4} + xy = f(x, y) \end{array}\right\} \to$

$\to \left.\begin{array}{r} x = 100 - \dfrac{\pi y}{2} \\ \dfrac{\pi y^2}{4} + y\left(100 - \dfrac{\pi y}{2}\right) = f(y) \end{array}\right\}$

$f'(y) = 100 - \dfrac{\pi y}{2} = 0 \to y = \dfrac{200}{\pi}$

$f''(y) = \dfrac{-\pi}{2} < 0$ siempre $\to$

$\to y = \dfrac{200}{\pi}$ máximo

$y = \dfrac{200}{\pi}, x = 0$

El área del recinto es máxima si es un círculo de radio $\dfrac{100}{\pi}$ m.

74 **MATEMÁTICAS Y… EDICIÓN.**

A la hora de diseñar un periódico de papel, una de las decisiones más importantes son las dimensiones de sus hojas. Habitualmente los periódicos están formados por hojas de papel rectangulares en las que la superficie impresa es, aproximadamente, 682 cm², con márgenes superior e inferior de 2 cm y laterales de 1 cm.

Calcula las dimensiones de la hoja para que el consumo de papel sea mínimo.

Llamamos x al alto de la hoja e y al ancho.

Parte impresa:
$A = (x - 4)(y - 2) = 682\ \text{cm}^2$

Hoja completa:

$A = xy \to A = \dfrac{682y}{y - 2} + 4y$

$A' = \dfrac{4y^2 - 16y - 1348}{(y - 2)^2} = 0 \to$

$\to \begin{cases} x = 2 + \sqrt{341} \approx 20{,}46 \\ y = 4 + 2\sqrt{341} \approx 40{,}93 \end{cases}$

Las medidas de la hoja son 20,46 cm de alto y 40,93 cm de ancho.

75 Se desea encerrar la máxima área dentro de una valla rectangular de 500 m de perímetro.

a) Averigua cuáles son las longitudes de los lados.

b) ¿Cuáles serían las dimensiones del rectángulo si uno de sus lados limita con un río y no es preciso cerrarlo?

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + 2y = 500 \\ xy = f(x, y) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 250 - x \\ x(250 - x) = f(x) \end{array}\right\}$

$f'(x) = 250 - 2x = 0 \rightarrow x = 125$

$f''(x) = -2 < 0$ siempre $\rightarrow$
$\rightarrow x = 125$ máximo

$y = 250 - x \rightarrow y = 125$

Todos los lados miden 125 m, por tanto, se trata de un cuadrado.

b) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 500 \\ xy = f(x, y) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 500 - 2x \\ x(500 - 2x) = f(x) \end{array}\right\}$

$f'(x) = 500 - 4x = 0 \rightarrow x = 125$

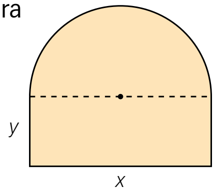
$f''(x) = -4 < 0$ siempre $\rightarrow$
$\rightarrow x = 125$ máximo

$y = 500 - 2x \rightarrow y = 250$

Las dimensiones del rectángulo buscado serían 125 m $\times$ 250 m.

76 El perímetro de la figura representada es 5 m.

Expresa su área en función de x e y e indica qué valores deben tomar para que sea máxima.



$$P = 2y + \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x = 5$$

$$A = xy + \frac{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} = xy + \frac{\pi x^2}{8}$$

$$\left.\begin{array}{r} 2y + \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x = 5 \\ xy + \frac{\pi x^2}{8} = f(x,y) \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} y = \frac{5}{2} - \frac{x}{2}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \\ f(x) = \frac{5x}{2} - \left(\frac{4+\pi}{8}\right)x^2 \end{array}\right\}$$

$$f'(x) = \frac{5}{2} - 2x\left(\frac{4+\pi}{8}\right) = 0 \rightarrow x = \frac{10}{4+\pi}$$

$$f''(x) = -2\left(\frac{4+\pi}{8}\right) < 0 \text{ siempre.}$$

Por tanto, para $x = \frac{10}{4+\pi}$ e $y = \frac{5}{4+\pi}$ se tiene que el área es máxima.

77 Halla los puntos de la curva $y^2 = 2x$ cuya distancia al punto (6, 0) es mínima.

La distancia del punto (6, 0) a un punto arbitrario de la curva $\left(x, \pm\sqrt{2x}\right)$ viene dado por la fórmula

$d = \sqrt{(x-6)^2 + \left(\pm\sqrt{2x}\right)^2}$, donde d representa el módulo del vector que tiene por extremos ambos puntos.

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 10x + 36}$$

$$f'(x) = \frac{x - 5}{\sqrt{x^2 - 10x + 36}} = 0 \rightarrow x = 5$$

$$f''(x) = \frac{11}{\sqrt{(x^2 - 10x + 36)^3}} > 0 \rightarrow$$

$\rightarrow x = 5$ mínimo

Los puntos pedidos son $\left(5, \sqrt{10}\right)$ y $\left(5, -\sqrt{10}\right)$.

78 Encuentra, entre todas las rectas que pasan por $P(2, 3)$, la que determina el triángulo de área mínima limitado por ella y la parte positiva de los ejes X e Y.

Como pasa por (2, 3) la ecuación es $y = mx + (3 - 2m)$, siendo m la pendiente. Por tanto, el triángulo buscado tendrá catetos de longitud igual a la distancia del origen a los puntos de corte de la recta con los ejes.

Por otro lado, se quiere maximizar el área, $\frac{xy}{2}$:

$$\left.\begin{array}{r} y = mx + (3 - 2m) \\ \frac{xy}{2} = f(x, y) \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} (x, 0) \rightarrow x = \frac{2m - 3}{m} \\ (0, y) \rightarrow y = 3 - 2m \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow f(m) = \frac{-4m^2 + 12m - 9}{2m}$$

$$f'(m) = \frac{-8m^2 + 18}{4m^2} = 0 \rightarrow m = \pm\frac{3}{2}$$

$$f''(m) = \frac{-9}{m^3}$$

$$f''\left(\frac{3}{2}\right) < 0 \rightarrow m = \frac{3}{2} \text{ se descarta.}$$

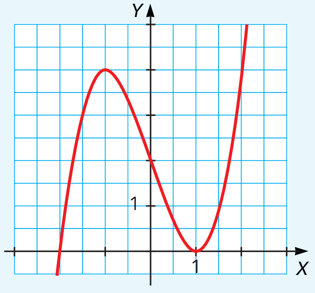
$$f''\left(\frac{-3}{2}\right) > 0 \rightarrow m = \frac{-3}{2} \text{ mínimo.}$$

La recta buscada es $y = -\frac{3}{2}x + 6$.

2. Estudia y representa gráficamente funciones

ACTIVIDADES FLASH

79 Dada la gráfica de $f(x)$, contesta.



a) ¿En qué puntos se cumple que $f(x) = 0$?

b) ¿En qué puntos se cumple que $f'(x) = 0$?

c) ¿En qué punto se cumple que $f''(x) = 0$?

d) ¿Qué signo tiene $f(0)$?

e) ¿Qué signo tiene $f'(-2)$?

f) ¿Qué signo tiene $f''(1)$?

g) ¿Qué signo tiene $f''(2)$?

a) En $x = -2$ y $x = 1$

b) En $x = -1$ y $x = 1$

c) En $x = 0$

d) $f(x) = 2 > 0$

e) $f'(-2) > 0$ porque la función es creciente en $x = -2$.

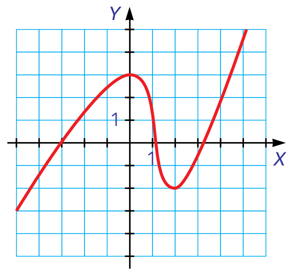
f) $f''(1) > 0$ porque la función en cóncava en $x = 1$.

g) $f''(2) > 0$ porque la función es cóncava en $x = 2$.

80 **INVENTA.** Representa gráficamente una función que cumpla las siguientes condiciones.

- Su dominio es $\mathbb{R}$ y no tiene asíntotas.
- Crece en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y decrece en $(0, 2)$.
- En los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 2$ la tangente a la curva es horizontal.

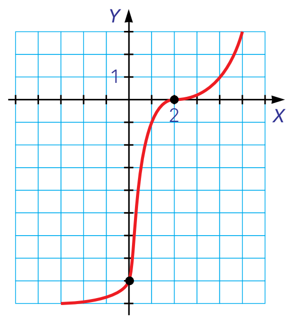
Respuesta abierta. Por ejemplo:



81 **INVENTA.** Representa una función tal que:

- Su dominio es $\mathbb{R}$.
- Siempre crece y no tiene asíntotas.
- Corta el eje Y en $(0, -8)$.
- En el punto $(2, 0)$ tiene tangente horizontal y $f''(2) = 0$.

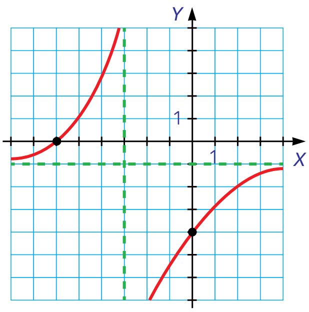
Respuesta abierta. Por ejemplo:



82 ●●○ **INVENTA.** Representa gráficamente una función que tenga las siguientes características.

- Su dominio es $\mathbb{R} - \{-3\}$.
- Tiene dos asíntotas, una vertical $x = -3$ y otra horizontal $y = -1$.
- Siempre crece.
- Corta los ejes en $(-6, 0)$ y $(0, -4)$.

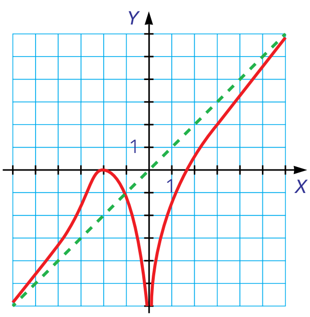
Respuesta abierta. Por ejemplo:



83 ●●○ **INVENTA.** Representa una función tal que:

- Su dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$.
- La recta $x = 0$ es asíntota vertical.
- La recta $y = x$ es asíntota oblicua.
- Cumple que $f'(x) > 0$ en los intervalos $(-\infty, -2)$ y en $(0, +\infty)$, $f'(x) < 0$ en el intervalo $(-2, 0)$.
- $f'(-2) = 0$

Respuesta abierta. Por ejemplo:



84 ●●○ Sea la función:

$$f(x) = 4x^3 + 15x^2 - 18x + 10$$

a) Determina sus máximos y mínimos.

b) Calcula $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

c) Haz un esbozo de la gráfica de la función.

a) $f'(x) = 12x^2 + 30x - 18 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = -3 \qquad x = \dfrac{1}{2}$

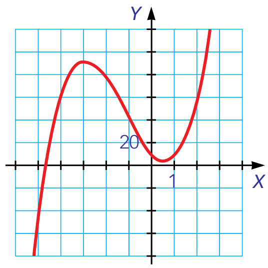
$$f''(x) = 24x + 30 \rightarrow \begin{cases} f''(-3) = -42 < 0 \\ f''\left(\dfrac{1}{2}\right) = 42 > 0 \end{cases}$$

$x = -3$ es un máximo y $x = \dfrac{1}{2}$ es un mínimo.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (4x^3 + 15x^2 - 18x + 10) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (4x^3 + 15x^2 - 18x + 10) = -\infty$

c)



85 ●●○ Considera la función $f(x) = x^3 + 6x^2 - 36x + 29$.

a) Determina su dominio.

b) Decide si tiene alguna asíntota y, en caso afirmativo, determina su ecuación.

c) ¿Tiene puntos de corte con los ejes? ¿Cuáles son?

d) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y halla sus máximos y mínimos.

e) Estudia su curvatura.

f) Representa la función.

a) Dom $f(x) = \mathbb{R}$, por ser una función polinómica.

b) No hay asíntotas verticales porque el dominio es $\mathbb{R}$.

No hay asíntotas horizontales porque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

No hay asíntotas oblicuas.

c) $f(x) = x^3 + 6x^2 - 36x + 29 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = 1 \qquad x = \dfrac{-7 \pm 5\sqrt{5}}{2}$

Los puntos de corte con el eje X son $(1, 0)$, $\left(\dfrac{-7 + 5\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ y $\left(\dfrac{-7 - 5\sqrt{5}}{2}, 0\right)$.

El punto de corte con el eje Y es $(0, 29)$.

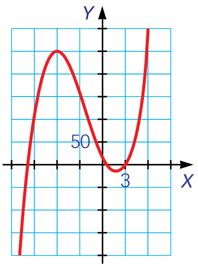
d) $f'(x) = 3x^2 + 12x - 36 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow x = -6 \qquad x = 2$

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -6) \cup (2, +\infty)$ y decreciente en $(-6, 2)$, con un máximo en $(-6, 245)$ y un mínimo en $(2, -11)$.

e) $f''(x) = 6x + 12 = 0 \rightarrow x = -2$

$f(x)$ es convexa en $(-\infty, -2)$ y cóncava en $(-2, +\infty)$.

f)



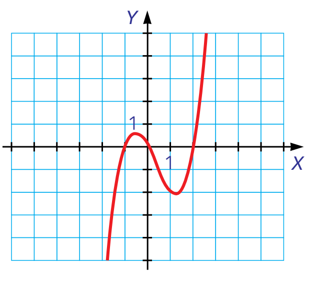
86 Representa gráficamente las siguientes funciones haciendo un estudio sobre su crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos, concavidad y convexidad.

a) $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$

b) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$

c) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

a)



$f'(x) = 3x^2 - 2x - 2 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$

$f(x)$ crece en

$\left(-\infty, \dfrac{1 - \sqrt{7}}{3}\right) \cup \left(\dfrac{1 + \sqrt{7}}{3}, +\infty\right)$

y decrece en $\left(\dfrac{1 - \sqrt{7}}{3}, \dfrac{1 + \sqrt{7}}{3}\right)$.

