

NOMBRE Y APELLIDOS: _____

NOTA: Define todas las variables que utilices, indicando su distribución.

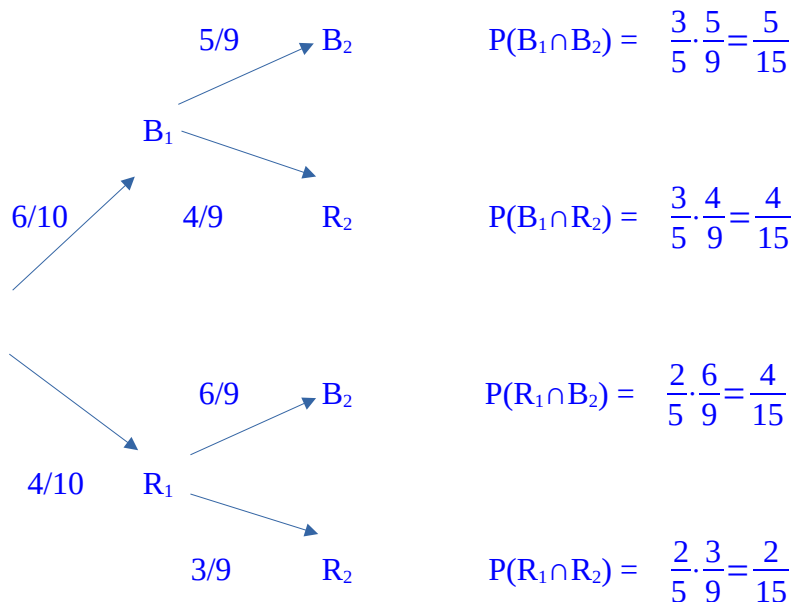
1.- Una urna contiene 4 bolas rojas y 6 blancas. Se saca una bola al azar, se apunta el color, y **sin** devolverla a la urna se extrae otra bola. Sea X la variable aleatoria que describe el número de bolas blancas obtenidas.

a) Calcula la función de probabilidad y represéntala.

b) Calcula la función de distribución y represéntala.

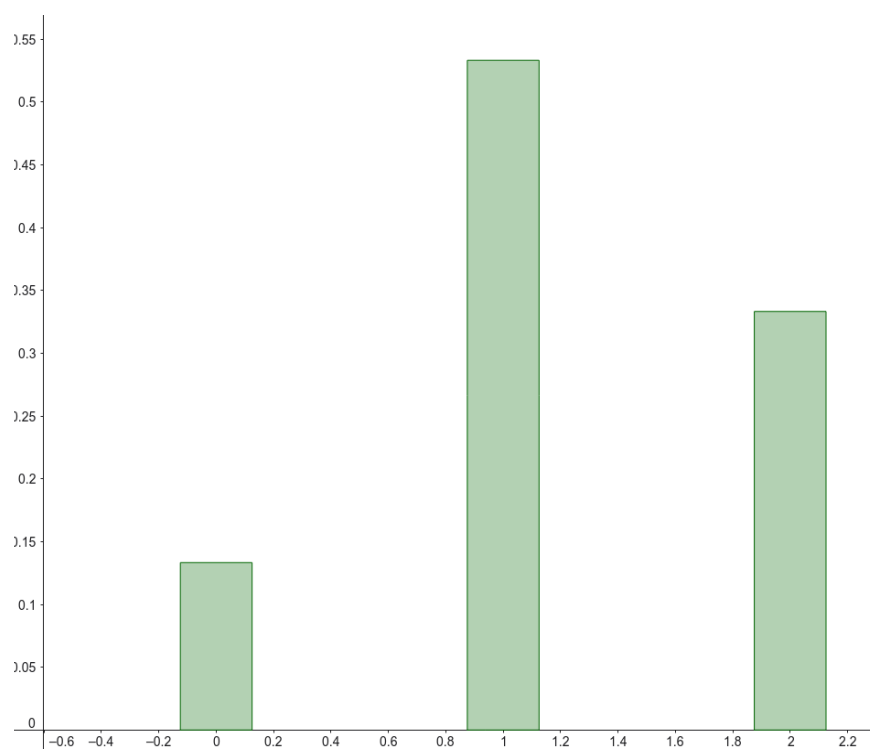
c) Calcula su media y su varianza.

