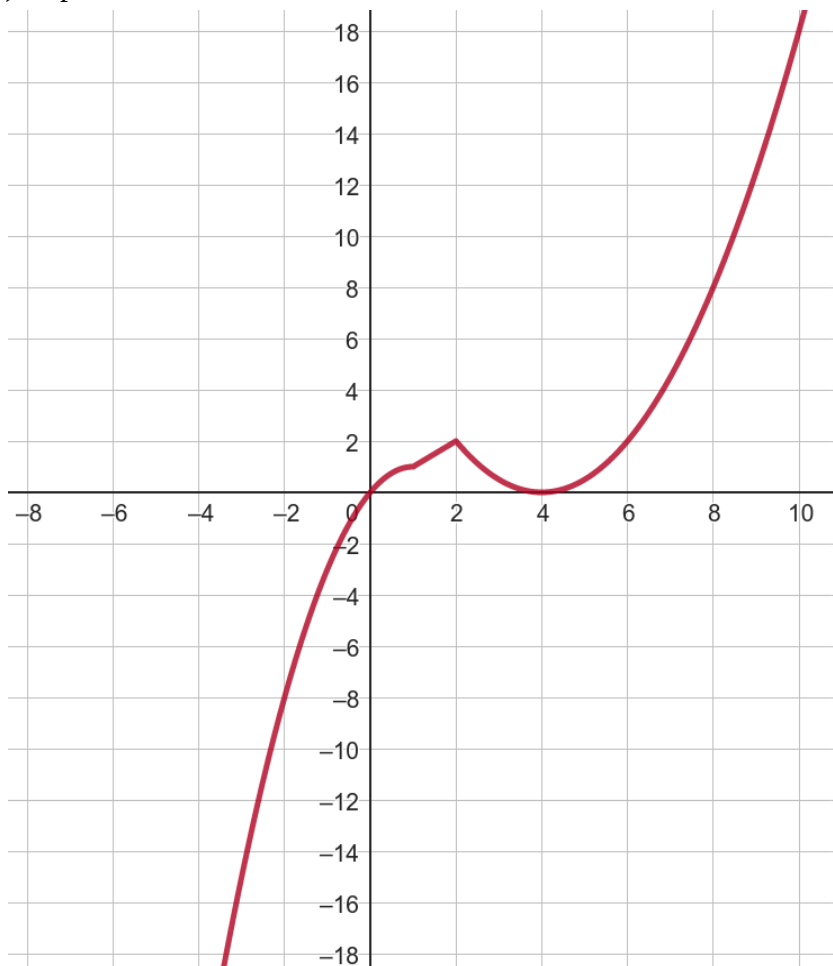


1. Representa a función definida a anacos:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{se } x \leq 1 \\ x & \text{se } 1 < x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

a) Representa a función.



$$f(x) = -x^2 + 2x$$

$$a = -1 \rightarrow \text{Cóncava } \cap$$

$$\text{Vértice: } x = -2/(-2) = 1$$

$$y = -1^2 + 2 \cdot 1 = 1$$

Puntos de corte cos eixos:

$$x = 0, y = 0$$

$$x = 2, y = 0$$

$$f(x) = x \rightarrow f(1) = 1 \text{ y } f(2) = 2$$

$$f(x) = 0.5x^2 - 4x + 8$$

$$a = 0.5 \rightarrow \text{Convexa } \cup$$

$$\text{Vértice: } x = -(-4)/(2 \cdot 0.5) = 4$$

$$y = 0.5 \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 + 8 = 0$$

Puntos de corte cos eixos:

$$x = 0, y = 8$$

$$x = 4, y = 0$$

b) Calcula: $f(-2) = -(-2)^2 + 2(-2) = -4 - 4 = -8$

$$f(0) = -0^2 + 2 \cdot 0 = 0$$

$$f(2) = 0.5 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 8 = 2$$

$$f(10) = 0.5 \cdot 10^2 - 4 \cdot 10 + 8 = 2$$

$$f^{-1}(0) = 0 \text{ e } 4$$

1º anaco: $-x^2 + 2x = 0 \rightarrow x = 0, 2$ (2 non está neste anaco da función)

2º anaco: $x = 0 \rightarrow 0$ non está neste anaco da función

3º anaco: $0.5x^2 - 4x + 8 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 0.5 \cdot 8}}{2 \cdot 0.5} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{1} = 4$

$$f^{-1}(-1) = 1 - \sqrt{2} \approx -0,4142$$

1º anaco: $-x^2 + 2x = -1 \rightarrow -x^2 + 2x + 1 = 0 \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 1}}{2 \cdot (-1)} = 1 \pm \sqrt{2}$