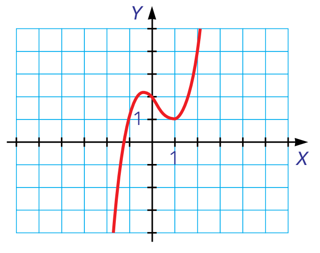
$f(x)$ tiene un mínimo en $x = \dfrac{1 + \sqrt{7}}{3}$

y un máximo en $x = \dfrac{1 - \sqrt{7}}{3}$.

$f''(x) = 6x - 2 = 0 \rightarrow x = \dfrac{1}{3}$

$f(x)$ es convexa en $\left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right)$ y cóncava en $\left(\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$.

b)



$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = -\dfrac{1}{3} \qquad x = 1$

$f(x)$ crece en $\left(-\infty, -\dfrac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$

y decrece en $\left(-\dfrac{1}{3}, 1\right)$.

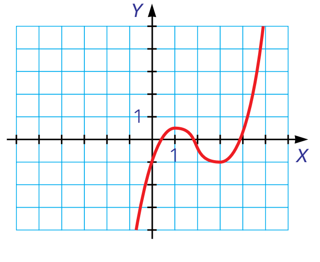
$f(x)$ tiene un mínimo en $x = 1$

y un máximo en $x = -\dfrac{1}{3}$.

$f''(x) = 6x - 2 = 0 \rightarrow x = \dfrac{1}{3}$

$f(x)$ es convexa en $\left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right)$ y cóncava en $\left(\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$.

c)



$f'(x) = x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow x = 1 \qquad x = 3$

$f(x)$ crece en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ y decrece en $(1, 3)$.

$f(x)$ tiene un mínimo en $x = 3$ y un máximo en $x = 1$.

$f''(x) = 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2$

$f(x)$ es convexa en $(-\infty, 2)$ y cóncava en $(2, +\infty)$.

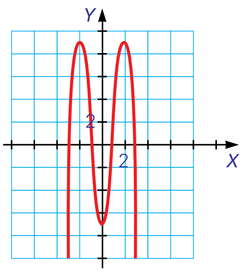
87 **INVENTA.** Dibuja una función $f(x)$ simétrica respecto al eje Y con dos máximos en $x = -2$, $x = 2$.

a) Esboza la gráfica de $f'(x)$ y estudia su simetría.

b) Estudia la simetría de $f''(x)$.

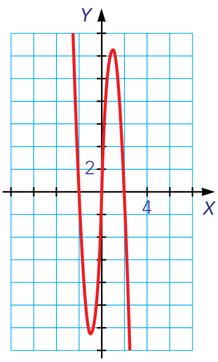
Respuesta abierta. Por ejemplo:
$f(x) = -x^4 + 8x^2 - 7$

Es una función par, simétrica respecto al eje Y. Tiene dos máximos en $x = 2$ y $x = -2$ y un mínimo en $x = 0$.



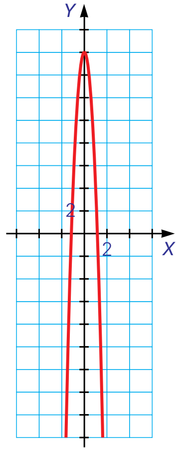
a) $f'(x) = -4x^3 + 16x$

Es una función con simetría impar, simétrica respecto al origen. Los puntos $x = 2$, $x = -2$ y $x = 0$ son puntos de corte con el eje X.



b) $f''(x) = -12x^2 + 16$

Es una función par, simétrica respecto al eje Y.



88 Estudia y representa las funciones polinómicas.

a) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 10$

b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$

c) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 48x^2 + 144x + 212$

d) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$

a) Dom $f = \mathbb{R}$

La función es polinómica, por tanto, no tiene asíntotas.

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 72x = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x(x^2 - x - 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

$f(x)$ es creciente en $(-2, 0) \cup (3, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, -2) \cup (0, 3)$.

$f(x)$ tiene dos mínimos en $(-2, -54)$ y $(3, -179)$ y un máximo en $(0, 10)$

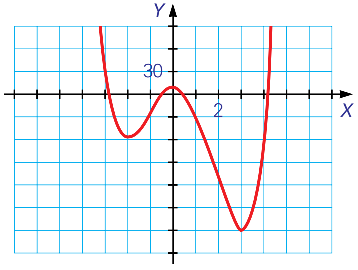
$f''(x) = 36x^2 - 24x - 72 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{19}}{2}$$

$f(x)$ es cóncava en

$$\left(-\infty, \frac{1 - \sqrt{19}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{19}}{2}, +\infty\right)$$

y convexa en $\left(\frac{1 - \sqrt{19}}{2}, \frac{1 + \sqrt{19}}{2}\right)$.



b) Dom $f = \mathbb{R}$

La función es polinómica, por tanto, no tiene asíntotas.

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$

$3x^2 - 12x + 12 = 0 \rightarrow$

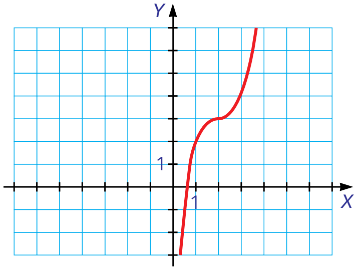
$\rightarrow 3(x-2)^2 = 0 \rightarrow x = 2$

$f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en $\mathbb{R}$.

$f'(2) = 0 \rightarrow x = 2$ es un punto de inflexión.

$f''(x) = 6x - 12$

$f(x)$ es cóncava en $(2, +\infty)$ y convexa en $(-\infty, 2)$.



c) Dom $f = \mathbb{R}$

La función es polinómica, por tanto, no tiene asíntotas.

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 96x + 144 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$

$f(x)$ es creciente en $(-3, 2) \cup (2, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, -3)$.

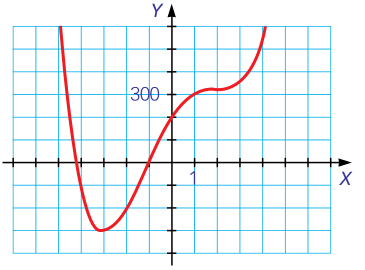
$f(x)$ tiene un mínimo en $(-3, -301)$.

$f''(x) = 36x^2 - 24x - 96 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$

$f(x)$ es cóncava en $(2, +\infty)$

y convexa en $\left(-\dfrac{4}{3}, 2\right) \cup \left(-\infty, -\dfrac{4}{3}\right)$.



d) Dom $f(x) = \mathbb{R}$

La función es polinómica, por tanto, no tiene asíntotas.

$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 0 \rightarrow$

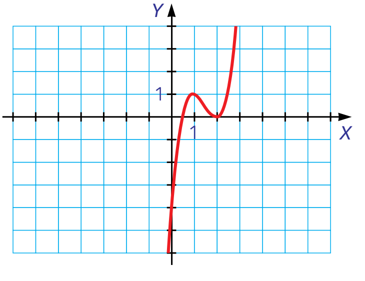
$\rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ y decreciente en $(1, 2)$.

$f(x)$ tiene un máximo en $(1, 1)$ y un mínimo en $(2, 0)$.

$f''(x) = 12x - 18 = 0 \rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

$f(x)$ es convexa en $\left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right)$ y cóncava en $\left(\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$.



89 Dada la función $f(x) = \dfrac{3x-2}{x+4}$, resuelve.

a) Determina su dominio.

b) Halla sus asíntotas.

c) Encuentra los intervalos en los que la función es creciente y en los que es decreciente.

d) Calcula los máximos y los mínimos.

e) Estudia la concavidad y la convexidad.

f) Representa la función.

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{-4\}$

b) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -4^-} \dfrac{3x-2}{x+4} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -4^+} \dfrac{3x-2}{x+4} = -\infty \end{array}\right\} \to$

$\to x = -4$ es una asíntota vertical.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x-2}{x+4} = 3 \to$

$\to y = 3$ es una asíntota horizontal.

Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

c) $f'(x) = \dfrac{3(x+4) - (3x-2)}{(x+4)^2} = \dfrac{14}{(x+4)^2}$

$f'(x) > 0 \to f(x)$ es creciente en $(-\infty, -4) \cup (-4, +\infty)$.

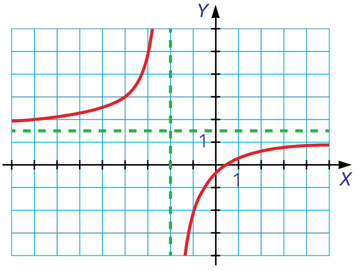
d) La función es siempre creciente, por tanto, no tiene máximos ni mínimos.

e) $f''(x) = -\dfrac{14 \cdot 2(x+4)}{(x+4)^4} = -\dfrac{28}{(x+4)^3}$

La función es convexa en $(-4, +\infty)$ y cóncava en $(-\infty, -4)$.

f) Punto de corte con el eje X: $\left(\dfrac{2}{3}, 0\right)$

Punto de corte con el eje Y: $\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$



90 **INVESTIGA.** Representa una función $f'(x)$ que tenga un mínimo en $x = 0$ y un máximo en $x = -3$ y corte el eje X en $x = -4, x = -1, x = 1$.
A partir de ella, encuentra la abscisa de los máximos y mínimos de las siguientes funciones.

a) $f(x)$

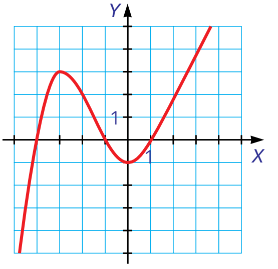
b) $g(x) = -f(x)$

c) $h(x) = 2f(x)$

d) $i(x) = f(x-5)$

e) $j(x) = f(x) + 5$

f) $k(x) = e^{f(x+2)} + 3$



$f'(-4) = 0, f'(-1) = 0, f'(1) = 0 \to$
$\to x = -4, x = -1$ y $x = 1$ son extremos relativos.

a) Los máximos y mínimos tienen las mismas abscisas $x = -4, x = -1$ y $x = 1$.

b) Como $g(x) = -f(x)$, los valores en los que se anula la primera derivada de $g(x)$ son los mismos que en los que se anula la derivada de $f(x)$, por tanto, son los mismos que en el apartado a).

c) Como $h(x) = 2f(x) \to h'(x) = 2f'(x)$, $h'(x)$ se anula en los mismos valores que $f'(x)$.

d) Como $i(x) = f(x-5) \to i'(x) = f'(x-5)$, los valores en los que se anula $i'(x)$ son los mismos que en los que se anula $f'(x)$ pero desplazados 5 unidades a la derecha, es decir, $x = 1, x = 4$ y $x = 6$.

e) Como $j(x) = f(x) + 5 \to j'(x) = f'(x)$, por tanto, son los mismos valores.

f) Como $k(x) = e^{f(x+2)} + 3 \to$
$\to k'(x) = e^{f(x+2)} \cdot f'(x+2)$, $k'(x)$ se anula en los mismos valores que $f'(x)$ pero desplazados 2 unidades a la izquierda, es decir, $x = -6, x = -3$ y $x = -1$.

91 Calcula las asíntotas de estas funciones y haz su representación gráfica.

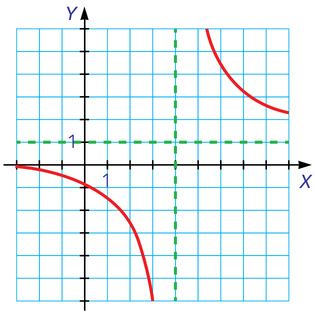
a) $f(x) = \dfrac{x+3}{x-4}$

b) $f(x) = \dfrac{6x}{x-4}$

a) Asíntota horizontal:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+3}{x-4} = 1 \to y = 1$$

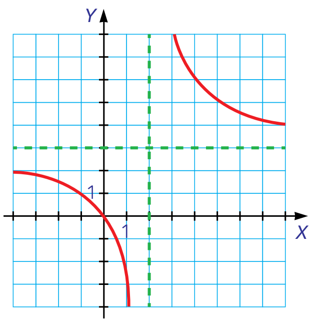
Asíntota vertical: $x - 4 = 0 \to x = 4$



b) Asíntota horizontal:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6x}{x-4} = 6 \to y = 6$$

Asíntota vertical: $x - 4 = 0 \to x = 4$



92 Sea la función:

$$f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$$

a) Encuentra los máximos y los mínimos de la función.

b) Determina las ecuaciones de sus asíntotas y la posición de la curva respecto de ellas.

c) Construye un esbozo de la gráfica de la función.

a) $f'(x) = \dfrac{3x^2 - x^4}{(1-x^2)^2} = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$

$$f''(x) = \frac{6x + 2x^3}{(1-x^2)^3}$$

$f''(-\sqrt{3}) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} > 0 \to$

$\to$ En $x = -\sqrt{3}$ tiene un mínimo.

$f''(0) = 0 \to$ En $x = 0$ no tiene un máximo ni un mínimo.

$f''(\sqrt{3}) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} < 0 \to$

$\to$ En $x = \sqrt{3}$ tiene un máximo.

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \to$$

$\to x = -1$ es una asíntota vertical.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \to$$

$\to x = 1$ es una asíntota vertical.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \to$

$\to$ No tiene asíntota horizontal.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x - x^3} = -1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{1-x^2} + x\right) = 0$$

Tiene la asíntota oblicua $y = -x$.

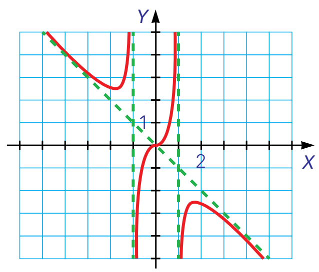
Si $x = 1\,000 \to f(x) - (-x) < 0 \to$

$\to$ Cuando x tiende a $+\infty$, la función está por debajo de la asíntota.

