32. $\boldsymbol{f(x)=\frac{2-x^2}{x^2-1}}$

1º) Domf: $\Re--1,1$ $x^2 - 1 = 0$ x = 1 x = -1 Asíntotas verticales

2º) $f(-x)=\frac{2-(-x)^2}{(-x)^2-1}=\frac{2-x^2}{x^2-1}=f(x)$ simetría PAR

3º) Puntos de corte: Eje Y: x = 0 y = 2/-1 = -2 (0, -2)
Eje X: y = 0 $2 - x^2 = 0$ $x=\pm\sqrt{2}$

- + - + -
$-\sqrt{2}$ -1 1 $\sqrt{2}$

4º) Monotonía: f'(x) = 0

$$f'(x)=\frac{-2x(x^2-1)-(2-x^2)2x}{(x^2-1)^2}=\frac{-2x^3+2x-4x+2x^3}{(x^2-1)^2}=\frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$ -2x = 0 x = 0

+ + - -
-1 0 1

Crecimiento: (-∞, 1) U (-1, 0) Decrecimiento: (0, 1) U (1, +∞)

Máximo: (0, -2)

5º) Concavidad y convexidad:

$$f''(x)=\frac{-2(x^2-1)^2-(-2x)2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4}=\frac{-2(x^2-1)-(-2x)2\cdot 2x}{(x^2-1)^3}=\frac{-2x^2+2+8x^2}{(x^2-1)^3}=\frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$$

f''(x) = 0 no tiene solución –> No hay puntos de inflexión

+ U - ∩ + U
-1 1

6º) Asíntotas verticales: x = -1 x = 1

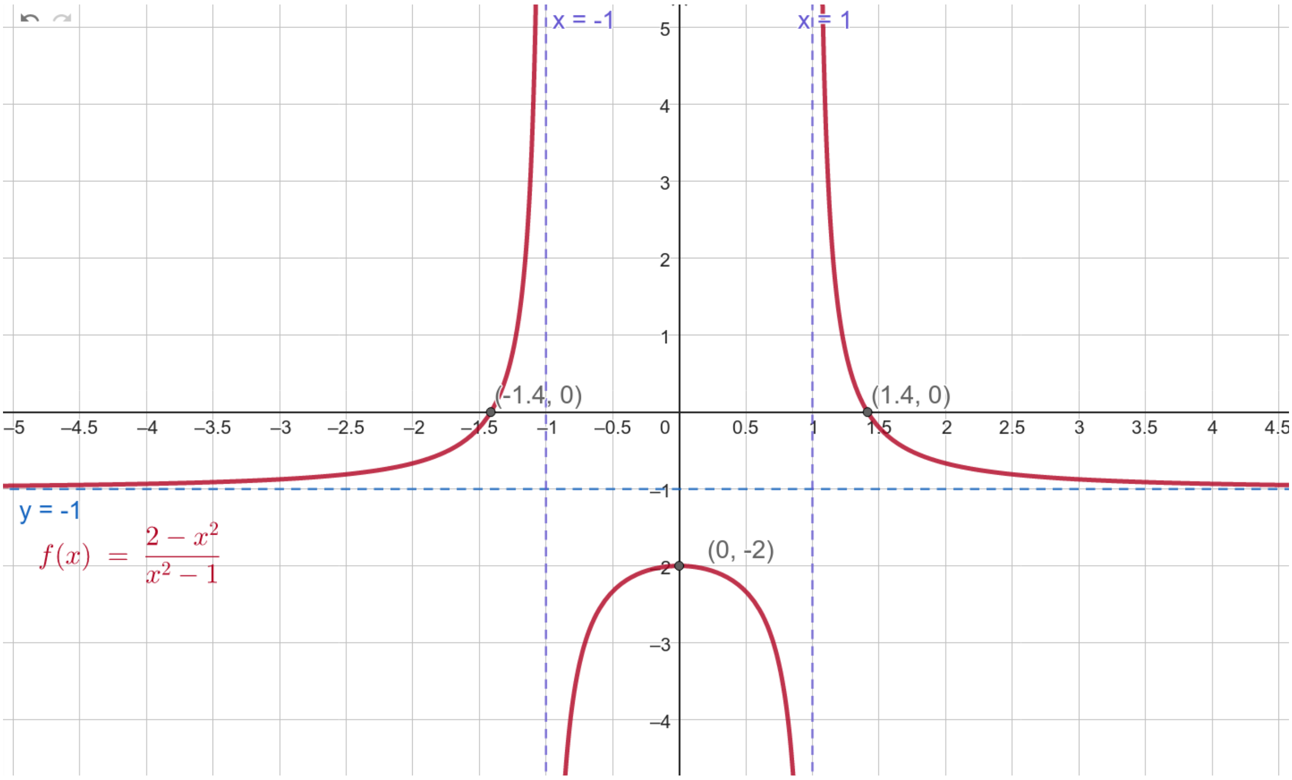
$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{2-x^2}{x^2-1}=+\infty \qquad \lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{2-x^2}{x^2-1}=-\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{2-x^2}{x^2-1}=-\infty \qquad \lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{2-x^2}{x^2-1}=+\infty$$