$x = 1 - \sqrt{2} \approx -0,4142$, $1 + \sqrt{2} \approx 2,4142$ (2,4142 non está neste anaco da función)

2º anaco: $x = -1 \rightarrow -1$ non está neste anaco da función

$$3^{\circ} \text{ anaco: } 0.5x^2 - 4x + 8 = -1 \rightarrow 0.5x^2 - 4x + 9 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 0.5 \cdot 9}}{2 \cdot 0.5} = \frac{4 \pm \sqrt{-2}}{1} \text{ no sol.}$$

$$f^1(1/2) = 3 \text{ y } 5$$

$$1^{\circ} \text{ anaco: } -x^2 + 2x = 1/2 \rightarrow -x^2 + 2x - 1/2 = 0 \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1/2)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{2}}{-2}$$

$$x = \frac{-2 + \sqrt{2}}{-2} \simeq 0,2929 \quad , \quad \frac{-2 - \sqrt{2}}{-2} \simeq 1,7071 \quad (1,7071 \text{ non está neste anaco da función})$$

$$2^{\circ} \text{ anaco: } x = -1/2 \rightarrow 1/2 \text{ non está neste anaco da función}$$

$$3^{\circ} \text{ anaco: } 0.5x^2 - 4x + 8 = 1/2 \rightarrow 0.5x^2 - 4x + 15/2 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 0.5 \cdot 15/2}}{2 \cdot 0.5} = \frac{4 \pm \sqrt{1}}{1}$$

$$x = 3 \text{ y } 5$$

c) Analiza os intervalos de crecemento, decrecemento, máximos e mínimos.

Crecemento: $(0, 2) \cup (4, +\infty)$ Decrecemento: $(2, 4)$ Máximo: $(2, 2)$ Mínimo: $(4, 0)$

d) Analiza os intervalos de concavidade e convexidade.

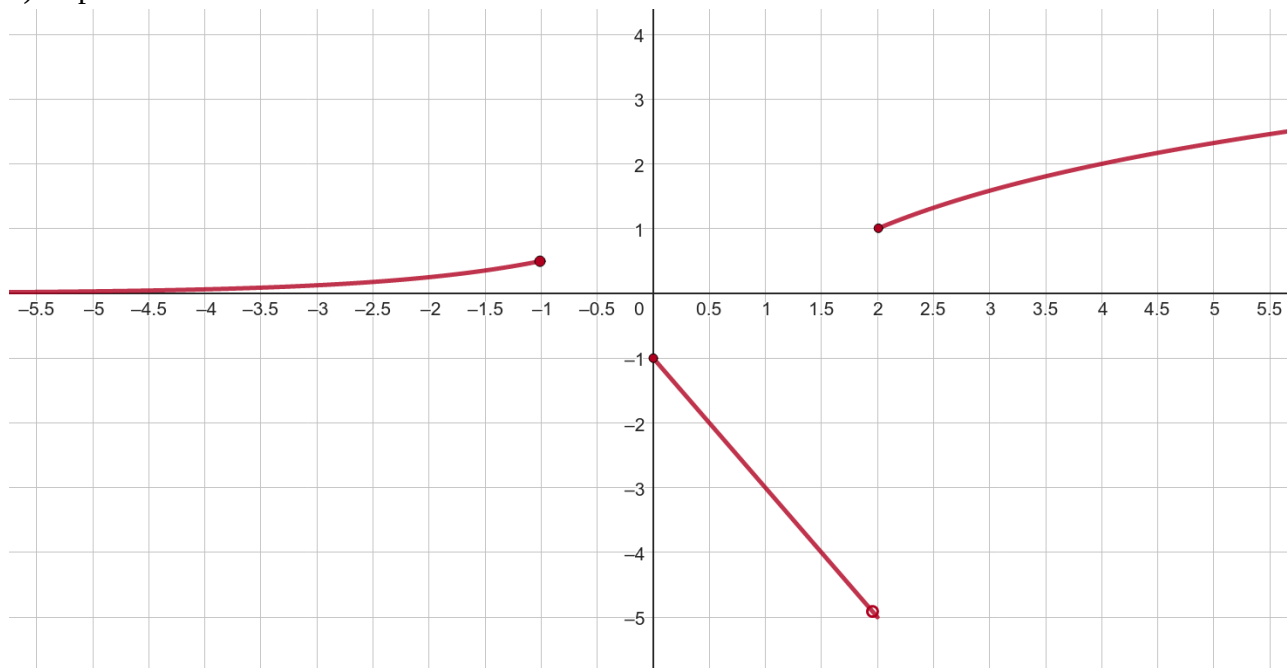
Concavidade: $(0, 1)$ Convexidade: $(2, +\infty)$

e) Calcula: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. Representa a función definida a anacos:

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{se } x \leq -1 \\ -2x - 1 & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ \log_2 x & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

a) Representa a función.



b) Calcula: $f(-2) = 2^{-2} = 1/4$, $f(0) = -2 \cdot 0 - 1 = -1$, $f(2) = \log_2 2 = 1$, $f(16) = \log_2 16 = 4$
 $f^{-1}(0) = \text{Non ten solución}$, $f^{-1}(1) = 2$ y $f^{-1}(8) = 2^8 = 256$.

c) Analiza os intervalos de crecemento, decrecemento, máximos e mínimos.

Crecemento: $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ Decrecemento: $(0, 2)$ Máximos: $(-1, 1/2)$ e $(0, -1)$
 Mínimo: Non hai

d) Analiza os intervalos de concavidade e convexidade.

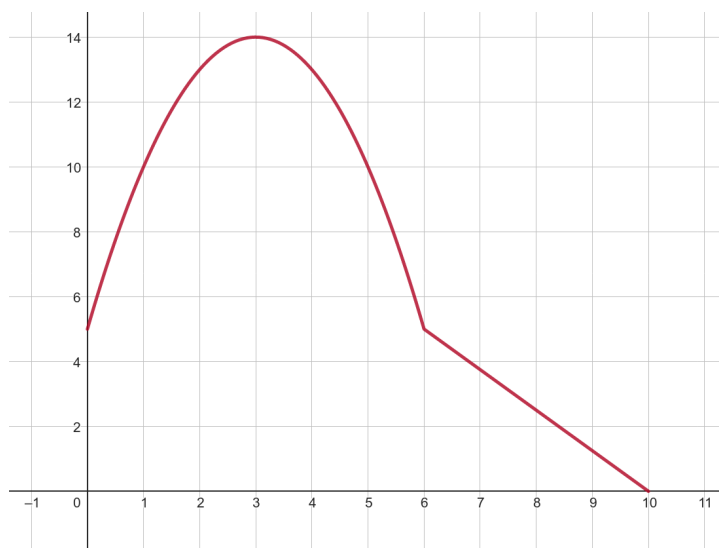
Concavidade: $(2, +\infty)$ Convexidade: $(-\infty, -1)$

e) Calcula: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3. Unha enfermidade propágase de tal xeito que, despois de t semanas afectou a $N(t)$ centos de persoas, onde

$$N(t) = \begin{cases} 5 - t(t - 6) & \text{se } 0 \leq t \leq 6 \\ \frac{-5}{4}(t - 10) & \text{se } 6 < t \leq 10 \end{cases}$$

É recomendable representar a gráfica da función antes de contestar ás preguntas:



$$N(t) = -t^2 + 6t + 5$$

$a = -1 \rightarrow$ Cóncava $\cap$

Vértice: $t = -b/a = -6/(-2) = 3$

$$y = -3^2 + 6 \cdot 3 + 5 = 14$$

Puntos de corte cos eixos:

Eixo Y: $t = 0, y = 5$

Eixo X: $y = 0$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 5}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-6 \pm \sqrt{56}}{-2}$$

estes valores non están entre 0 e 6

$$\text{No extremo } t = 6 \quad N(6) = -6^2 + 6 \cdot 6 + 5 = 5$$

Para representar a recta: $N(t) = -5/4(t - 10) \rightarrow N(6) = 5$ y $N(10) = 0$

a) Cantas persoas están afectadas pola enfermidade ao inicio?

$$N(0) = 5 - 0(0 - 6) = 5 \rightarrow \text{ao inicio estaban afectadas 500 persoas.}$$

b) Estuda o crecemento e decrecemento de $N(t)$. Calcula o máximo de persoas afectadas e a semana na que se presenta ese máximo.

Crecemento: (0, 3) Decrecemento: (3, 10) Máximo: (3, 14)

O máximo de persoas afectadas foi de 1400 na 3ª semana.

c) A partir de que semana a enfermidade afecta a 250 persoas como máximo?

$$N(t) = -5/4(t - 10) = 2,5 \rightarrow \frac{-5t + 50}{4} = \frac{5}{2} \rightarrow -5t + 50 = 10 \rightarrow -5t = -40 \rightarrow t = 8$$

Na semana 8 o número de afectados foi de 250.