1 + 1 + 0,5 puntos

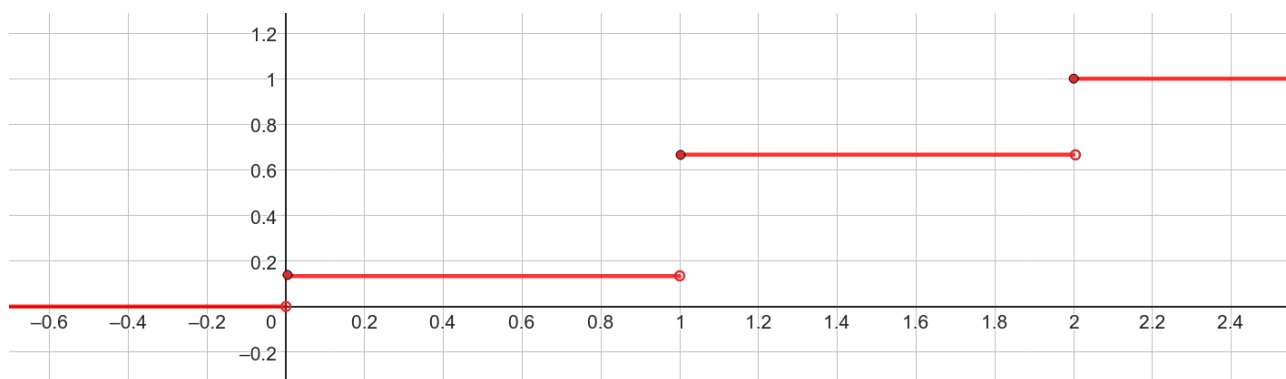


k	$P(X=k)$ (Función de probabilidad)	$P(X \leq k)$ (Función de distribución)	$k \cdot P(X=k)$	$k^2 \cdot P(X=k)$
0	$P(X=0) = \frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	0	0
1	$P(X=1) = \frac{8}{15}$	$\frac{10}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{8}{15}$
2	$P(X=2) = \frac{5}{15}$	1	$\frac{10}{15}$	$\frac{20}{15}$
	$\frac{95}{95} = 1$		$\mu = \frac{18}{15} = \frac{6}{5}$	$\frac{28}{15}$

a) Diagrama de barras



b) Función de distribución

c) Media: $\mu = 6/5$

Varianza: $\sigma^2 = \sum_{i=1}^n i^2 \cdot P(X=i) - \mu^2 = 28/15 - (6/5)^2 = 32/75$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\frac{32}{75}}$ (no la pedía)

2.- Un examen de preguntas con respuestas múltiples consta de 8 preguntas con 4 opciones de respuesta. Si un alumno responde al azar, calcula la probabilidad de que:

- a) Responda correctamente a 6 preguntas
- b) Responda correctamente menos de 7 preguntas.
- c) Responda de forma errónea como mínimo 1 pregunta.
- d) Calcula el número medio de respuestas acertadas.

0,25(definir variable) + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 puntos

$X = n^{\circ}$ de preguntas contestadas correctamente

$n = 8$ experimentos iguales e independientes (cada pregunta es un experimento)

$p = 1/4$ (probabilidad de éxito de 1 pregunta)