Asíntota horizontal: $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2-x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2}{x^2}=-1$ –> y = -1

x = 1000 –> f(1000) = -0,999999 (por encima de -1)
x = -1000 –> f(-1000) = -0,999999 (por encima de -1)

REPRESENTACIÓN DE FUNCIÓNS RACIONAIS CON ASÍNTOTAS HORIZONTAIS



97. b) $f(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x^2+2x+1}$

b) Dom $f = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2+2x+3}{x^2+2x+1} &= +\infty\\ \lim_{x\to -1^+}\frac{x^2+2x+3}{x^2+2x+1} &= +\infty\end{aligned}\right\} \rightarrow x=-1 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+2x+3}{x^2+2x+1} = 1 \rightarrow y = 1 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

Punto de corte con el eje Y: (0, 3)

$$f'(x)=\frac{(2x+2)(x^2+2x+1)-(x^2+2x+3)(2x+2)}{(x^2+2x+1)^2}=\frac{-4x-4}{(x^2+2x+1)^2}$$

$-4x-4=0 \rightarrow x=-1 \notin$ Dom f

$f'(x)>0$ si $x<-1 \rightarrow f(x)$ es creciente en $(-\infty,-1)$.

$f'(x)<0$ si $x>-1 \rightarrow f(x)$ es decreciente en $(-1,+\infty)$.

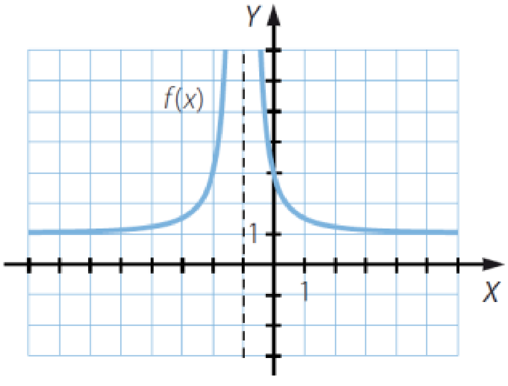
La función no tiene máximos ni mínimos.

$$f''(x)=\frac{-4(x^2+2x+1)^2-(-4x-4)\cdot 2\cdot(x^2+2x+1)\cdot(2x+2)}{(x^2+2x+1)^4}=\frac{-4(x^2+2x+1)-(-4x-4)\cdot 2\cdot(2x+2)}{(x^2+2x+1)^3}=$$

$$=\frac{-4x^2-8x-4+16x^2+8x+16}{(x^2+2x+1)^3}=\frac{12x^2+12}{(x^2+2x+1)^3}$$

$12x^2+12=0$ No tiene solución, por lo tanto no hay puntos de inflexión.

$f''(0)=\dfrac{12}{1^3}=12>0$ La función es convexa en todo el dominio



REPRESENTACIÓN DE FUNCIÓNS RACIONAIS CON ASÍNTOTAS HORIZONTAIS

Representa la función: $\boldsymbol{f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-9}}$

1º) Domf = $\mathbb{R}-\{3,-3\}$ $x^2-9=0$ x = 3 x = -3

2º) Simetría: $f(-x)=\dfrac{-x+2}{(-x)^2-9}=\dfrac{-x+2}{x^2-9}\neq f(x)$ y f(-x) ≠ - f(x) No hay simetría

3º) Puntos de corte: Eje X : x+2 = 0 x = -2 (-2, 0)
Eje Y : f(0) = 2/-9 (0, -2/9)

4º) Crecimiento /decrecimiento

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2-9)-(x+2)\cdot 2x}{(x^2-9)^2}=\frac{x^2-9-2x^2-4x}{(x^2-9)^2}=\frac{-x^2-4x-9}{(x^2-9)^2}$$

f'(x) = 0 no tiene solución

-3 3

f'(-4)=-9/49 f'(0) = -9/81 f'(4)=-41/49

f decrece en todo el dominio
No hay máximos ni mínimos

5º) Concavidad/convexidad

$$f''(x)=\frac{(-2x-4)\cdot(x^2-9)^2-(-x^2-4x-9)\cdot 2\cdot(x^2-9)\cdot 2x}{(x^2-9)^4}=$$

$$=\frac{(-2x-4)\cdot(x^2-9)-(-x^2-4x-9)\cdot 2\cdot 2x}{(x^2-9)^3}=\frac{-2x^3+18x-4x^2+36+4x^3+16x^2+36x}{(x^2-9)^3}=$$