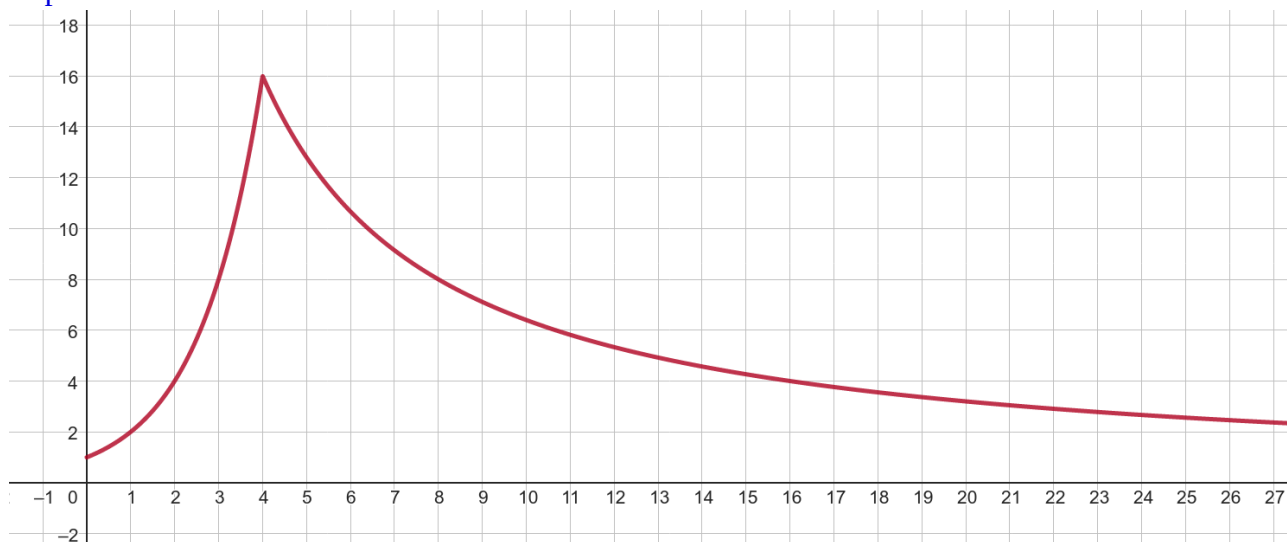
d) Representa a función.

4. Os beneficios (en millóns de euros por ano) estimados para unha empresa axústanse á seguinte función:

$$B(x) = \begin{cases} 2^x & \text{se } 0 \leq x < 4 \\ \frac{64}{x} & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$

onde B representa os beneficios da empresa e x os anos transcorridos dende o momento da súa constitución ($x=0$).

Representamos a función:



a) Cales eran os beneficios da empresa no momento da súa constitución?

$$x = 0 \rightarrow B(0) = 2^0 = 1$$

Os beneficios no momento da súa constitución eran de 1 millón de euros

b) Determina os intervalos de crecemento e decrecemento de $B(x)$. Que información nos dan sobre a evolución dos beneficios ao longo do tempo?

$$\text{Crecemento: } (0, 4) \quad \text{Decrecemento: } (4, +\infty) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} B(x) = 0$$

Os beneficios da empresa aumentaron os primeiros catro anos para diminuír os anos seguintes. A tendencia ao longo do tempo é de cero beneficio.

c) Ao cabo de canto tempo obtén a empresa o máximo beneficio? Cal é este beneficio máximo?

O máximo beneficio obtense no cuarto ano sendo este beneficio máximo de 16 millóns de euros.

d) En que momento a empresa ten uns beneficios de 4 millóns de euros?

$$B(x) = 2^x = 4 \rightarrow x = 2 \quad B(x) = 64/x = 4 \rightarrow x = 16$$

No ano 2 e 16 a empresa tivo uns beneficios de 4 millóns de euros.

5. Mércase un equipo industrial en 2010 ($x=0$), que se sabe que xera uns ingresos en miles de euros anuais de $I(x)=6125-\frac{125}{4}x^2$ sendo x os anos despois de mercalo. Ao mesmo tempo, os custos de funcionamento e mantemento son $G(x)=2000+10x^2$ en miles de euros anuais.

a) Cales eran os ingresos e os gastos ao mercar o equipo no ano 2010? E no 2024?