Si $x = -1\,000 \to f(x) - (-x) > 0 \to$

$\to$ Cuando x tiende a $-\infty$, la función está por encima de la asíntota.

c)



93 Estudia la posición de la gráfica de estas funciones respecto de sus asíntotas y, después, represéntalas gráficamente.

a) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x-3}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x-3}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

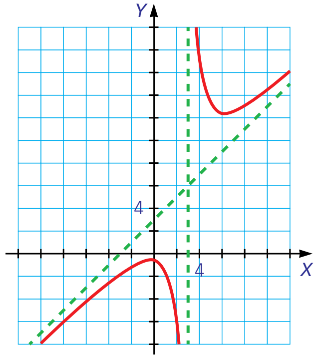
a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x^2+2}{x-3} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2+2}{x-3} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow$

→ Tiene una asíntota vertical en $x = 3$ y no tiene asíntota horizontal.

Tiene asíntota oblicua $y = x + 3$.

En $x < 3$: $\dfrac{x^2+2}{x-3} < x + 3$ → La gráfica está por debajo de la asíntota.

En $x > 3$: $\dfrac{x^2+2}{x-3} > x + 3$ → La gráfica está por encima de la asíntota.



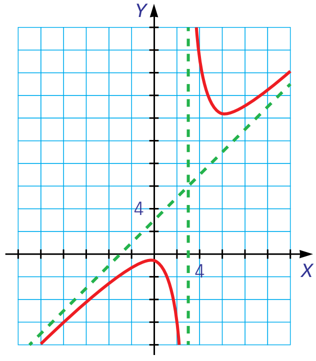
b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x^2-2}{x-3} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2-2}{x-3} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow$

→ Tiene una asíntota vertical en $x = 3$ y no tiene asíntota horizontal.

Tiene asíntota oblicua $y = x + 3$.

En $x < 3$: $\dfrac{x^2-2}{x-3} < x + 3$ → La gráfica está por debajo de la asíntota.

En $x > 3$: $\dfrac{x^2-2}{x-3} > x + 3$ → La gráfica está por encima de la asíntota.



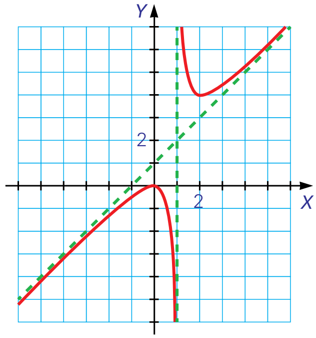
c) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2}{x-1} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2}{x-1} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow$

→ Tiene asíntota vertical en $x = 1$ y no tiene asíntota horizontal.

Tiene asíntota oblicua $y = x + 1$.

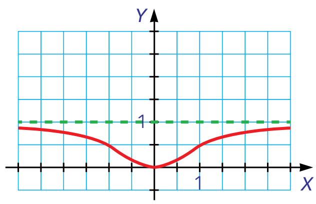
En $x < 1$: $\dfrac{x^2}{x-1} < x + 1$ → La gráfica está por debajo de la asíntota.

En $x > 1$: $\dfrac{x^2}{x-1} > x + 1$ → La gráfica está por encima de la asíntota.



d) Tiene asíntota horizontal en $y = 1$ y no tiene asíntotas verticales ni oblicua.

$\forall\ x \in \mathbb{R} \rightarrow \dfrac{x^2}{x^2+1} < 1$ → La gráfica está por debajo de la asíntota.



94 Estudia y representa estas funciones racionales.

a) $f(x) = \dfrac{5x+1}{x-2}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x-3}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{2-x}$

d) $f(x) = \dfrac{2x^2+2x-4}{x^2+x-6}$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2\}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{5x+1}{x-2} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{5x+1}{x-2} = +\infty\end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow x = 2$ es una asíntota vertical.

$\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{5x+1}{x-2} = 5 \rightarrow$

$\rightarrow y = 5$ es una asíntota horizontal.

Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

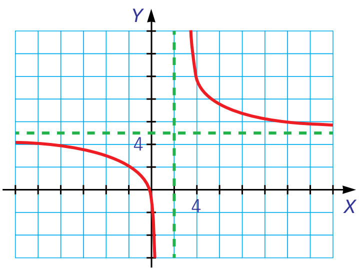
Punto de corte con el eje X: $\left(-\dfrac{1}{5}, 0\right)$

Punto de corte con el eje Y: $\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$

$f'(x) = \dfrac{5(x-2)-(5x+1)}{(x-2)^2} = \dfrac{-11}{(x-2)^2}$

$f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

La función no tiene máximos ni mínimos.



b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{3\}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^2-2x+1}{x-3} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2-2x+1}{x-3} = +\infty\end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow x = 3$ es una asíntota vertical.

$\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2-2x+1}{x-3} = \infty \rightarrow$

$\rightarrow$ La función no tiene asíntota horizontal.

$m = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-3x} = 1$

$n = \lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2-2x+1}{x-3} - x\right) = 1$

Asíntota oblicua: $y = x+1$

Punto de corte con el eje X: $(1, 0)$

Punto de corte con el eje Y: $\left(0, -\dfrac{1}{3}\right)$

$f'(x) = \dfrac{(2x-2)(x-3)-(x^2-2x+1)}{(x-3)^2} =$

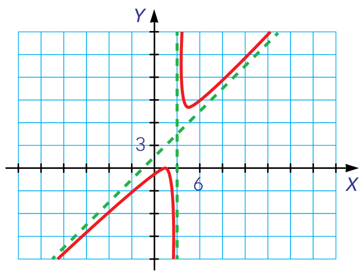
$= \dfrac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}$

$x^2-6x+5 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$ y decreciente en $(1, 3) \cup (3, 5)$.

Máximo: $(1, 0)$

Mínimo: $(5, 8)$



c) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2\}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2}{2-x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2}{2-x} = -\infty\end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow x = 2$ es una asíntota vertical.

$\lim\limits_{n\to \infty} \dfrac{x^2}{2-x} = \infty \rightarrow$

$\rightarrow$ La función no tiene asíntota horizontal.

$m = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2}{2x-x^2} = -1$

$n = \lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2}{2-x} + x\right) = -2$

Asíntota oblicua: $y = -x-2$

Punto de corte con los ejes: (0, 0)

$$f'(x) = \frac{2x(2-x)+x^2}{(2-x)^2} =$$

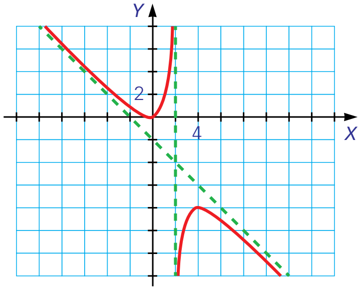
$$= \frac{4x - x^2}{(2-x)^2} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ y creciente en $(0, 2) \cup (2, 4)$.

Máximo: $(4, -8)$

Mínimo: $(0, 0)$



d) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-3, 2\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{2x^2+2x-4}{x^2+x-6} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{2x^2+2x-4}{x^2+x-6} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow x = -3$ es una asíntota vertical.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2x^2+2x-4}{x^2+x-6} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2x^2+2x-4}{x^2+x-6} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow x = 2$ es una asíntota vertical.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+2-4}{x^2+x-6} = 1 \rightarrow$$

$\rightarrow y = 1$ es una asíntota horizontal.

Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

Puntos de corte con el eje X: $(1, 0)$ y $(-2, 0)$

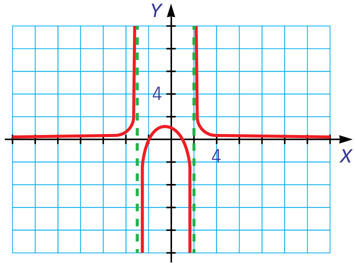
Punto de corte con el eje Y: $\left(0, \frac{2}{3}\right)$

$$f'(x) = \frac{-16x - 8}{(x^2+x-6)^2}$$

$$-16x - 8 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -3) \cup \left(-3, \frac{1}{2}\right)$ y decreciente en $\left(-\frac{1}{2}, 2\right) \cup (2, +\infty)$.

Máximo: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{18}{25}\right)$



95 Representa estas funciones racionales, analizando sus características.

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 3x - 4}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2x + 1}$

c) $f(x) = \dfrac{x + 5}{x^2 - 3x - 4}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 2}{x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + x - 6}$

f) $f(x) = \dfrac{x - 3}{(x+1)(x-1)}$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 4\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x}{x^2-3x-4} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x}{x^2-3x-4} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow x = -1$ es una asíntota vertical.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{x}{x^2-3x-4} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{x}{x^2-3x-4} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow x = 4$ es una asíntota vertical.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-3x-4} = 0 \rightarrow$$

$\rightarrow y = 0$ es una asíntota horizontal.

Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

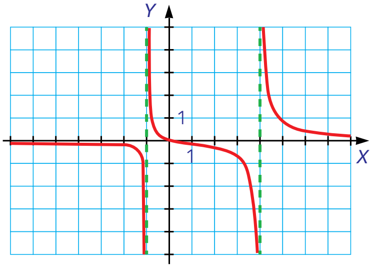
Punto de corte con los ejes: (0, 0)

$$f'(x) = \frac{x^2 - 3x - 4 - x(2x - 3)}{(x^2 - 3x - 4)^2} =$$

$$= \frac{-x^2 - 4}{(x^2 - 3x - 4)^2}$$

$f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 4) \cup (4, +\infty)$.

La función no tiene máximos ni mínimos.



b) Dom $f = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2x + 1} = +\infty \\ &\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2x + 1} = +\infty \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow x = -1$ es una asíntota vertical.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2x + 1} = 1 \rightarrow$$

$\rightarrow y = 1$ es una asíntota horizontal.

Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

Punto de corte con el eje Y: (0, 3)

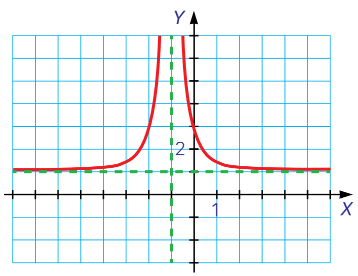
$$f'(x) = \frac{-4x - 4}{(x^2 + 2x + 1)^2} = 0 \rightarrow$$

$\rightarrow -4x - 4 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = -1 \notin$ Dom f

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1)$ y decreciente en $(-1, +\infty)$.

La función no tiene máximos ni mínimos.



c) Dom $f = \mathbb{R} - \{-1, 4\}$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to -1^-} \frac{x + 5}{x^2 - 3x - 4} = +\infty \\ &\lim_{x \to -1^+} \frac{x + 5}{x^2 - 3x - 4} = -\infty \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow x = -1$ es una asíntota vertical.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 4^-} \frac{x + 5}{x^2 - 3x - 4} = -\infty \\ &\lim_{x \to 4^+} \frac{x + 5}{x^2 - 3x - 4} = +\infty \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow x = 4$ es una asíntota vertical.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + 5}{x^2 - 3x - 4} = 0 \rightarrow$$

$\rightarrow y = 0$ es una asíntota horizontal.

Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

Punto de corte con el eje X: $(-5, 0)$

Punto de corte con el eje Y: $\left(0, -\frac{5}{4}\right)$

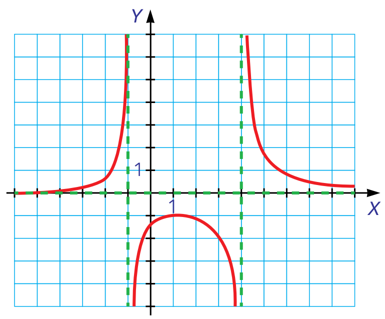
$$f'(x) = \frac{x^2 - 3x - 4 - (x + 5)(2x - 3)}{(x^2 - 3x - 4)^2} =$$

$$= \frac{-x^2 - 10x + 11}{(x^2 - 3x - 4)^2} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow -x^2 - 10x + 11 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -11 \\ x = 1 \end{cases}$$

$f(x)$ es creciente en $(-11, -1) \cup (-1, 1)$ y es decreciente en $(-\infty, -11) \cup (1, 4) \cup (4, +\infty)$.

Mínimo: $\left(-11, -\frac{1}{25}\right)$ Máximo: $(1, -1)$



d) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 + 4x + 2}{x^2} = +\infty \\ &\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 + 4x + 2}{x^2} = +\infty \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow x = 0$ es una asíntota vertical.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4x+2}{x^2} = 1 \rightarrow$$

$\rightarrow y = 1$ es una asíntota horizontal.

Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

Puntos de corte con el eje X:

$\left(-\sqrt{2}-2,\, 0\right)$ y $\left(\sqrt{2}-2,\, 0\right)$

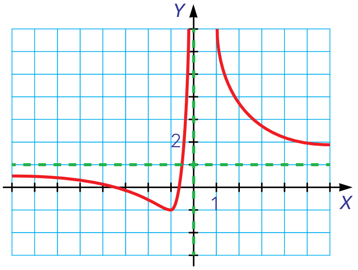
$$f'(x) = \frac{(2x+4)\cdot x^2 - (x^2+4x+2)\cdot 2x}{(x^2)^2} =$$

$$= \frac{-4x-4}{x^3} = 0 \rightarrow$$

$\rightarrow -4x - 4 = 0 \rightarrow x = -1$

$f(x)$ es creciente en $(-1, 0)$ y decreciente en $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

Mínimo: $(-1, 1)$



e) Dom $f = \mathbb{R} - \{-3, 2\}$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to -3^-} \frac{2x}{x^2+x-6} = -\infty \\ &\lim_{x\to -3^+} \frac{2x}{x^2+x-6} = +\infty \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow x = -3$ es una asíntota vertical.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 2^-} \frac{2x}{x^2+x-6} = -\infty \\ &\lim_{x\to 2^+} \frac{2x}{x^2+x-6} = +\infty \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow x = 2$ es una asíntota vertical.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x^2+x-6} = 0 \rightarrow$$

$\rightarrow y = 0$ es una asíntota horizontal.

Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

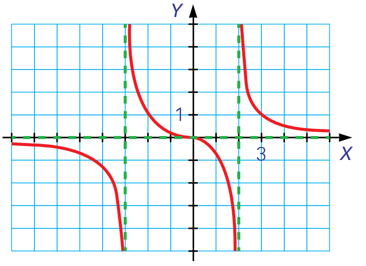
Punto de corte con los ejes: $(0, 0)$

$$f'(x) = \frac{2(x^2+x-6) - 2x(2x+1)}{(x^2+x-6)^2} =$$

$$= \frac{-2x^2-12}{(x^2+x-6)^2}$$

$f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -3) \cup (-3, 2) \cup (2, +\infty)$.

La función no tiene máximos ni mínimos.



f) Dom $f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to -1^-} \frac{x-3}{(x+1)(x-1)} = -\infty \\ &\lim_{x\to -1^+} \frac{x-3}{(x+1)(x-1)} = +\infty \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow x = -1$ es una asíntota vertical.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 1^-} \frac{x-3}{(x+1)(x-1)} = +\infty \\ &\lim_{x\to 1^+} \frac{x-3}{(x+1)(x-1)} = -\infty \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow x = 1$ es una asíntota vertical.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x-3}{(x+1)(x-1)} = 0 \rightarrow$$

$\rightarrow y = 0$ es una asíntota horizontal.

Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

Punto de corte con el eje X: $(3, 0)$

Punto de corte con el eje Y: $(0, 3)$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1 - (x-3)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{-x^2+6x-1}{(x^2-1)^2} = 0 \rightarrow$$

$\rightarrow x = 3 \pm 2\sqrt{2}$

$f(x)$ es decreciente en

$(-\infty, -1) \cup \left(-1, 3-2\sqrt{2}\right) \cup$

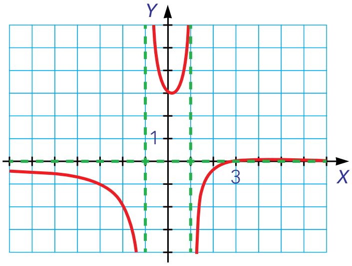
$\cup \left(3+2\sqrt{2}, +\infty\right)$

y creciente en

$\left(3-2\sqrt{2}, 1\right) \cup \left(1, 3+2\sqrt{2}\right)$.

Máximo: $\left(3+2\sqrt{2}, \dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}\right)$

Mínimo: $\left(3-2\sqrt{2}, \dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}\right)$



96 Estudia y representa las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^2 - 1}$ c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 + 1}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 1}$ d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 + 1}$

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

No tiene puntos de corte con el eje X.

Punto de corte con el eje Y: $(0, -1)$

No tiene asíntotas horizontales.

Tiene asíntotas verticales en $x = \pm 1$.

$$f'(x) = \frac{2x(x^4 - 2x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

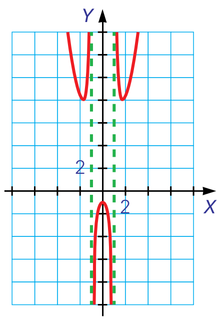
La función decrece en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup (0, 1) \cup \left(1, +\sqrt{3}\right)$
y crece en $\left(-\sqrt{3}, -1\right) \cup (-1, 0) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$.

$$f''(x) = \frac{2(x^6 - 3x^4 + 15x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^3}$$

$f''\left(-\sqrt{3}\right) = 12 > 0 \rightarrow x = -\sqrt{3}$ mínimo

$f''(0) = -6 \rightarrow x = 0$ máximo

$f''\left(\sqrt{3}\right) = 12 > 0 \rightarrow x = \sqrt{3}$ mínimo



b) Dom $f = \mathbb{R} - \{1\}$

Punto de corte con el eje X:

$f(x) = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow$

$\rightarrow$ El punto de corte es $(2, 0)$.

Punto de corte con el eje Y:

$x = 0 \rightarrow f(0) = -2 \rightarrow$

$\rightarrow$ El punto de corte es $(0, -2)$.

No tiene asíntotas verticales.

Tiene asíntota horizontal en $y = 0$.

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 4x + 3}{(x^2 + x + 1)^2}$$

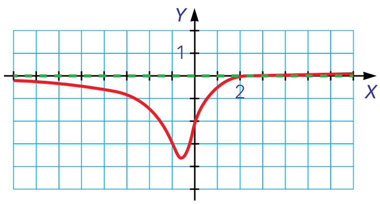
$f'(x) < 0$ en $x \in \left(-\infty, 2 - \sqrt{7}\right) \cup$
$\cup \left(2 + \sqrt{7}, +\infty\right) \rightarrow f(x)$ crece.

$f'(x) > 0$ en $x \in \left(2 - \sqrt{7}, 2 + \sqrt{7}\right) \rightarrow$
$\rightarrow f(x)$ decrece.

$$f''(x) = \frac{2(x^3 - 6x^2 + 9x - 1)}{(x^2 + x + 1)^3}$$

$f''\left(2 - \sqrt{7}\right) > 0 \rightarrow$
$\rightarrow x = 2 - \sqrt{7}$ es mínimo.

$f''\left(2 + \sqrt{7}\right) < 0 \rightarrow$
$\rightarrow x = 2 + \sqrt{7}$ es máximo.



c) Dom $f = \mathbb{R} - \{-1\}$

Punto de corte con el eje X: $(1, 0)$

Punto de corte con el eje Y: $(0, -1)$

Tiene asíntota horizontal en $y = 0$.

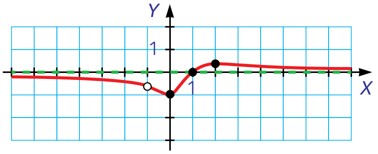
$$f'(x) = -\frac{x(x - 2)}{(x^2 - x + 1)^2} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$f(x)$ crece en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
y decrece en $(0, 2)$.

$$f''(x) = \frac{2(x^3 - 3x^2 + 1)}{(x^2 - x + 1)^3} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} f''(0) = 2 > 0 \rightarrow x = 0 \text{ mínimo} \\ f''(2) = \dfrac{-2}{9} < 0 \rightarrow x = 2 \text{ máximo} \end{cases}$$



d) Dom $f = \mathbb{R} - \{-1\}$

No tiene puntos de corte con el eje X.

Punto de corte con el eje Y: (0, 1)

Tiene asíntota vertical en $x = -1$.

Tiene asíntota horizontal en $y = 0$.

$$f'(x) = -\frac{x(x^3 + 3x^2 - 2)}{(x^3 + 1)^2} = 0 \rightarrow$$

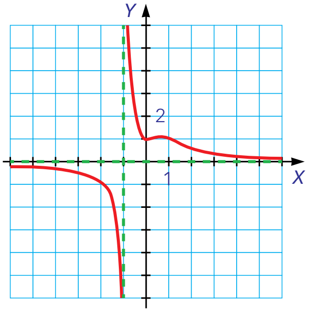
$$\rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 0{,}596 \end{cases}$$

$f(x)$ decrece en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0{,}596; +\infty)$ y crece en $(0; 0{,}596)$.

$$f''(x) = \frac{2(x^6 + 6x^4 - 7x^3 - 3x + 1)}{(x^2 + 1)^3}$$

$f''(0{,}596) = -1{,}650 < 0 \rightarrow$
$\rightarrow x = 0{,}596$ máximo

$f''(0) = 2 > 0 \rightarrow$
$\rightarrow x = 0$ mínimo



97 Relaciona cada una de las siguientes características con las funciones correspondientes.

- Su máximo es $(0, -1)$.
- Tiene dos asíntotas verticales.
- La tangente es horizontal para $x = 1$ y $x = -1$.
- Su máximo es $(1, 4)$.
- Es creciente siempre.

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x}{10}$$

$$g(x) = x^4 - 2x^2 - 1$$

$$h(x) = -x^3 + 3x + 2$$

$$i(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 3}$$

$$j(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2}$$

$$k(x) = -x^2 - 2x - 1$$

- Su máximo es $(0, -1)$ y la tangente es horizontal para $x = 1$ y $x = -1$.

  Son características de $g(x)$.

  $$g'(x) = 4x^3 - 4x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

  La derivada en los puntos $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$ es 0, con lo que la tangente será horizontal en esos puntos y, por tanto, serán máximos, mínimos o puntos de inflexión.

  $g''(x) = 12x^2 - 4 \rightarrow g''(0) = -4 < 0 \rightarrow$
  $\rightarrow x = 0$ máximo

  $g(0) = -1 \rightarrow (0, -1)$ máximo

- Tiene dos asíntotas verticales.

  Es característica de $j(x)$.

  Una función solo puede tener asíntotas verticales en los valores de x para los que el denominador se anula. En este caso se tienen dos asíntotas verticales: en $x = -\sqrt{2}$ y en $x = \sqrt{2}$.

- Su máximo es $(1, 4)$ y la tangente es horizontal para $x = 1$ y $x = -1$.

  Son características de $h(x)$.

  $h'(x) = -3x^2 + 3 = 0 \rightarrow$
  $\rightarrow x = \pm 1$

  $h''(x) = -6x \rightarrow$
  $\rightarrow h''(1) = -6 < 0 \rightarrow$
  $\rightarrow x = 1$ máximo

  $h(1) = 4 \rightarrow (1, 4)$ máximo

- Es creciente siempre.

  Es característica de $f(x)$.

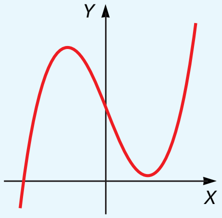
  $$f'(x) = \frac{3x^2 + 2x + 1}{10} > 0 \ \forall\ x \in \mathbb{R} \rightarrow$$

  $\rightarrow f(x)$ siempre crece.

  $i(x)$ y $k(x)$ no cumplen ninguna de las características.

ACTIVIDADES FLASH

98 La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x)$, que tiene un único punto de inflexión en $x = 0$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?



a) $f''(1) + f''(2) < 0$

b) $f''(-2) + f''(-1) > 0$

c) $f''(-1) \cdot f''(-2) < 0$

d) $f''(1) \cdot f''(2) > 0$

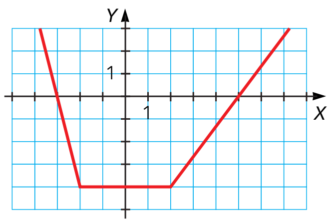
a) Falso, porque ambos sumandos son mayores que 0.

b) Falso, porque ambos sumandos son menores que 0.

c) Falso, porque ambos factores son menores que 0.

d) Verdadero, porque ambos factores son mayores que 0.

99 **INVENTA.** Esboza una función $f(x)$, cuya derivada tenga la siguiente gráfica.



a) ¿Tiene $f(x)$ algún máximo o mínimo? ¿Dónde? Indica sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

b) Si $f(-2) = 3$, ¿cuál es el valor de $f(2)$?

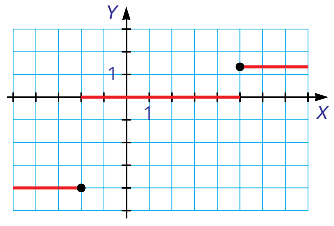
c) Representa $f''(x)$.

a) f' se anula en $x = -3$ y $x = 5$, por tanto, son dos puntos críticos. En $x = -3$ tiene un máximo y en $x = 5$ un mínimo.

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$ y decreciente en $(-3, 5)$.

b) $f(x) = 3$

c)



100 Dada la función $f(x) = 2e^{-x}$, estudia:

a) Su dominio de definición.

b) Los puntos en los que corta a los ejes de coordenadas, si los hubiera.

c) Sus asíntotas.

d) Su monotonía.

e) Su curvatura.

Realiza un esbozo de la función.

a) $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$

b) No hay puntos de corte con el eje X.
El punto de corte con el eje Y es $(0, 2)$.

c) No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} 2e^{-x} = 0$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} 2e^{-x} = \infty$

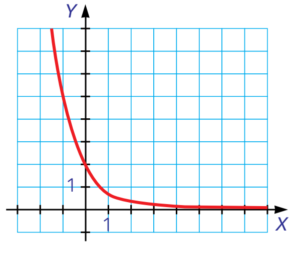
Tiene asíntota horizontal en $x = 0$.

d) $f'(x) = -2e^{-x} < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en $\mathbb{R}$.

$f'(x) \neq 0 \rightarrow$ No hay máximos ni mínimos.

e) $f''(x) = 2e^{-x} > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava en $\mathbb{R}$.

$f''(x) \neq 0 \rightarrow$ No hay puntos de inflexión.



101 Estudia y representa las siguientes funciones e indica el recorrido de cada una de ellas.

a) $f(x) = 1 + e^{x+3}$

b) $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{2}$

c) $f(x) = 3e^{1-x}$

d) $f(x) = \dfrac{3 - e^x}{2}$

a) Dom $f(x) = \mathbb{R}$

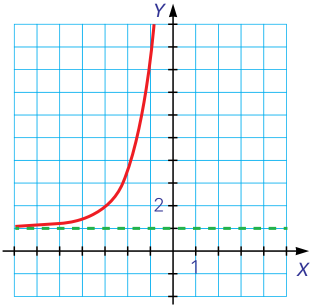
No tiene puntos de corte con el eje X.

Punto de corte con el eje Y: $(0, 1 + e^3)$

No tiene asíntotas verticales.

Tiene asíntota horizontal en $y = 1$ cuando $x \to -\infty$.

$f'(x) = e^{x+3} > 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R} \to$
$\to f(x)$ es creciente en $\mathbb{R}$.



b) Dom $f(x) = \mathbb{R}$

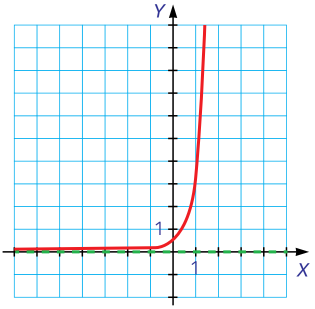
No tiene puntos de corte con el eje X.

Punto de corte con el eje Y: $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$

No tiene asíntotas verticales.

Tiene asíntota horizontal en $y = 0$ cuando $x \to -\infty$.

