BIBLIOTECA DEL PROFESORADO

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I

SOLUCIONARIO

BACHILLERATO 1

Este material es una obra colectiva concebida, diseñada y creada en el Departamento de Ediciones de Santillana, bajo la dirección de **Teresa Grence**.

En su elaboración han participado::
Sonia Alejo Sánchez
María Arribas Fernández
José María Fernández Díaz
Coral Victoria de la Iglesia Meleiro
Clara Inés Lavado Campos
Silvia Marín García
Natalia Polo Rodríguez
Lorena Ramos San Millán
Rocío Rubio Álvarez
María de las Mercedes Sánchez Martín

EDICIÓN
Sonia Alejo Sánchez
Clara Inés Lavado Campos
Silvia Marín García
Aída Moya Librero

EDICIÓN EJECUTIVA
Carlos Pérez Saavedra

DIRECCIÓN DEL PROYECTO
Domingo Sánchez Figueroa

PROYECTO construyendo mundos

Santillana

DESAFÍO

Pesando tornillos

Trata de averiguar el número de veces que se utiliza la báscula para saber qué cajas contienen los tornillos de cada tipo y explica el método que seguirías.

Evidentemente se busca el mínimo número de veces que se necesita utilizar la báscula para determinar el peso de los tornillos de cada caja.

El número mínimo de pesadas son 2.

Colocamos en la báscula 0 tornillos de la 1.ª caja, 1 de la 2.ª, 2 de la 3.ª, 4 de la 4.ª, 5 de la 5.ª y 7 de la 6.ª. En total, 19 tornillos. Como los tornillos pesan entre 9 y 10 gramos, en total pesan entre 171 y 190 gramos.

Es imposible que la báscula marque 190 g o 189 g o 188 g, porque siempre hay al menos 3 tornillos de 9 g.

Si la báscula marca 187 g, significa que las cajas 1.ª, 2.ª y 3.ª contienen tornillos de 9 g, ya que hay 3 tornillos de 9 g y solo se resta 3 g de 190, por 0, 1 y 2 tornillos, respectivamente.

Veamos el resto de combinaciones.

186 g: No es posible.

185 g: 0, 1, 4. Las cajas 1.ª, 2.ª y 4.ª contienen tornillos de 9 g.

184 g: 0, 1, 5. Las cajas 1.ª, 2.ª y 5.ª contienen tornillos de 9 g.
O bien: 0, 2, 4. Las cajas 1.ª, 3.ª y 4.ª contienen tornillos de 9 g.

183 g: 0, 2, 5. Las cajas 1.ª, 3.ª y 5.ª contienen tornillos de 9 g.
O bien: 1, 2, 4. Las cajas 2.ª, 3.ª y 4.ª contienen tornillos de 9 g.

182 g: 0, 1, 7. Las cajas 1.ª, 2.ª y 6.ª contienen tornillos de 9 g.
O bien: 1, 2, 5. Las cajas 2.ª, 3.ª y 5.ª contienen tornillos de 9 g.

181 g: 0, 2, 7. Las cajas 1.ª, 3.ª y 6.ª contienen tornillos de 9 g.
O bien: 0, 4, 5. Las cajas 1.ª, 4.ª y 5.ª contienen tornillos de 9 g.

180 g: 1, 2, 7. Las cajas 2.ª, 3.ª y 6.ª contienen tornillos de 9 g.
O bien: 1, 4, 5. Las cajas 2.ª, 4.ª y 5.ª contienen tornillos de 9 g.

179 g: 0, 4, 7. Las cajas 1.ª, 4.ª y 6.ª contienen tornillos de 9 g.
O bien: 2, 4, 5. Las cajas 3.ª, 4.ª y 5.ª contienen tornillos de 9 g.

178 g: 0, 5, 7. Las cajas 1.ª, 5.ª y 6.ª contienen tornillos de 9 g.
O bien: 1, 4, 7. Las cajas 2.ª, 4.ª y 6.ª contienen tornillos de 9 g.

177 g: 1, 5, 7. Las cajas 2.ª, 5.ª y 6.ª contienen tornillos de 9 g.
O bien: 2, 4, 7. Las cajas 3.ª, 4.ª y 6.ª contienen tornillos de 9 g.

176 g: 2, 5, 7. Las cajas 3.ª, 5.ª y 6.ª contienen tornillos de 9 g.

175 g: No es posible.

174 g: 4, 5, 7. Las cajas 4.ª, 5.ª y 6.ª contienen tornillos de 9 g.

Si la báscula marca 187 g, 185 g, 176 g o 174 g, hay una sola posibilidad, y sabríamos qué cajas contienen tornillos de 9 g y cuáles de 10 g sin duda.