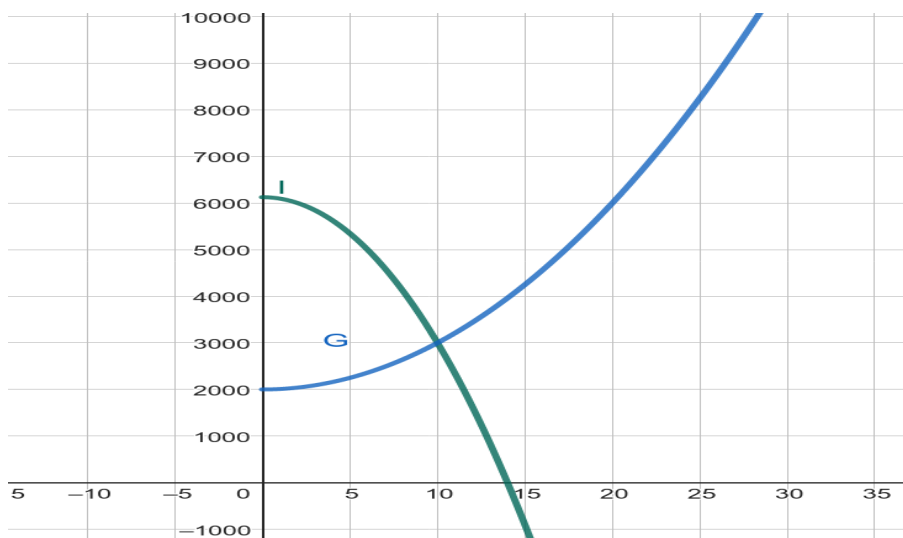
No ano 2010: $I(0) = 6125$ os ingresos eran de 6.125.000€

$G(0) = 2000$ os gastos eran de 2.000.000€

No ano 2024: $I(14) = 6125 - \frac{125}{4}14^2 = 0$ os ingresos eran de 0€

$G(14) = 2000 + 10 \cdot 14^2 = 3960$ os gastos eran de 3.960.000€

b) Representa as gráficas das funcións $I(x)$ e $G(x)$ entre 2010 e 2024.



c) Durante cantos anos foi rendible o equipo?

$$I(x) = G(x) \rightarrow 6125 - \frac{125}{4}x^2 = 2000 + 10x^2 \rightarrow \frac{24500 - 125x^2}{4} = \frac{8000 + 40x^2}{4} \rightarrow$$

$$24500 - 125x^2 = 8000 + 40x^2 \rightarrow 24500 - 8000 = 40x^2 + 125x^2 \rightarrow 16500 = 165x^2 \rightarrow x = 10$$

Os ingresos foron superiores aos gastos os 10 primeiros anos. A partir do décimo ano os ingresos son inferiores aos gastos. Polo tanto, o equipo foi rendible os primeiros 10 anos.

d) En que ano o beneficio foi máximo e a canto ascendeu o mesmo?

$$B(x) = I(x) - G(x) = 6125 - \frac{125}{4}x^2 - (2000 + 10x^2) = 4125 - \frac{165}{4}x^2$$

O máximo acádase no vértice da parábola: $x = 0$ $y = 4125$

No ano 2010 o beneficio foi máximo e ascendeu a 4.125.000€.

6. O número de vehículos que pasaron certo día pola peaxe dunha autoestrada ven representado pola función

$$N(t) = \begin{cases} \left(\frac{t-3}{3}\right)^2 + 2 & \text{se } 0 \leq t \leq 9 \\ 10 - \left(\frac{t-15}{3}\right)^2 & \text{se } 9 < t \leq 24 \end{cases}$$

onde N indica o número de vehículos e t representa o tempo transcorrido (en horas) dende as 0:00 horas.

a) Cantos vehículos pasaron pola peaxe ás 0:00 horas? A que horas do día pasaron 3 vehículos?

$$N(0) = \left(\frac{0-3}{3}\right)^2 + 2 = 1 + 2 = 3 \quad \text{pasaron 3 vehículos ás 0:00 horas pola peaxe.}$$

$$N^{-1}(t) = 3$$

$$1^\circ \text{ anaco: } \left(\frac{t-3}{3}\right)^2 + 2 = 3 \rightarrow \left(\frac{t-3}{3}\right)^2 = 1 \rightarrow \frac{t-3}{3} = \pm 1 \rightarrow t_1 = 3+3 = 6, \quad t_2 = -3+3 = 0$$

$$2^\circ \text{ anaco: } 10 - \left(\frac{t-15}{3}\right)^2 = 3 \rightarrow \left(\frac{t-15}{3}\right)^2 = 7 \rightarrow \frac{t-15}{3} = \pm\sqrt{7} \rightarrow t_3 = 3\sqrt{7} + 15 \approx 22,94$$

$$t_4 = -3\sqrt{7} + 15 \approx 7,06$$

(t_4 fora do anaco)

Ás 0:00 horas, 6:00 horas e algo antes das 23:00 pasaron 3 vehículos.