$$=\frac{2x^3+12x^2+54x+36}{(x^2-9)^3}$$

f''(x) = 0 Solución: -0,786

- ∩ + U - ∩ + U

-3 -0,786 3

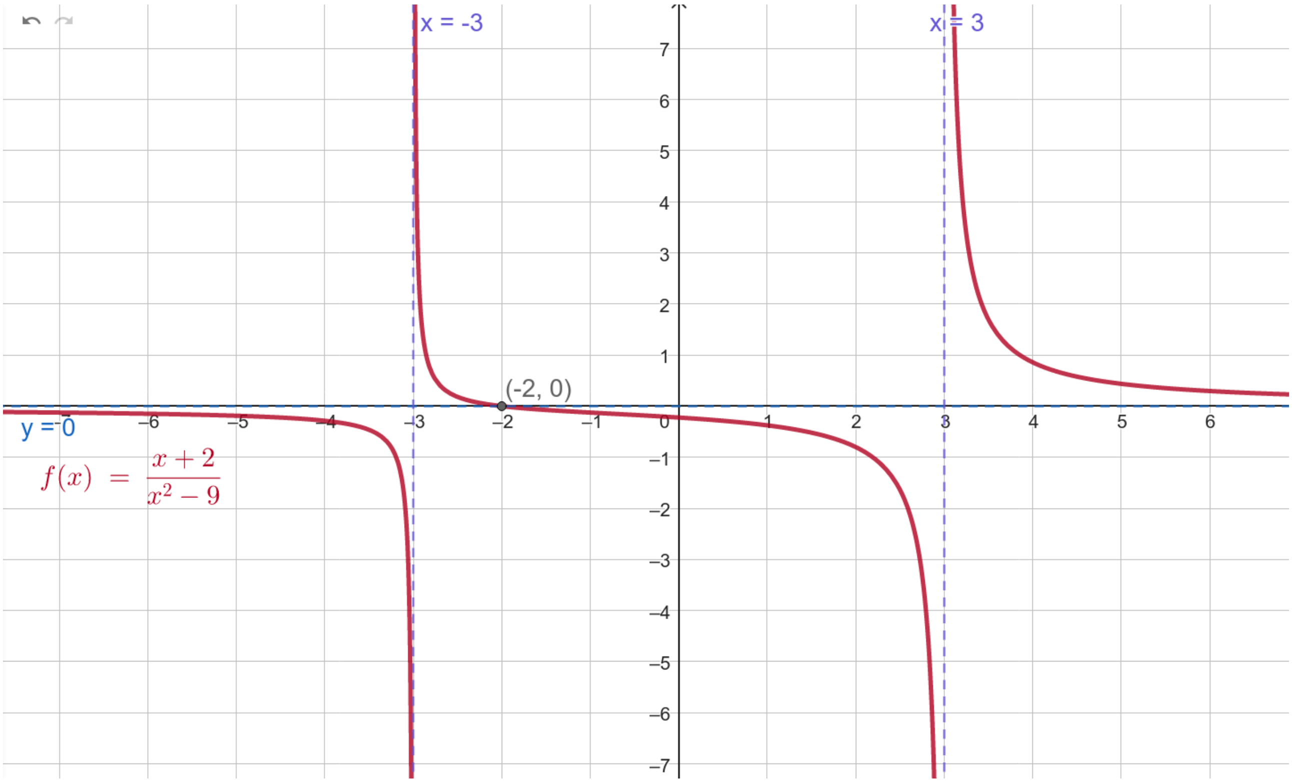
6º) Asíntotas: A. V. : x = 3 x = -3

$$\lim_{x\to -3^-} f(x)=\lim_{x\to -3^-}\frac{x+2}{x^2-9}=-\infty \qquad \lim_{x\to -3^+} f(x)=\lim_{x\to -3^+}\frac{x+2}{x^2-9}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}\frac{x+2}{x^2-9}=-\infty \qquad \lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{x+2}{x^2-9}+\infty$$

Asíntota horizontal: A. H. : $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x+2}{x^2-9}=0$ y = 0

REPRESENTACIÓN DE FUNCIÓNS RACIONAIS CON ASÍNTOTAS HORIZONTAIS



98. d) $f(x)=\frac{x^2+1}{x^3+1}$

d) El dominio, dado por todos los números que no anulen el denominador. Por tanto, $\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{-1\}$.

No tiene puntos de corte con el eje X, ya que $f(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Punto de corte con el eje Y:

$x = 0 \rightarrow f(0) = 1 \rightarrow$ El punto de corte es (0, 1).

Tiene asíntota vertical en $x = -1$.

Tiene asíntota horizontal en $y = 0$.

$$f'(x) = -\frac{x(x^3+3x^2-2)}{(x^3+1)^2} \rightarrow \begin{cases} f'(x) < 0 \text{ en } x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0{,}596; +\infty) \rightarrow f(x) \text{ decrece} \\ f'(x) > 0 \text{ en } x \in (0; 0{,}596) \rightarrow f(x) \text{ crece} \end{cases}$$

Puesto que $f'(x) = -\frac{x(x^3+3x-2)}{(x^3+1)^2}$ se anula en $x = 0$ y en $x = 0{,}596$. Calculamos la segunda derivada:

$f''(x) = \frac{2(x^6+6x^4-7x^3-3x+1)}{(x^2+1)^3}$, que si es evaluada en los puntos críticos, se obtiene:

$$\begin{cases} f''(0{,}596) = -1{,}650 < 0 \rightarrow x = 0{,}596 \text{ máximo} \\ f''(0) = 2 > 0 \rightarrow x = 0 \text{ mínimo} \end{cases}$$