$f'(x) = e^{2x} > 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R} \to$
$\to f(x)$ es creciente en $\mathbb{R}$.



c) Dom $f(x) = \mathbb{R}$

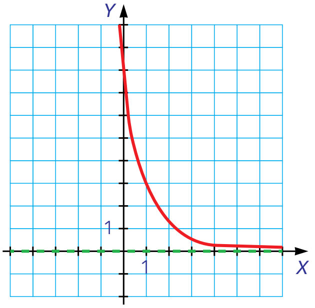
No tiene puntos de corte con el eje X.

Punto de corte con el eje Y: $(0, 3e)$

No tiene asíntotas verticales.

Tiene asíntota horizontal en $y = 0$ cuando $x \to +\infty$.

$f'(x) = -3e^{1-x} < 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R} \to$
$\to f(x)$ es decreciente en $\mathbb{R}$.



d) Dom $f(x) = \mathbb{R}$

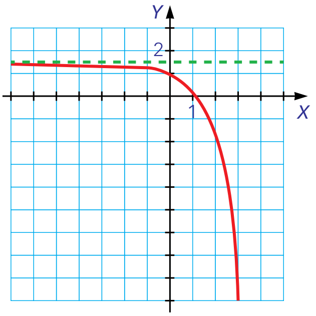
Punto de corte con el eje X: $(\ln 3, 0)$

Punto de corte con el eje Y: $(0, 1)$

No tiene asíntotas verticales.

Tiene asíntota horizontal en $y = \dfrac{3}{2}$ cuando $x \to -\infty$.

$f'(x) = \dfrac{-e^x}{2} < 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R} \to$
$\to f(x)$ es decreciente en $\mathbb{R}$.



102 ●●● Analiza el dominio, los puntos de corte, las asíntotas, la monotonía y la curvatura de las siguientes funciones, y represéntalas gráficamente.

a) $f(x) = \dfrac{2}{5} \cdot 2^{x+2}$

b) $f(x) = 3 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1}$

c) $f(x) = 2^{x-1} - \dfrac{1}{2}$

d) $f(x) = 4 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-1}$

e) $f(x) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{2-x}$

f) $f(x) = 2 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{1-x}$

a) Dom $f(x) = \mathbb{R}$

No tiene puntos de corte con el eje X.

Punto de corte con el eje Y: $\left(0, \dfrac{8}{5}\right)$

No tiene asíntotas verticales.

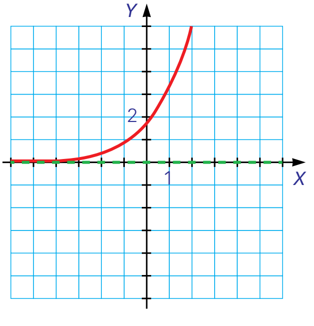
Tiene asíntota horizontal en $y = 0$ cuando $x \to -\infty$.

$f'(x) = \dfrac{2}{5}2^{x+2}\ln 2 > 0\ \forall\, x \in \mathbb{R} \to$
$\to f(x)$ es creciente en $\mathbb{R}$.

$f'(x) \neq 0 \to$ No tiene máximos ni mínimos.

$f''(x) = \dfrac{2}{5}2^{x+2}(\ln 2)^2 > 0\ \forall\, x \in \mathbb{R} \to$
$\to f(x)$ es cóncava en $\mathbb{R}$.

$f''(x) \neq 0 \to$ No tiene puntos de inflexión.



b) Dom $f(x) = \mathbb{R}$

No tiene puntos de corte con el eje X.

Punto de corte con el eje Y: $\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$.

No tiene asíntotas verticales.

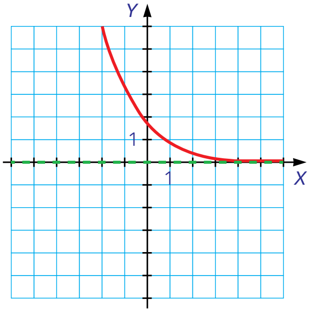
Tiene asíntota horizontal en $y = 0$ cuando $x \to +\infty$.

$f'(x) = -2^{-x-1}\ln 8 < 0\ \forall\, x \in \mathbb{R} \to$
$\to f(x)$ es decreciente en $\mathbb{R}$.

$f'(x) \neq 0 \to$ No tiene máximos ni mínimos.

$f''(x) = 2^{-x-1}(\ln 8)^2 > 0\ \forall\, x \in \mathbb{R} \to$
$\to f(x)$ es cóncava en $\mathbb{R}$.

$f''(x) \neq 0 \to$ No tiene puntos de inflexión.



c) Dom $f(x) = \mathbb{R}$

Punto de corte con los ejes: $(0, 0)$.

No tiene asíntotas verticales.

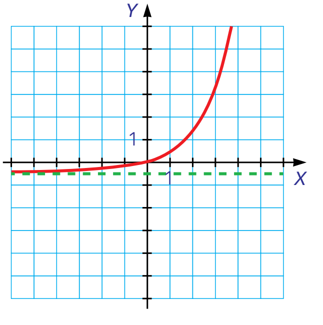
Tiene asíntota horizontal en $y = -\dfrac{1}{2}$ cuando $x \to -\infty$.

$f'(x) = 2^{x-1}\ln 2 > 0\ \forall\, x \in \mathbb{R} \to$
$\to f(x)$ es creciente en $\mathbb{R}$.

$f'(x) \neq 0 \to$ No tiene máximos ni mínimos.

$f''(x) = 2^{x-1}(\ln 2)^2 > 0\ \forall\, x \in \mathbb{R} \to$
$\to f(x)$ es cóncava en $\mathbb{R}$.

$f''(x) \neq 0 \to$ No tiene puntos de inflexión.



d) Dom $f(x) = \mathbb{R}$

No tiene puntos de corte con el eje X.

Punto de corte con el eje Y: $(7, 0)$.

No tiene asíntotas verticales.

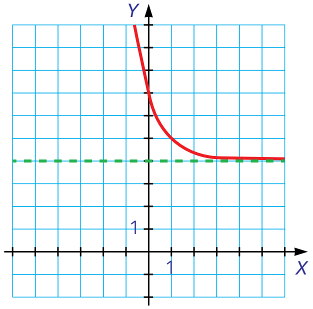
Tiene asíntota horizontal en $y = 4$ cuando $x \to +\infty$.

$f'(x) = -3^{1-x}\ln 3 < 0\ \forall\, x \in \mathbb{R} \to$
$\to f(x)$ es siempre decreciente en $\mathbb{R}$.

$f'(x) \neq 0 \to$ No tiene máximos ni mínimos.

$f''(x) = 3^{1-x}(\ln 3)^2 > 0\ \forall\, x \in \mathbb{R} \to$
$\to f(x)$ es cóncava en $\mathbb{R}$.

$f''(x) \neq 0 \rightarrow$ No tiene puntos de inflexión.



e) Dom $f(x) = \mathbb{R}$

No tiene puntos de corte con el eje X.

Punto de corte con el eje Y: $\left(0, \dfrac{1}{16}\right)$

No tiene asíntotas verticales.

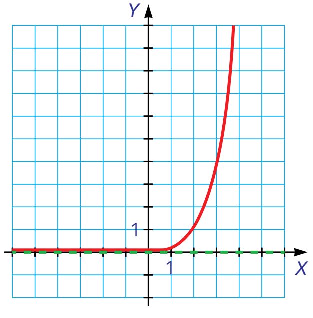
Tiene asíntota horizontal en $y = 0$ cuando $x \rightarrow -\infty$.

$f'(x) = \dfrac{\ln 4}{16} 4^x > 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R} \rightarrow$
$\rightarrow f(x)$ es creciente en $\mathbb{R}$.

$f'(x) \neq 0 \rightarrow$ No tiene máximos ni mínimos.

$f''(x) = \dfrac{(\ln 4)^2}{16} 4^x > 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R} \rightarrow$
$\rightarrow f(x)$ es cóncava en $\mathbb{R}$.

$f''(x) \neq 0 \rightarrow$ No tiene puntos de inflexión.



f) Dom $f(x) = \mathbb{R}$

Punto de corte con el eje X: $\left(0, \dfrac{5}{3}\right)$

Punto de corte con el eje Y: $\left(\dfrac{5}{3}, 0\right)$

No tiene asíntotas verticales.

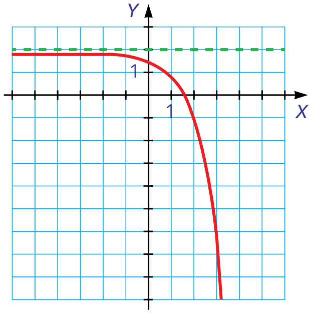
Tiene asíntota horizontal en $y = 2$ cuando $x \rightarrow -\infty$.

$f'(x) = -3^{x-1} \ln 3 < 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R} \rightarrow$
$\rightarrow f(x)$ es creciente en $\mathbb{R}$.

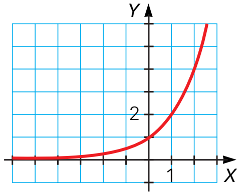
$f'(x) \neq 0 \rightarrow$ No tiene máximos ni mínimos.

$f'(x) = -3^{x-1}(\ln 3)^2 < 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R} \rightarrow$
$\rightarrow f(x)$ es convexa en $\mathbb{R}$.

$f''(x) \neq 0 \rightarrow$ No tiene puntos de inflexión.



103 ●●○ **INVENTA.** A partir de la gráfica de la función $f(x) = 2^x$, realiza una transformación a $f(x)$ de manera que se cumpla cada una de las siguientes condiciones.



a) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -1$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} i(x) = -1$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} j(x) = 2$

e) Es siempre decreciente.

f) Es siempre convexa.

g) Corta el eje Y en el punto $(0, -2)$.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $g(x) = 2^{-x} + 1 = f(-x) + 1$

b) $h(x) = 2^x - 1 = f(x) + 1$

c) $i(x) = 2^{-x} - 1 = f(-x) - 1$

d) $j(x) = 2^x + 2 = f(x) + 2$

e) $k(x) = 2^{-x} = f(-x)$

f) $l(x) = -2^{-x} = -f(-x)$

g) $m(x) = -2^{x+1} = -f(x+1)$

104 Dada la función $f(x) = \ln(x - 2)$, estudia:

a) Su dominio de definición.

b) Los puntos en los que corta a los ejes de coordenadas, si los hubiera.

c) Sus asíntotas.

d) Su monotonía.

e) Su curvatura.

Realiza un esbozo de la función.

a) $x - 2 > 0 \rightarrow x > 2$
Dom $f = (2, +\infty)$

b) Punto de corte con el eje X: (3, 0)

No tiene puntos de corte con el eje Y porque $x = 0$ no pertenece al dominio de la función.

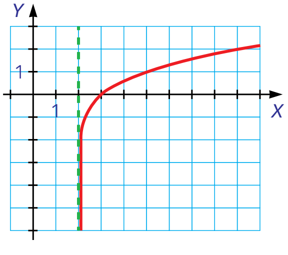
c) Tiene asíntota vertical en $x = 2$:
$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$
No tiene asíntota horizontal.

d) $f'(x) = \dfrac{1}{x-2} > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en todo su dominio.

$f'(x) \neq 0 \rightarrow f(x)$ no tiene máximos ni mínimos.

e) $f''(x) = \dfrac{-1}{(x-2)^2} < 0$
$\rightarrow f(x)$ es convexa en todo su dominio.

$f''(x) \neq 0 \rightarrow f(x)$ no tiene puntos de inflexión.



105 Estudia y representa estas funciones.

a) $f(x) = \dfrac{\ln x}{2}$

b) $f(x) = \ln(x + 5)$

c) $f(x) = \ln(2x - 1)$

d) $f(x) = \ln(x - 1) + 2$

e) $f(x) = 1 - \ln(2 - x)$

f) $f(x) = 2\ln\left(\dfrac{x-2}{4}\right)$

a) Dom $f(x) = (0, +\infty)$

Punto de corte con el eje X: (1, 0).

No tiene puntos de corte con el eje Y porque $x = 0$ no pertenece al dominio de la función.

Tiene asíntota vertical en $x = 0$:
$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

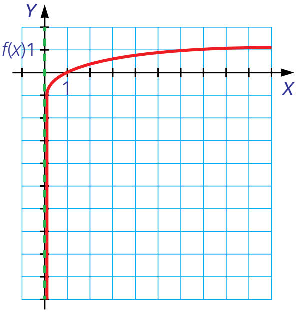
No tiene asíntota horizontal.

$f'(x) = \dfrac{1}{2x} > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en todo su dominio.

$f'(x) \neq 0 \rightarrow$ No tiene máximos ni mínimos.

$f''(x) = \dfrac{-1}{2x^2} < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa en todo su dominio.

$f''(x) \neq 0 \rightarrow f(x)$ no tiene puntos de inflexión.



b) Dom $f(x) = (-5, +\infty)$

Puntos de corte con el eje X: $(-4, 0)$

Punto de corte con el eje Y: (0, ln 5)

Tiene asíntota vertical en $x = -5$:
$\lim\limits_{x \to -5^+} f(x) = -\infty$

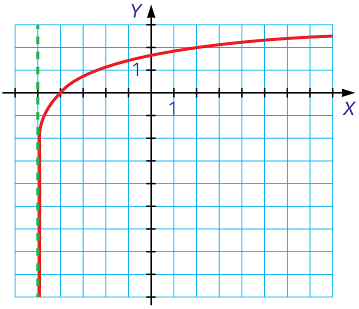
No tiene asíntota horizontal.

$f'(x) = \dfrac{1}{x+5} > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en todo su dominio.

$f'(x) \neq 0 \rightarrow f(x)$ no tiene máximos ni mínimos.

$f''(x) = \dfrac{-1}{(x+5)^2} < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa en todo su dominio.