Representamos a gráfica para contestar correctamente aos apartados b) e c):

$$N(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{9} - \frac{2t}{3} + 3 & \text{se } 0 \leq t \leq 9 \\ -\frac{t^2}{9} + \frac{10t}{3} - 15 & \text{se } 9 < t \leq 24 \end{cases}$$

$$1^\circ \text{ anaco: } N(t) = \left(\frac{t-3}{3}\right)^2 + 2 = \frac{t^2}{9} - \frac{2t}{3} + 3$$

$$a = 1/9 \rightarrow \text{Convexa } \cup$$

$$\text{Vértice: } t = 2/3 / 2(1/9) = 18/6 = 3 \quad y = \left(\frac{3-3}{3}\right)^2 + 2 = 2$$

$$\text{Puntos de corte cos eixos: Eixo Y: } t = 0 \quad y = 3$$

$$\text{Eixo X: } y = 0 \quad t = \frac{2/3 \pm \sqrt{4/9 - 4 \cdot (1/9) \cdot 3}}{2 \cdot (1/9)} = \frac{2/3 \pm \sqrt{-8/9}}{-2/9} \quad \text{non hai puntos de corte co eixo X}$$

$$\text{Calculamos os valores extremos: } N(0) = 3 \quad \text{e} \quad N(9) = \left(\frac{9-3}{3}\right)^2 + 2 = 6$$

$$2^\circ \text{ anaco: } N(t) = 10 - \left(\frac{t-15}{3}\right)^2 = -\frac{t^2}{9} + \frac{10t}{3} - 15$$

$$a = -1/9 \rightarrow \text{Cóncava } \cap$$

$$\text{Vértice: } t = -10/3 / 2(-1/9) = 90/6 = 15 \quad y = 10 - \left(\frac{15-15}{3}\right)^2 = 10$$

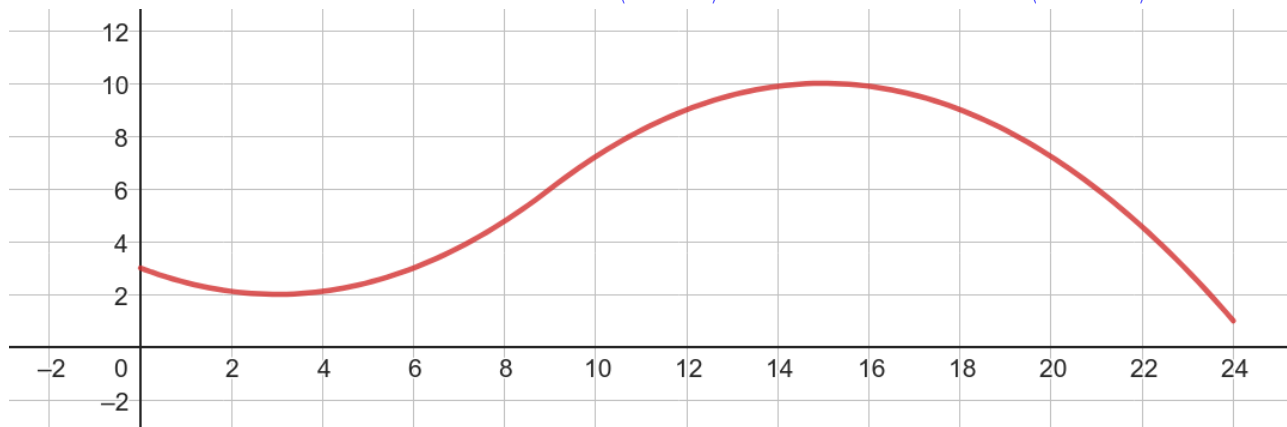
$$\text{Puntos de corte cos eixos: Eixo Y: } t = 0 \quad (\text{non está no dominio deste anaco})$$

Eixo X: $y = 0$

$$t = \frac{-10/3 \pm \sqrt{100/9 - 4 \cdot (-1/9) \cdot (-15)}}{2 \cdot (-1/9)} = \frac{-10/3 \pm \sqrt{40/9}}{-2/9} = \frac{-10/3 \pm 2\sqrt{10}/3}{-2/9} = 15 \pm 3\sqrt{10}$$

estes valores non están entre 9 e 24

Calculamos os valores extremos: $N(9) = 10 - \left(\frac{9-15}{3}\right)^2 = 6$ e $N(24) = 10 - \left(\frac{24-15}{3}\right)^2 = 1$



b) Entre que horas aumentou o número de vehículos que pasaban pola peaxe? Entre que horas diminuíu?