En los casos con dos posibilidades, necesitamos otra pesada para discernir cuál es la correcta. Sería suficiente pesar un tornillo de una caja que no tengan en común las dos posibilidades, y ver si es de 9 g o 10 g.

PIENSA

PÁG. 88. ¿Cuántas soluciones tiene una ecuación lineal de dos o más incógnitas?

Una ecuación lineal de dos o más incógnitas tiene infinitas soluciones.

PÁG. 89. Una botella con su tapón pesa 1 kg y 10 g. La botella pesa 1 kg más que el tapón. ¿Cuánto pesa la botella?

Sea x el peso de la botella e y el del tapón.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 1{,}01 \\ x = y + 1 \end{array}\right\} \rightarrow x = 1{,}005 \qquad y = 0{,}005$$

La botella pesa 1,005 kg, y el tapón, 5 g.

PÁG. 91. Si m y n son números enteros y $m - n = 3$, ¿puede ser $m + n = 0$? ¿Y $m + n = 3$?

$$\left.\begin{array}{r} m - n = 3 \\ m + n = 0 \end{array}\right\} \rightarrow 2m = 3 \rightarrow m = \frac{3}{2}$$

No es un número entero, por tanto, no es posible.

$$\left.\begin{array}{r} m - n = 3 \\ m + n = 3 \end{array}\right\} \rightarrow 2m = 6 \rightarrow m = 3 \text{ y } n = 0$$

Son números enteros, por tanto, es posible.

PÁG. 92. $\left.\begin{array}{r} x + 2y - z = 2 \\ 2x + y - 2z = 1 \end{array}\right\}$

¿Es un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas? ¿Cuántas soluciones tiene?

Sí, es un sistema lineal de dos ecuaciones con tres incógnitas. Tiene infinitas soluciones porque estas tendrán que expresarse en función de al menos, una de las incógnitas.

PÁG. 93. ¿Se puede utilizar el método de Gauss para resolver un sistema de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas?

Sí, siempre que sean lineales.

PÁG. 95.1. ¿Puede ser compatible determinado un sistema cuyos términos independientes sean todos cero?

Sí, se trata de un sistema homogéneo y la solución será la trivial, (0, 0, 0).

PÁG. 95.2. ¿De qué tipo es un sistema que se corresponde con esta matriz?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La segunda ecuación indica que $d_2 = 0$, luego si esto se cumple, el sistema será compatible indeterminado, pero si $d_2 \neq 0$, será incompatible.

ACTIVIDADES

1 Determina las incógnitas, los coeficientes, el término independiente y una solución de estas ecuaciones.

a) $3x - 2y = -3$

b) $5y + 2x + z = 8$

c) $8 - 4x + 2y = z$

d) $2t + 4x - 7 = y + 4z$

	Ecuación reordenada	Incógnitas	Coeficientes
a)	$3x - 2y = -3$	x, y	$3, -2$
b)	$2x + 5y + z = 8$	x, y, z	$2, 5, 1$
c)	$-4x + 2y - z = -8$	x, y, z	$-4, 2, -1$
d)	$4x - y - 4z + 2t = 7$	x, y, z, t	$4, -1, -4, 2$

	Término independiente	Solución cualquiera
a)	-3	$(-1, 0)$
b)	8	$(0, 0, 8)$
c)	-8	$(1, 1, 6)$
d)	7	$(0, 1, 0, 4)$

2 Señala cuáles de estos pares de valores son solución del sistema $\left.\begin{array}{r} x - y = 1 \\ x - 2y = -3 \end{array}\right\}$.

a) $x = 1, y = 0$

b) $x = -1, y = 1$

c) $x = 5, y = 4$

c) $x = 5, y = 4$

3 Resuelve utilizando los métodos de sustitución e igualación.

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - 5y = 2 \\ -2x + 3y = 5 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x - 5y = 4 \\ -6x + 3y = 3 \end{array}\right\}$

a) Sustitución:

$$\left.\begin{array}{r} x = \dfrac{2 + 5y}{3} \\ -2x + 3y = 5 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow -2\left(\frac{2 + 5y}{3}\right) + 3y = 5 \rightarrow$$

$$\rightarrow y = -19 \rightarrow x = -31$$

Igualación:

$$\left.\begin{array}{r} x = \dfrac{2 + 5y}{3} \\ x = \dfrac{3y - 5}{2} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{2+5y}{3} = \frac{3y-5}{2} \rightarrow$$
$$\rightarrow 4 + 10y = 9y - 15 \rightarrow$$
$$\rightarrow y = -19 \rightarrow x = -31$$

b) Sustitución:

$$\left.\begin{aligned} x &= 4 + 5y \\ -6x + 3y &= 3 \end{aligned}\right\} \rightarrow$$
$$\rightarrow -6(4 + 5y) + 3y = 3 \rightarrow$$
$$\rightarrow y = -1 \qquad x = -1$$