Por lo tanto, $X \sim B(8, 1/4)$

$$a) \quad P(X=6) = \binom{8}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{8-6} = 0,0038$$

b)

$$P(X < 7) = 1 - P(X \geq 7) = 1 - P(X=7) - P(X=8) = 1 - \binom{8}{7} \left(\frac{1}{4}\right)^7 \left(\frac{3}{4}\right)^{8-7} - \binom{8}{8} \left(\frac{1}{4}\right)^8 \left(\frac{3}{4}\right)^{8-8}$$

$$= 1 - 0,000366 - 0,000015 = 0,9996$$

c) Fallar como mínimo 1 pregunta es equivalente a acertar como máximo 7 preguntas:

$$P(X \leq 7) = 1 - P(X > 7) = 1 - P(X=8) = 1 - \binom{8}{8} \left(\frac{1}{4}\right)^8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{8-8} = 1 - \frac{1}{4^8} \simeq 0,99998$$

Otra opción es definir una nueva variable:

$Y = n^{\circ}$ de preguntas contestadas erróneamente $\rightarrow Y \sim B(8, 3/4)$

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - \binom{8}{0} \left(\frac{3}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{8-0} = 1 - \frac{1}{4^8} \simeq 0,99998$$

d) $\mu = np = 8 \cdot 0,25 = 2$ respuestas correctas cabe esperar

3.- Una empresa instala en una ciudad 20.000 bombillas. La duración de una bombilla sigue una distribución normal con media 302 días y varianza 1600.

- a) ¿Cuántas bombillas se espera que se fundan antes de un año?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que una bombilla dure entre 272 y 322 días?
- c) La empresa debe pasar un control de calidad. El 95% de las bombillas tiene que superar los 290 días de duración para obtener un certificado positivo. ¿Pasará la empresa el control de calidad?
- d) ¿Cuál es el número de días que no superará en duración el 85% de las bombillas?

0,25(definir variable) + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 puntos

$X =$ nº de días de duración de una bombilla $X \sim N(302; \sqrt{1600}=40)$

$$a) P(X < 365) = P\left(Z < \frac{365-302}{40}\right) = P(Z < 1,58) = 0,9429$$

La probabilidad de que una bombilla dure menos de un año es de 0,9429. El número de bombillas que se espera que se fundan antes de un año es: $0,9429 \cdot 20000 = 18858$

$$b) P(272 < X < 322) = P\left(\frac{272-302}{40} < Z < \frac{322-302}{40}\right) = P(-0,75 < Z < 0,5) =$$

$$P(Z < 0,5) - P(Z < -0,75) = P(Z < 0,5) - (1 - P(Z < 0,75)) = P(Z < 0,5) - 1 + P(Z < 0,75) =$$

$$= 0,6915 - 1 + 0,7734 = 0,4649$$

$$c) P(X > 290) = P\left(Z > \frac{290-302}{40}\right) = P(Z > -0,3) = P(Z < 0,3) = 0,6179$$

61,79% < 95% por tanto la empresa no superará el control de calidad

Otra forma de responder la pregunta es calcular el número de días funcionando que supera el 95% de las bombillas: $P(X > d) = 0,95$

Podemos calcular k tal que $P(Z > k) = 0,95$ e igual después el valor a $(d-302)/40$:

Buscamos en la tabla de la normal $P(Z > k) = P(Z < -k) = 0,95 \rightarrow -k = 1,645$

Igualemos $(d - 302) / 40 = -1,645 \rightarrow d = 302 - 40 \cdot 1,645 = 236,2$ días

El 95% de las bombillas solo superan los 236,2 días de duración lo que no cumple la condición para obtener el certificado de calidad.

$$c) P(X < d) = 0,85 \rightarrow P\left(\frac{X-302}{40} < \frac{d-302}{40}\right) = P\left(Z < \frac{d-302}{40}\right) = 0,85$$

Buscamos en la tabla de la normal $P(Z < k) = 0,85 \rightarrow -k = 1,035$

Igualemos $(d - 302) / 40 = 1,035 \rightarrow d = 302 + 40 \cdot 1,035 = 343,4$ días

El 85% de las bombillas no superan los 343,4 días de duración.