Crecemento: (3, 15) Entre as 3:00 e as 15:00 aumentou o número de vehículos.

Decrecemento: (0, 3) U (15, 24) Nos intervalos horarios de 0:00 e as 3:00 e de 15:00 a 24:00 diminuíu o número de vehículos que pasaron pola peaxe.

c) A que hora pasou o maior número de vehículos? Cantos foron?

Ás 15:00 pasaron o maior número de vehículos, dez vehículos.

Nota: Para contestar correctamente estas preguntas debes representar a gráfica da función.

7. A función $f(t)$, $0 \leq t \leq 10$, na que o tempo t está expresado en anos, representa os beneficios dunha empresa (en centos de miles de euros) entre os anos 2010 ($t=0$) e 2020 ($t=10$).

$$f(t) = \begin{cases} t+1 & \text{se } 0 \leq t < 2 \\ t^2 - 8t + 15 & \text{se } 2 \leq t < 6 \\ \frac{3}{4}(-t+10) & \text{se } 6 \leq t \leq 10 \end{cases}$$

a) Representar graficamente $f(t)$ estudando: puntos de corte, intervalos de crecemento e decrecemento, máximos e mínimos.

1º anaco: $N(t) = t+1$ recta de pendente $m = 1 \rightarrow$ crecente

Puntos de corte cos eixos: Eixo Y: $t = 0 \quad y = 1$

Eixo X: $y = 0 \quad N(t) = t + 1 = 0 \quad t = -1$ (fora do dominio de definición)

Calculamos os valores extremos: $N(0) = 1$ e $N(2) = 2 + 1 = 3$

2º anaco: $N(t) = t^2 - 8t + 15$ parábola

$a = 1 \rightarrow$ Convexa U

Vértice: $t = 8/2 = 4 \quad y = 4^2 - 8 \cdot 4 + 15 = -1$

Puntos de corte cos eixos: Eixo Y: $t = 0$ (non está no dominio deste anaco)

Eixo X: $y = 0 \quad t = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2} \quad t_1 = 5 \quad t_2 = 3$

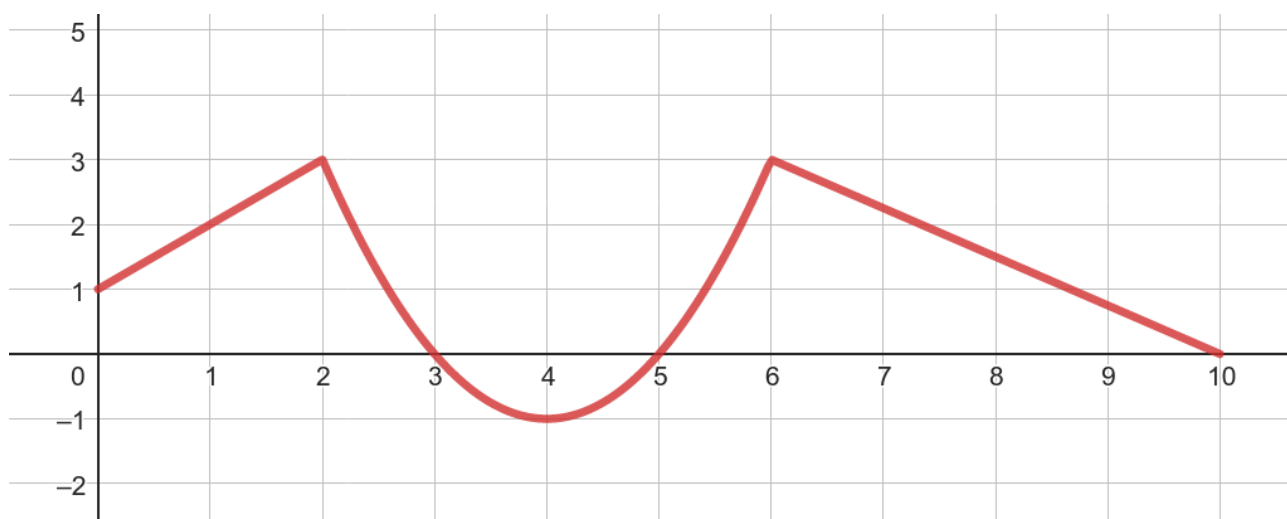
Calculamos os valores extremos: $N(2) = 2^2 - 8 \cdot 2 + 15 = 3$ e $N(6) = 6^2 - 8 \cdot 6 + 15 = 3$