$f''(x) \neq 0 \rightarrow f(x)$ no tiene puntos de inflexión.



c) Dom $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$

Punto de corte con el eje X: (1, 0)

Tiene asíntota vertical en $x = \dfrac{1}{2}$:

$\lim\limits_{x \to -1/2^+} f(x) = -\infty$

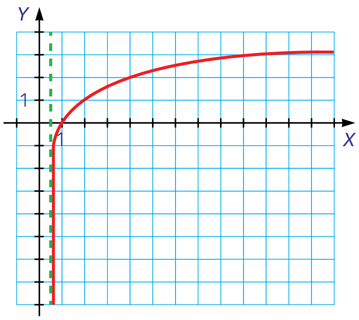
No tiene asíntota horizontal.

$f'(x) = \dfrac{2}{2x-1} > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en todo su dominio.

$f'(x) \neq 0 \rightarrow f(x)$ no tiene máximos ni mínimos.

$f''(x) = \dfrac{-4}{(2x-1)^2} < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa en todo su dominio.

$f''(x) \neq 0 \rightarrow f(x)$ no tiene puntos de inflexión.



d) Dom $f(x) = (1, +\infty)$

Puntos de corte con el eje X: (1,135; 0)

No tiene punto de corte eje Y porque $x = 0$ no pertenece al dominio de la función.

Tiene asíntota vertical en $x = 1$:

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

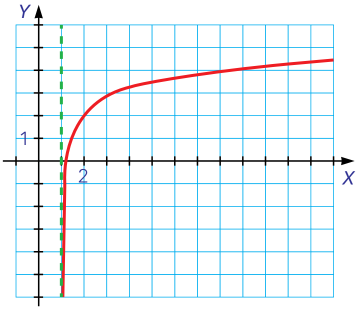
No tiene asíntota horizontal.

$f'(x) = \dfrac{1}{x-1} > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en todo su dominio.

$f'(x) \neq 0 \rightarrow f(x)$ no tiene máximos ni mínimos.

$f''(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2} < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa en todo su dominio.

$f''(x) \neq 0 \rightarrow f(x)$ no tiene puntos de inflexión.



e) Dom $f(x) = (-\infty, 2)$

Puntos de corte con el eje X: (−0,72; 0)

Punto de corte con el eje Y: (0; 0,307)

Tiene asíntota vertical en $x = 2$:

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

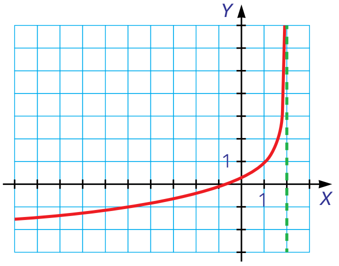
No tiene asíntota horizontal.

$f'(x) = \dfrac{1}{2-x} > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en todo su dominio.

$f'(x) \neq 0 \rightarrow f(x)$ no tiene máximos ni mínimos.

$f''(x) = \dfrac{1}{(2-x)^2} > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava en todo su dominio.

$f''(x) \neq 0 \rightarrow f(x)$ no tiene puntos de inflexión.



f) Dom $f(x) = (2, +\infty)$

Punto de corte con el eje X: $(6, 0)$

No tiene punto de corte con el eje Y porque $x = 0$ no pertenece al dominio.

Tiene asíntota vertical en $x = 2$:
$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

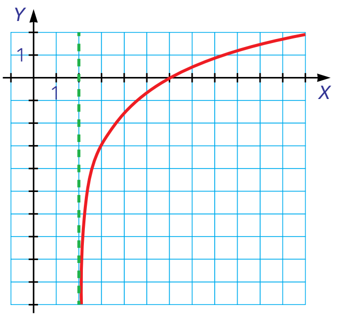
No tiene asíntota horizontal.

$f'(x) = \dfrac{2}{x-2} > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en todo su dominio.

$f'(x) \neq 0 \rightarrow f(x)$ no tiene máximos ni mínimos.

$f''(x) = \dfrac{-2}{(x-2)^2} < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa en todo su dominio.

$f''(x) \neq 0 \rightarrow f(x)$ no tiene puntos de inflexión.



106 ●●○ **INVENTA.** Escribe una función de tipo logarítmica con cada una de las siguientes características.

a) Su dominio es $(-\infty, 1)$.

b) Corta al eje X en el punto $(-1, 0)$.

c) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$

e) Es siempre decreciente.

f) Es siempre convexa.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{3}\right)$

b) $f(x) = \ln(x+2)$

c) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{3} - 1\right)$

d) $f(x) = -\ln(-x+2)$

e) $f(x) = -\ln(x+2)$

f) $f(x) = -\ln\left(\dfrac{x+2}{5}\right)$

107 ●●● Estudia y representa las siguientes funciones.

a) $f(x) = \log_3(2x)$

b) $f(x) = \log_2(x+1)$

c) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

d) $f(x) = \log_5(x-1)$

e) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$

f) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$

a) $2x > 0 \rightarrow x > 0 \rightarrow$ Dom $f = (0, +\infty)$

Puntos de corte con el eje X:

$0 = \log_3 2x \rightarrow 2x = 3^0 = 1 \rightarrow$

$\rightarrow x = \dfrac{1}{2} \rightarrow$ El punto de corte es $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$.

No tiene puntos de corte con el eje Y.

Tiene asíntota vertical en $x = 0$.

No tiene asíntotas horizontales.

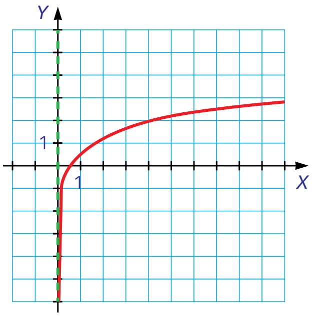
$f'(x) = \dfrac{1}{x \ln 3} > 0 \ \forall\, x > 0 \rightarrow$

$\rightarrow f(x)$ es creciente en todo su dominio.

$f'(x) \neq 0 \rightarrow f(x)$ no tiene máximos ni mínimos.

$f''(x) = \dfrac{-1}{x^2 \ln 3} < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa en todo su dominio.

$f''(x) \neq 0 \rightarrow f(x)$ no tiene puntos de inflexión.



b) $x + 1 > 0 \rightarrow x > -1 \rightarrow$
$\rightarrow$ Dom $f = (-1, +\infty)$

Puntos de corte con el eje X:

$0 = \log_2(x + 1) \rightarrow x + 1 = 2^0 = 1 \rightarrow$
$\rightarrow x = 0 \rightarrow$ El punto de corte es (0, 0).

Punto de corte con el eje Y:

$x = 0 \rightarrow f(0) = \log_2(0 + 1) =$
$= \log_2 1 = 0 \rightarrow$ El punto de corte es (0, 0).

Tiene asíntota vertical en $x = -1$.

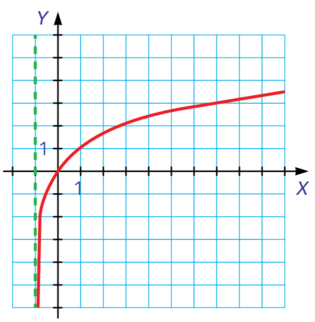
No tiene asíntotas horizontales.

$f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)\ln 2} > 0 \;\forall\, x > -1 \rightarrow$
$\rightarrow f(x)$ es creciente en todo su dominio.

$f'(x) \neq 0 \rightarrow f(x)$ no tiene máximos ni mínimos.

$f''(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2 \ln 2} < 0 \rightarrow$
$\rightarrow f(x)$ es convexa en todo su dominio.

$f''(x) \neq 0 \rightarrow f(x)$ no tiene puntos de inflexión.



c) $x > 0 \rightarrow$ Dom $f = (0, +\infty)$

Puntos de corte con el eje X:

$0 = \log_{\frac{1}{3}} x \rightarrow x = \left(\dfrac{1}{3}\right)^0 = 1 \rightarrow x = 1 \rightarrow$
$\rightarrow$ El punto de corte es (1, 0).

No tiene puntos de corte con el eje Y.

Tiene asíntota vertical en $x = 0$.

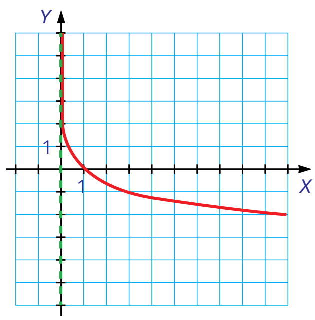
No tiene asíntotas horizontales.

$f'(x) = \dfrac{1}{x \ln \dfrac{1}{3}} < 0 \;\forall\, x > 0 \rightarrow$
$\rightarrow f(x)$ es siempre decreciente.

$f'(x) \neq 0 \rightarrow f(x)$ no tiene máximos ni mínimos.

$f''(x) = \dfrac{-1}{x^2 \ln \dfrac{1}{3}} > 0 \rightarrow$
$\rightarrow f(x)$ es cóncava en todo su dominio.

$f''(x) \neq 0 \rightarrow f(x)$ no tiene puntos de inflexión.



d) $x - 1 > 0 \rightarrow x > 1 \rightarrow$
$\rightarrow$ Dom $f = (1, +\infty)$

Puntos de corte con el eje X:

$0 = \log_5 (x - 1) \rightarrow$
$\rightarrow x - 1 = 5^0 = 1 \rightarrow x = 2 \rightarrow$
$\rightarrow$ El punto de corte es (2, 0).

No tiene puntos de corte con el eje Y.

Tiene asíntota vertical en $x = 1$.

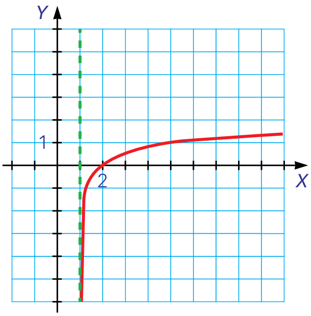
No tiene asíntotas horizontales.

$f'(x) = \dfrac{1}{x \ln 5} > 0 \;\forall\, x > 0 \rightarrow$
$\rightarrow f(x)$ es siempre creciente

$f'(x) \neq 0 \rightarrow f(x)$ no tiene máximos ni mínimos.

$f''(x) = \dfrac{-1}{x^2 \ln 5} < 0 \rightarrow$
$\rightarrow f(x)$ es convexa en todo su dominio.

$f''(x) \neq 0 \rightarrow f(x)$ no tiene puntos de inflexión.



e) $\frac{1}{x} > 0 \rightarrow x > 0 \rightarrow$

$\rightarrow$ Dom $f = (0, +\infty)$

Puntos de corte con el eje X:

$0 = \ln \frac{1}{x} \rightarrow x = 1 \rightarrow$

$\rightarrow$ El punto de corte es (1, 0).

No tiene puntos de corte con el eje Y porque x = 0 no pertenece al dominio de la función.

Tiene asíntota vertical en $x = 0$.

No tiene asíntotas horizontales.

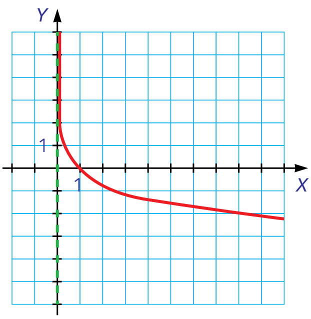
$f'(x) = -\frac{1}{x} < 0 \ \forall \ x > 0 \rightarrow$

$\rightarrow f(x)$ es decreciente en todo su dominio.

$f'(x) \neq 0 \rightarrow f(x)$ no tiene máximos ni mínimos.

$f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava en todo su dominio.

$f''(x) \neq 0 \rightarrow f(x)$ no tiene puntos de inflexión.



f) $\frac{1}{x^2 + 1} > 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R} \rightarrow$ Dom $f = \mathbb{R}$

Puntos de corte con el eje X:

$0 = \ln\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right) \rightarrow \frac{1}{x^2 + 1} = e^0 = 1 \rightarrow$

$\rightarrow x = 0 \rightarrow$ El punto de corte es (0, 0).

Puntos de corte con el eje Y:

$x = 0 \rightarrow f(0) = \ln\left(\frac{1}{0^2 + 1}\right) = \ln 1 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow$ El punto de corte es (0, 0).

No tiene asíntotas verticales.

No tiene asíntotas horizontales.

$f'(x) = -\frac{2x}{x^2 + 1} \rightarrow$

$f'(x) = -\frac{2x}{x^2 + 1} > 0$ en $x \in (-\infty, 0) \rightarrow$

$\rightarrow f(x)$ es creciente en este intervalo.

$f'(x) = -\frac{2x}{x^2 + 1} < 0$ en $x \in (0, +\infty) \rightarrow$

$\rightarrow f(x)$ es decreciente en este intervalo.

Máximo: (0, 0)

Para $x \neq 0$, $f'(x) = -\frac{2x}{x^2 + 1} \neq 0 \rightarrow$

$\rightarrow$ No existen más máximos ni mínimos.

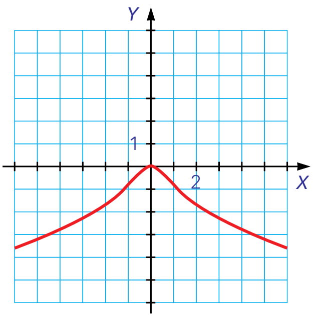
$f''(x) = -\frac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} \rightarrow$

$f''(x) > 0 \rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

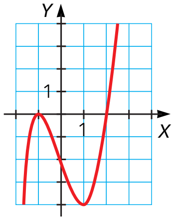
$f''(x) < 0 \rightarrow x \in (-1, 1)$

$\rightarrow f(x)$ es convexa en $(-1, 1)$ y cóncava en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

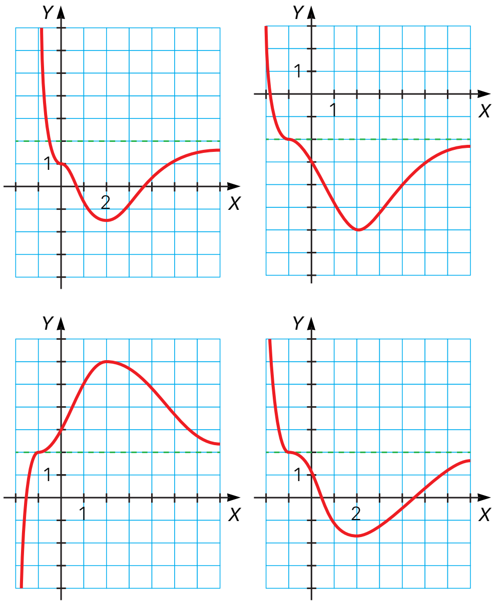
$f''(x) \neq 0 \rightarrow f(x)$ no tiene puntos de inflexión.