4.- Calcula razonadamente el valor de k para que la función de la gráfica sea una función de densidad:



Calcula $P(X < 2)$, $P(X = 3)$ y $P(1 < X \leq 3)$ **0,5 + 0,25 + 0,25 + 0,25 puntos**

El área bajo la función debe ser 1: $2k + 2k/2 = 3k = 1 \rightarrow k = 1/3$

$$P(X < 2) = 2k = 2/3$$

$$P(X = 3) = 0$$

$$P(1 < X \leq 3) = \text{Área rectángulo de base } [1, 2] + \text{Área triángulo de base } [2, 4] - \text{Área triángulo de base } [3, 4] = 1k + 2k/2 - (k/2) \cdot 1/2 = 1/3 + 1/3 - 1/12 = 7/12$$

También se puede hacer integrando, la función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} k & 0 \leq x \leq 2 \\ -\frac{kx}{2} + 2k & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$$1^\circ) f(x) \geq 0 \quad 2^\circ) \int_0^4 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx = \int_0^2 k dx + \int_2^4 \left(-\frac{kx}{2} + 2k\right) dx = 1$$

$$kx \Big|_0^2 + \left(-\frac{kx^2}{4} + 2kx\right) \Big|_2^4 = 2k + (-4k + 8k) - \left(-k + 4k\right) = 2k + k = 1 \rightarrow k = 1/3$$

$$P(X < 2) = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3} x \Big|_0^2 = \frac{2}{3}$$

$$P(X = 3) = 0$$

$$P(1 < X \leq 3) =$$

$$\int_1^3 f(x) dx = \int_1^2 \frac{1}{3} dx + \int_2^3 \left(\frac{-x}{6} + \frac{2}{3}\right) dx = \frac{x}{3} \Big|_1^2 + \left(\frac{-x^2}{12} + \frac{2x}{3}\right) \Big|_2^3 = \frac{1}{3} + \frac{-9}{12} + 2 - \frac{-4}{12} - \frac{4}{3} = \frac{7}{12}$$

5. Las cafeterías universitarias son espacios en los que, además de poder consumir alimentos y bebidas, en numerosas ocasiones se emplean como puntos de encuentro para otros eventos. Con el objetivo de estudiar si es necesario realizar modificaciones en la cafetería, sus responsables han analizado datos sobre el tiempo de espera hasta que un cliente ha sido atendido y sobre la forma de realizar los pagos.

Puede suponerse que el tiempo de espera hasta que un cliente es atendido sigue una distribución aproximadamente normal, con media igual a 5 minutos y de tal modo que el 90% de los clientes son atendidos antes de 8 minutos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente sea atendido antes de 4 minutos?

b) ¿Cuál es la espera, en minutos, excedida por el 95% de los clientes?

0,25(definir variable) + 0,75 + 0,75 puntos

$X =$ tiempo de espera de un cliente en minutos $X \sim N(5; \sigma)$

$$a) P(X < 8) = 0,90 \rightarrow P\left(Z < \frac{8-5}{\sigma}\right) = 0,9 \rightarrow \frac{8-5}{\sigma} = 1,28 \rightarrow \sigma = 3/1,28 = 2,34$$

$$P(X < 4) = P\left(Z < \frac{4-5}{2,34}\right) = P(Z \leq -0,43) = 1 - P(Z \leq 0,43) = 1 - 0,6664 = 0,3336$$

La probabilidad de que un cliente sea atendido antes de 4 minutos es de 0,3336.

$$b) P(X > m) = 0,95 \rightarrow P(X > m) = P\left(Z > \frac{m-5}{2,34}\right) = 0,95$$

Podemos calcular k tal que $P(Z > k) = 0,95$ e igual después el valor a $(m-5)/2,34$:

Buscamos en la tabla de la normal $P(Z > k) = P(Z < -k) = 0,95 \rightarrow -k = 1,645$

Igualamos $(m - 5) / 2,34 = -1,645 \rightarrow m = 5 - 2,34 \cdot 1,645 = 1,15$ minutos

El 95% de los clientes esperan más de 1,15 minutos.