3º anaco: $N(t) = \frac{-3t}{4} + \frac{15}{2}$ recta de pendente $m = -3/4 \rightarrow$ decrecente

Puntos de corte cos eixos: Eixo Y: $t = 0 \quad y = 15/2$ (non está no dominio deste anaco)

Eixo X: $y = 0 \quad N(t) = \frac{-3t}{4} + \frac{15}{2} = 0 \rightarrow t = 10$

Calculamos os valores extremos: $N(6) = -18/4 + 15/2 = 3$ e $N(10) = -30/4 + 15/2 = 0$



Puntos de corte: Eixo Y: $(0, 1)$ Eixo X: $(3, 0)$, $(5, 0)$ e $(10, 0)$

Intervalos de crecemento: $(0, 2) \cup (4, 6)$

Intervalos de decrecemento: $(2, 4) \cup (6, 10)$

Máximos: $(2, 3)$ e $(6, 3)$ globais Mínimos: $(0, 1)$ e $(10, 0)$ locais $(4, -1)$ global

b) En que anos acadou a empresa o máximo beneficio? Cal foi dito beneficio?

Nos anos 2012 e 2016 a empresa acadou o máximo beneficio. Este beneficio foi de 300.000€.

c) En que anos a empresa non tivo nin beneficio nin perdas?

Nos anos 2013, 2015 e 2020 a empresa non tivo nin beneficio nin perdas.

d) Durante canto tempo houbo beneficios? E perdas?

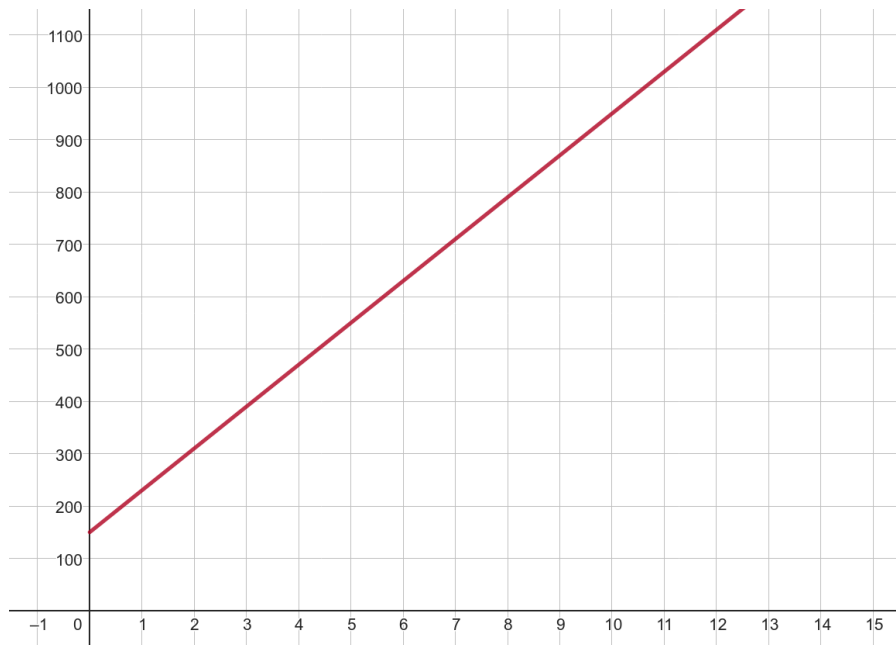
Nos períodos 2010- 2013 e 2015- 2020 a empresa tivo beneficios.

No período 2013- 2015 a empresa tivo perdas.

8. Temos planeado unha viaxe turística a Sicilia dunha semana, iremos a Palermo e alugaremos un coche para visitar os monumentos máis importantes que hai na illa. A empresa de alugueiro de coches ofrece un coche de gama media por 80€ ao día e 150€ de seguro.

a) Representa a gráfica da función que relaciona o número de días de alugueiro do coche e o custo.

$C(t) = 150 + 80t$, sendo t o número de días



b) Se finalmente decidimos alugalo por 4 días, canto pagaremos?

$$C(t) = 150 + 80 \cdot 4 = 470€$$

c) Se pagamos 550€, cantos días alugamos o coche?

$$C(t) = 150 + 80t = 550 \rightarrow 80t = 400 \rightarrow t = 5 \text{ días}$$