108 La gráfica corresponde a la función $f(x)$, siendo $x = -1$, $x = 2$ los dos únicos cortes con el eje X. La primera derivada de una cierta función g está definida como $g'(x) = f(x) \cdot e^{-x}$ y cumple que $\lim_{x \to +\infty} [g(x) - 2] = 0$.



¿Cuál de las siguientes gráficas puede ser la de $g(x)$?



$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-2]=0\\ g'(-1)=f(-1)\cdot e^{1}=0\end{array}\right\}\rightarrow$$

$\rightarrow g(x)$ tiene asíntota horizontal en $x=2$, por tanto, no puede ser la gráfica de arriba a la derecha.

$g'(0)=f(0)\cdot e^{0}=-2<0\rightarrow$
$\rightarrow g(x)$ es decreciente en $x=0$, por tanto, no puede ser la gráfica de abajo a la derecha.

$g'(2)=f(2)\cdot e^{-2}=0\rightarrow g(x)$ tiene un extremo relativo en $x=2$. Ambas gráficas de la izquierda lo tienen.

$g'(-1)=f(-1)\cdot e^{1}=0\rightarrow g(x)$ tiene un punto crítico en $x=1$, por tanto, no puede ser la gráfica de arriba a la izquierda.

Luego, la gráfica de $g(x)$ debe ser la de abajo a la derecha.

109 **RETO.** Calcula cuál es el valor mínimo de la función
$f(x)=|2x+2|-|x-1|+|3x-6|$.

$$f(x)=\begin{cases}-4x+3 & \text{si } x<-1\\ 7 & \text{si } -1\le x<1\\ -2x+9 & \text{si } 1\le x\le 2\\ 4x-3 & \text{si } x>2\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}-4 & \text{si } x<-1\\ 0 & \text{si } -1\le x<1\\ -2 & \text{si } 1\le x\le 2\\ 4 & \text{si } x>2\end{cases}$$

Esta función no tiene máximos ni mínimos relativos, pero al hacer la representación gráfica de $f(x)$ se ve que el menor valor se alcanza en $x=2$ y vale 5.

110 Los beneficios de dos empresas, A y B, vienen dados por las funciones f_A y f_B, siendo x el tiempo transcurrido en años.

$$f_A(x)=\frac{75x}{x^2+100}\qquad f_B(x)=\frac{100x+4}{x^2+150}$$

a) ¿Durante cuánto tiempo obtienen ganancias?

b) ¿Cuáles son sus máximos beneficios y cuándo se producen?

c) ¿Cuál de las dos empresas empieza antes a notar un descenso en los beneficios?

d) ¿En algún momento tienen pérdidas?

a) Se obtendrán ganancias siempre que los beneficios sean superiores a 0:

$$f_A(x)=\frac{75x}{x^2+100}>0\ \forall\ x>0$$

$$f_B(x)=\frac{100x+4}{x^2+150}>0\ \forall\ x>0$$

Es decir, siempre obtienen ganancias.

b) $f'_A(x)=-\dfrac{75(x^2-100)}{(x^2+100)^2}=0\rightarrow x=10$

$$f'_B(x)=\frac{-4(25x^2+2x-3\,750)}{(x^2+150)^2}=0\rightarrow$$

$$\rightarrow x=\frac{1}{25}\left(-1+\sqrt{93\,751}\right)$$

$$f''_A(x) = \frac{150x(x^2 - 300)}{(x^2 + 100)^3} \rightarrow$$

$$\rightarrow f''_A(10) = -\frac{3}{80} < 0$$

$$f''_B(x) = \frac{8(25x^3 + 3x^2 - 11\,250x - 150)}{(x^2 + 150)^3}$$

$$\rightarrow f''_B\left(\frac{1}{25}\left(-1 + \sqrt{93\,751}\right)\right) \approx -0{,}027 < 0$$

Como en ambas funciones el candidato tiene signo negativo en la segunda derivada, es un máximo.

Los máximos beneficios son:

$$f_A(10) = \frac{15}{4} = 3{,}75$$

$$f_B\left(\frac{1}{25}\left(-1 + \sqrt{93\,751}\right)\right) = 4{,}096$$

c) Dado que $10 < \frac{1}{25}(-1 + \sqrt{93\,751})$, la primera empieza a notar antes que la segunda el descenso de los beneficios.

d) En ningún momento tienen pérdidas, ya que las funciones son mayores que 0 siempre.

111 Se ha estimado que el gasto de electricidad de una empresa, de 8 a 17 horas, sigue esta función:

$$E(t) = 0{,}01t^3 - 0{,}36t^2 + 4{,}05t - 10$$

donde t pertenece al intervalo (8, 17).

a) ¿Cuál es el consumo eléctrico a las 10 horas? ¿Y a las 16 horas?

b) ¿En qué momento del día es máximo el consumo? ¿Y mínimo?

c) Determina las horas del día en las que el consumo se incrementa.

a) $E(10) = 4{,}5$
$E(16) = 3{,}6$

b) $E'(t) = 0{,}03t^2 - 0{,}72t + 4{,}05$
$0{,}03t^2 - 0{,}72t + 4{,}05 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow t_1 = 9 \quad t_2 = 15$
$E''(t) = 0{,}06t - 0{,}72$

$E''(9) = -0{,}18 < 0 \rightarrow$
$\rightarrow$ En $t = 9$ tiene un máximo.

$E''(15) = 0{,}18 > 0 \rightarrow$
$\rightarrow$ En $t = 15$ tiene un mínimo.

Por tanto, el consumo es máximo a las 9 horas y es mínimo a las 15 horas.

c) Como $t = 9$ es un máximo, el consumo crece de las 8 horas a las 9 horas.
Del mismo modo, como $t = 15$ es un mínimo, el consumo crece de las 15 horas a las 17 horas.

Esta actividad puede utilizarse para trabajar el ODS 12, producción y consumo responsables.

112 El número de visitantes que acuden a una exposición durante dos semanas ha variado según la función:

$$N(t) = -t^3 + 24t^2 - 11t + 570$$
$$\text{con } 1 \leq t \leq 14$$

donde t es el número de días desde la inauguración.

a) ¿Cuántos visitantes hubo el día de la inauguración?

b) ¿Y el día de la clausura?

c) ¿Qué día hubo más visitantes? ¿Cuántos fueron? ¿Y menos?

a) $N(1) = 582$ visitantes

b) $N(14) = 2376$ visitantes

c) $N'(t) = -3t^2 + 48t - 11 > 0$ con $1 \leq t \leq 14$
El mínimo se alcanzará el día 1, con 582 visitantes, y el máximo el día 14, con 2376 visitantes.

113 **MATEMÁTICAS Y... FÍSICA.** Si lanzas verticalmente una piedra hacia arriba con una velocidad v_0, la altura en metros, h, que alcanza tras t segundos la puedes calcular mediante la fórmula $h = v_0 \cdot t - 4{,}9t^2$. Si lanzas una piedra hacia arriba con una velocidad $v_0 = 29{,}4$ m/s:

a) ¿Cuánto tiempo tardará la piedra en alcanzar la altura máxima? ¿Cuál será esa altura?

b) ¿Cuánto tiempo se mantendrá la piedra en el aire?

c) ¿Cómo podrías calcular la aceleración terrestre (el valor de la gravedad) con esta fórmula?

d) Si dejas caer la piedra en un pozo y tarda 10 s en llegar al fondo, ¿qué profundidad tiene el pozo?

La fórmula para obtener la altura de una piedra lanzada verticalmente en la Luna es $h = v_0 \cdot t - 0{,}8t^2$. Contesta a las preguntas anteriores si la piedra se lanza en la Luna.

a) Como tarda el mismo tiempo en subir y en bajar, vamos a ver cuándo $h = 0$:
$29{,}4t - 4{,}9t^2 = 0 \rightarrow t = 0 \qquad t = 6$

Como $t = 6$ es el tiempo que tarda en subir y bajar, la altura máxima la alcanza a los 3 s y es 35,28 m.

b) La piedra se mantiene en el aire el tiempo que tarda en subir y bajar, 6 s.

c) Derivando la expresión de la altura en función del tiempo, obtenemos la velocidad en función del tiempo.

$$v(t) = \frac{dh}{dt} = h'(t) = v_0 - 9{,}8t$$

Derivando la velocidad en función del tiempo, obtenemos la aceleración.

$$a = \frac{dv}{dt} = v'(t) = -9{,}8 \text{ m/s}^2$$

d) Si se deja caer, $v_0 = 0 \rightarrow h = 4{,}9t^2 \rightarrow$
$\rightarrow h = 4\,900$ m

Con la gravedad de la Luna.

a) $29{,}4t - 0{,}8t^2 = 0 \rightarrow t = 0 \qquad t = 36{,}75$

Por tanto, la altura máxima es 271,472 m y la alcanza en 18,38 s.

b) 36,75 s

c) $h'(t) = v_0 - 1{,}6t$

La aceleración será 1,6 m/s^2.

d) La profundidad es 80 m.

114 **MATEMÁTICAS Y… FÚTBOL.** El movimiento que describe un balón al ser pateado por un portero de fútbol para sacar la pelota desde la portería es un movimiento parabólico que describe una trayectoria curva. La altura y la distancia que alcanza la pelota vienen determinadas, entre otros factores, por el ángulo de lanzamiento. Sea $h(t) = 28sen(\alpha)t - 4{,}905t^2$ la función correspondiente a la altura de la pelota, siendo α el ángulo del tiro en radianes y t el tiempo transcurrido en segundos:

a) Indica cuándo caerá la pelota al suelo en función de α.

b) Si la distancia viene dada por $x(t) = 28\cos(\alpha) \cdot t$, ¿con qué ángulo debe lanzarla para que la distancia sea máxima?

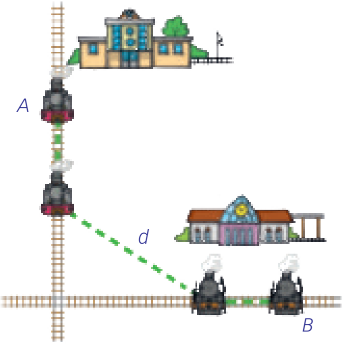
a) $28\,sen\,\alpha t - 4{,}905t^2 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow t = 0 \qquad t = \frac{28\,sen\,\alpha}{4{,}905} = 5{,}71\,sen\,\alpha$$

b) $x(\alpha) = 28t\cos\alpha =$
$= 2 \cdot 14 \cdot (5{,}71\,sen\,\alpha)\cos\alpha =$
$= 14 \cdot 5{,}71 \cdot 2\,sen\,\alpha\cos\alpha = 80\,sen\,2\alpha$

$x'(\alpha) = 160\cos 2\alpha = 0 \rightarrow$
$\rightarrow 2\alpha = 90° \rightarrow \alpha = 45°$

115 **RETO.** Dos líneas de tren se cruzan formando un ángulo recto. Hay una estación de tren en cada línea a 40 km y 50 km del cruce, respectivamente. De la estación más cercana al cruce parte un tren a una velocidad de 800 m/min y de la otra estación, parte otro a 600 m/min. ¿En qué momento se encuentran las locomotoras a la distancia mínima? ¿A qué distancia de sus estaciones de origen están en ese momento?



Expresamos las velocidades en km/h.

$v_A = 800$ m/min $= 48$ km/h

$v_B = 600$ m/min $= 36$ km/h

$d(t) = \sqrt{(40 - 48t)^2 + (50 - 36t)^2} =$

$= \sqrt{3\,600t^2 - 7\,440t + 4\,100}$

$d'(t) = \dfrac{2 \cdot 3\,600t - 7\,440}{2\sqrt{3\,600t^2 - 7\,440t + 4\,100}} = 0 \rightarrow$

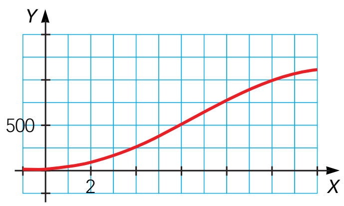
$\rightarrow 7\,200t - 7\,440 = 0 \rightarrow t = 1{,}033$

$d(1{,}033) = \sqrt{256} = 16$ m

La distancia mínima es 16 m.

116 **MATEMÁTICAS Y… NATURALEZA.** La fotosíntesis es el proceso mediante el cual las plantas verdes, con ayuda de la luz, convierten sustancias inorgánicas en orgánicas desprendiendo oxígeno. Cada planta, dependiendo de su especie y su tamaño, emite una cantidad diferente.

Esta gráfica muestra la cantidad de oxígeno emitido por un árbol entre las 8 y las 20 horas. La variable t indica las horas transcurridas desde las 8:00 h y $V(t)$ indica el volumen de oxígeno en litros que se ha producido hasta el momento t. La función $V(t) = -t^3 + 20t^2$ modeliza la relación entre ambas.



a) ¿Cuántos litros de oxígeno se han emitido hasta las 14 h?

b) ¿Cuántos litros de oxígeno se emiten de media a la hora entre las 14 y las 18 h?

c) Indica el volumen de oxígeno producido a las 17 h.

d) ¿A qué hora se produce más oxígeno?

a) $V(6) = 504$

A las 14 h se han emitido 504 ℓ de oxígeno.

b) $\dfrac{V(10) - V(6)}{4} = \dfrac{1\,000 - 504}{4} = \dfrac{496}{4} =$

$= 124$ ℓ/h

Entre las 14 h y las 18 h se emiten de media 124 ℓ/h de oxígeno.

c) $V(9) = 891$

A las 17 h se han producido 891 ℓ de oxígeno.

d) $V'(t) = -3t^2 + 40t = 0 \rightarrow$

$\rightarrow t = 0 \qquad t = \dfrac{40}{3} \approx 13{,}33$

A las 13:20 h es cuando se produce más oxígeno.

Esta actividad puede utilizarse para trabajar el ODS 15, vida de ecosistemas terrestres.

INTERNET

117 **MATEMÁTICAS Y… MEDICINA.** Para determinar la efectividad de un medicamento se suelen hacer distintas pruebas hasta encontrar, aproximando los datos, una función que responda a su comportamiento. En un medicamento que actúa sobre una bacteria se ha comprobado que el número de bacterias, N, varía con el tiempo, t, una vez que se ha suministrado el medicamento, según la siguiente función:

$$N(t) = 20t^3 - 510t^2 + 3\,600t + 2\,000$$

a) ¿Cuántas bacterias había en el momento de suministrar el medicamento? ¿Y al cabo de 10 horas?

b) En ese momento, ¿el número de bacterias está aumentando o disminuyendo?

c) ¿Cuál es el momento en que la efectividad del medicamento es máxima?

d) ¿En qué momento empieza a notarse el efecto del medicamento?

e) ¿En qué momento empieza a perder su efecto el medicamento?

a) Si $t = 0 \rightarrow N = 2\,000$ bacterias

Si $t = 10 \rightarrow N = 7\,000$ bacterias

b) $N'(t) = 60t^2 - 1020t + 3600 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = 12 \end{cases}$

El número de bacterias crece hasta las 5 horas y vuelve a crecer a partir de las 12 horas. Este número decrece entre las 5 horas y las 12 horas.

c) El medicamento alcanza su máxima acción a las 12 horas.

d) El efecto del medicamento empieza a notarse a partir de las 5 horas.

e) El medicamento empieza a perder su efecto a partir de las 12 horas.

118 Los gastos de mantenimiento de la maquinaria de una empresa, $G(x)$, en miles de euros, vienen dados en función del tiempo, x, en meses, que dicha maquinaria lleva en funcionamiento.

$$G(x) = \begin{cases} -\dfrac{2x}{15} + 3 & \text{si } 0 \le x \le 15 \\ \dfrac{6x - 60}{x + 15} & \text{si } x > 15 \end{cases}$$

a) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

b) ¿Qué sucede a medida que va transcurriendo el tiempo?

c) Estudia a partir de qué cantidad es rentable la inversión.

a) $G'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{15} & \text{si } 0 < x < 15 \\ \dfrac{150}{(x+15)^2} & \text{si } x > 15 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} G'(x) < 0 & \text{en } (0, 15) \\ G'(x) > 0 & \text{en } (15, +\infty) \end{cases}$

$G(x)$ es decreciente en $(0, 15)$ y creciente en $(15, +\infty)$.

b) El gasto decrece durante los 15 primeros meses y a partir de ahí comienza a crecer.

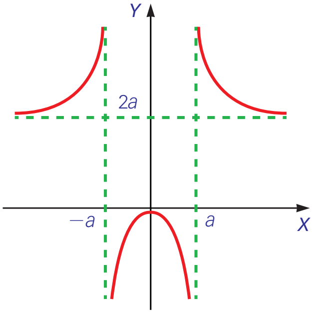
c) La inversión es rentable durante los 15 primeros meses, porque el gasto decrece, y siempre que el gasto sea menor que en el momento inicial, es decir, $G(x) = 3$.

$3 = \dfrac{6x - 60}{x + 15} \rightarrow 3x + 45 = 6x - 60 \rightarrow$
$\rightarrow 3x = 105 \rightarrow x = 35$

Por tanto, la inversión será rentable durante los 35 primeros meses.

119 **RETO.** Dibuja la gráfica de esta función.

$$f(x) = \frac{2ax^2}{x^2 - a^2}, \text{ con } a \in (0, +\infty)$$



La función tiene dos asíntotas verticales, $x = -a$ y $x = a$.

$$\lim_{x \to -a^-} \left(\frac{2ax^2}{x^2 - a^2} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -a^+} \left(\frac{2ax^2}{x^2 - a^2} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to a^-} \left(\frac{2ax^2}{x^2 - a^2} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to a^+} \left(\frac{2ax^2}{x^2 - a^2} \right) = +\infty$$

Además, tiene una asíntota horizontal, $y = 2a$. La gráfica está por encima de la asíntota horizontal.

$$f'(x) = \frac{-4a^3x}{(x^2 - a^2)^2} = 0 \text{ para } x = 0$$

Si $x < 0$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ crece.

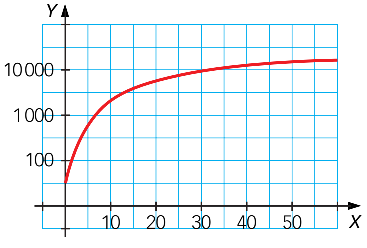
Si $x > 0$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decrece.

FAKE NEWS

¿Controlado?

Durante los primeros meses de la pandemia de COVID-19, el número total de personas infectadas creció los primeros días de forma exponencial.

Las autoridades tomaron las medidas necesarias y, después de un mes, se emitió un comunicado en el que se mostraba la siguiente gráfica y se afirmó que se había ralentizado la velocidad de expansión de la enfermedad.



Y tú, ¿qué opinas?

Aunque el número de infectados creció durante toda la pandemia, los primeros días creció de forma más acelerada, ralentizándose a partir del día 20.

El crecimiento se estudia con la derivada de la función, que es la pendiente de la recta tangente.

Se observa en la gráfica que la tangente tiene una pendiente mucho mayor en los primeros 20 días.

PROBLEMAS APARENTEMENTE DISTINTOS

120 Considera la función:

$$f(x) = \frac{14x + 5}{x^2 + 6}$$

donde $0 < x < 50$.

a) Indica las dos coordenadas del punto máximo de la función.

b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

a) $f'(x) = \dfrac{-14x^2 - 10x + 84}{(x^2 + 6)^2} = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = -2{,}83 \qquad x = 2{,}11$

Solo es válida $x = 2{,}11$ por el dominio de definición y es máximo porque $f'(1) > 0$ y $f'(3) < 0$. Por tanto, el máximo de la función es (2,11; 3,3).

b) En el intervalo (0; 2,11) la función es creciente y en el intervalo (2,11; 50) es decreciente.

121 El número de socios de una cooperativa se puede describir mediante la función $s(t) = t^2 + 6$. Los beneficios obtenidos se pueden modelizar mediante la función $b(t) = 14t + 5$. En ambos casos t es el tiempo en años y se cumple que $0 < t < 50$.

Si se reparten los beneficios equitativamente entre todos los socios, contesta:

a) ¿Tras cuántos años se obtiene el máximo beneficio por socio? ¿A cuánto asciende el beneficio?

b) Indica los periodos en los que los beneficios crecen y en los que decrecen.

$$f(t) = \frac{14t + 4}{t^2 + 6}$$

a) $f'(t) = \dfrac{-14t^2 - 10t + 84}{(t^2 + 6)^2} = 0 \rightarrow$

$\rightarrow t_1 = -2{,}83 \qquad t_2 = 2{,}11$

El máximo beneficio se obtiene poco después de cumplir 2 años como socio.

$$f(2{,}11) = \frac{14 \cdot 2{,}11 + 4}{2{,}11^2 + 6} = 3{,}2$$

El beneficio por socio a los 2 años es de 3,2.

b) $f'(1) > 0 \qquad f'(3) < 0$

Hasta los 2,11 años los beneficios crecen y a partir de ese momento y hasta los 50 años, los beneficios van decreciendo.

122 Halla una función polinómica $f(x)$ de grado 3 que cumpla las siguientes características.

- Pasa por (0, 2 500).
- Tiene un mínimo en (7, 2 108).
- Tiene un punto de inflexión en $x = 2$.

Indica también el valor de $f(10)$.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

Las condiciones que dicha función debe cumplir son las siguientes:

$f(0) = 2\,500 \rightarrow d = 2\,500$

$f'(7) = 0 \rightarrow 147a + 14b + c = 0$

$f(7) = 2\,108 \rightarrow 343a + 49b + 7c = -392$

$f''(2) = 0 \rightarrow 12a + 2b = 0$

Resolviendo el sistema formado por las tres últimas ecuaciones, se obtiene:

$a = 1, b = -6, c = -63, d = 2\,500$

Por tanto, la función es:

$f(x) = x^3 - 6x^2 - 63x + 2\,500.$

$f(10) = 2\,270$

123 Al inaugurarse, una galería de arte contaba con 2 500 € en su cuenta. Su saldo empezó a bajar hasta el séptimo mes, que tenían 2 108 €. En el segundo mes hubo un punto de inflexión.

a) Halla un polinomio de grado 3 que describa los ingresos de la galería.

b) Halla el posible saldo tras 10 meses.

La función tiene un máximo en (7, 2 108) y en $x = 2$ hay un punto de inflexión.

a) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

Las condiciones que dicha función debe cumplir son las siguientes:

$f(0) = 2\,500 \rightarrow d = 2\,500$

$f'(7) = 0 \rightarrow 147a + 14b + c = 0$

$f(7) = 2\,108 \rightarrow$

$\rightarrow 343a + 49b + 7c = -392$

$f''(2) = 0 \rightarrow 12a + 2b = 0$

Resolviendo el sistema formado por las tres últimas ecuaciones, se obtiene:

$a = 1, b = -6, c = -63, d = 2\,500$

Por tanto, la función es:

$f(x) = x^3 - 6x^2 - 63x + 2500.$

b) $f(10) = 2\,270$

El saldo a los 10 meses es 2270 €.

124 Considera la siguiente función.

$$f(x) = \frac{4x^2 + 10x}{x^2 + 1} - 4$$

a) Realiza un estudio de las principales características de la función que te permitan obtener su representación gráfica.

b) Indica el máximo de la función.

a) Dom $f(x) = \mathbb{R}$

Punto de corte con el eje X:

$$f(x) = \frac{4x^2 + 10x}{x^2 + 1} - 4 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 10x = 4 \rightarrow x = \frac{2}{5} \rightarrow$$

$\rightarrow$ El punto de corte es $\left(\frac{2}{5}, 0\right)$.

Punto de corte con el eje Y:

$f(0) = 0 - 4 \rightarrow y = -4$

El punto de corte es $(0, -4)$.

No tiene asíntotas verticales.

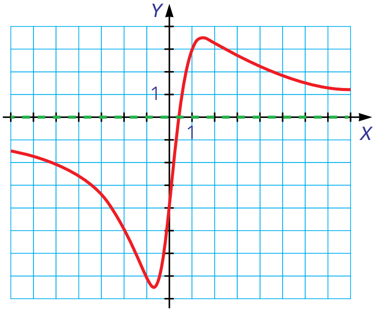
Tiene asíntota horizontal en $y = 0$.

$$f'(x) = \frac{-10x^2 + 8x + 10}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow$$

$\rightarrow x = 1{,}475 \qquad x = -0{,}675$

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty; -0{,}675) \cup (1{,}475; +\infty)$ y creciente en $(-0{,}675; 1{,}475)$.

En $x = 1{,}475$ tiene un máximo y en $x = -0{,}675$ tiene un mínimo.



b) $f(1{,}475) = 3{,}38$

125 Al diseñar una batería para una bicicleta se debe encontrar el equilibrio entre el peso de la batería y el esfuerzo de cargar con ella. Para medir este equilibrio se puede utilizar la función:

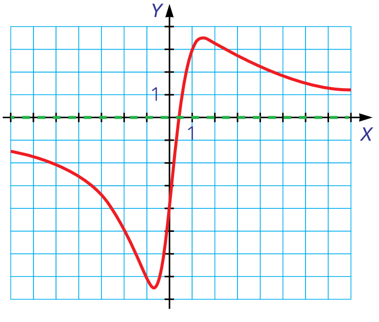
$$f(x) = \frac{4x^2 + 10x}{x^2 + 1} - 4$$

Representa la función e indica cuál sería el peso ideal.

$f'(x) = \dfrac{-10x^2 + 8x + 10}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = 1{,}475 \qquad x = -0{,}675$

El peso ideal de la batería es $x = 1{,}475$ kg, que es cuando el equilibrio es máximo.



¿PARA QUÉ SIRVE…?

1 Explica con tus palabras el concepto de sobreaceleración o *jerk*.

La sobreaceleración es la variación instantánea de la aceleración.

2 Propón algunos ejemplos donde se comprenda el concepto de sobreaceleración.

Cuando estás en vuelo en un avión y el piloto acelera bruscamente (te hundes en el asiento) o disminuye la aceleración de forma brusca (se nota una elevación del asiento). También puede observarse cuando vas en un tren, por ejemplo.

3 Si la función $s(t)$ define la posición de un móvil en cada instante t, la velocidad se define como la derivada de la posición, $v(t) = s'(t)$, y la aceleración, $a(t)$, como la derivada de la velocidad $a(t) = v'(t)$.

¿Cuál es la expresión de la sobreaceleración a partir de la función posición $s(t)$?

$s(t) \rightarrow v(t) = s'(t) \rightarrow a(t) = s''(t) \rightarrow$

$\rightarrow j(t) = s'''(t)$

4 Si la sobreaceleración es cero, ¿qué se puede decir de la aceleración? Valora todas las posibilidades que pueden existir.

Si la sobreaceleración es cero, puede ser porque la aceleración es constante o cero. A su vez, la aceleración es cero si la velocidad es constante o cero (el móvil está quieto).

5 La ecuación que determina la posición instantánea de un móvil es:

$$s(t) = -3t^2 - 2t + 62$$

a) Calcula la función que determina la velocidad, $v(t)$ del móvil.

b) Halla la función correspondiente a la aceleración instantánea, $a(t)$.

c) ¿Cuál es la sobreaceleración del móvil?

a) $v(t) = -6t - 2$

b) $a(t) = -6$

c) $j(t) = 0$