Igualación:

$$\left.\begin{aligned} x &= 4 + 5y \\ x &= \frac{3-3y}{-6} \end{aligned}\right\} \rightarrow$$
$$\rightarrow 4 + 5y = \frac{3-3y}{-6} \rightarrow$$
$$\rightarrow y = -1 \rightarrow x = -1$$

4 Halla la solución del sistema de ecuaciones con el método que consideres más adecuado.

$$\left.\begin{aligned} 3(2x + y - 1) - 6(4x - y) &= 15 \\ -x + y + 3(x - 2y + 6) &= 4 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 6x + 3y - 3 &= 4 \\ -6x + 3y &= 3 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} -2x + y &= 2 \\ 2x - 5y &= -14 \end{aligned}\right\} \rightarrow$$
$$\rightarrow y = 2x + 2 \rightarrow 2x - 5(2x + 2) = -14 \rightarrow$$
$$\rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow y = 3$$

5 Resuelve por el método de reducción.

a) $\left.\begin{aligned} 3x - 2y &= 4 \\ 2x - 3y &= 2 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x - 3y &= 1 \\ 4x + 5y &= -2 \end{aligned}\right\}$

a) $\left.\begin{aligned} 3x - 2y &= 4 \\ 2x - 3y &= 2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\xrightarrow{\cdot(-2)} \\ &\xrightarrow{\cdot 3} \end{aligned} \left.\begin{aligned} -6x + 4y &= -8 \\ 6x - 9y &= 6 \end{aligned}\right\} \rightarrow$

$$\rightarrow -5y = -2 \rightarrow y = \frac{2}{5} \rightarrow$$
$$\rightarrow x = \frac{4 + 2\cdot\frac{2}{5}}{3} = \frac{8}{5}$$

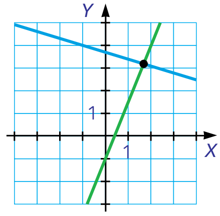
b) $\left.\begin{aligned} x - 3y &= 1 \\ 4x + 5y &= -2 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\cdot(-4)}$

$$\left.\begin{aligned} -4x + 12y &= -4 \\ 4x + 5y &= -2 \end{aligned}\right\} \rightarrow 17y = -6 \rightarrow$$
$$\rightarrow y = -\frac{6}{17} \rightarrow$$
$$\rightarrow x = 1 + 3\cdot\left(-\frac{6}{17}\right) = -\frac{1}{17}$$

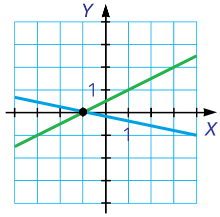
6 Resuelve gráficamente los sistemas.

a) $\left.\begin{aligned} 5x - 2y &= 2 \\ x + 3y &= 11 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} -x - 5y &= 1 \\ x - 2y &= -1 \end{aligned}\right\}$

a)



b)



7 Clasifica estos sistemas de ecuaciones y resuélvelos por el método más adecuado.

a) $\left.\begin{aligned} 8x - 2y &= 4 \\ -12x + 3y &= -6 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ 3x - y &= 11 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} 4x + 6y &= 2 \\ 3y + 2x &= 1 \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} 2x - y &= -4 \\ -x + 2y &= 7 \end{aligned}\right\}$

a) $\frac{8}{-12} = \frac{-2}{3} = \frac{4}{-6} \rightarrow$
→ Sistema compatible indeterminado

b) $\frac{1}{3} \neq \frac{2}{-1} \rightarrow$
→ Sistema compatible determinado

c) $\frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1} \rightarrow$
→ Sistema compatible indeterminado

d) $\frac{2}{-1} \neq \frac{-1}{2} \rightarrow$
→ Sistema compatible determinado

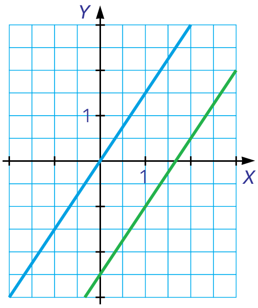
8 Decide de qué tipo son estos sistemas de ecuaciones y representa gráficamente su solución.

a) $\left.\begin{array}{r}3x - 2y = 5\\ -6x + 4y = 0\end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r}-x + y = 3\\ 2x - y = -1\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}4x - 6y = 2\\ -6x + 9y = -3\end{array}\right\}$ d) $\left.\begin{array}{r}10x + y = -3\\ -4x + 2y = -6\end{array}\right\}$

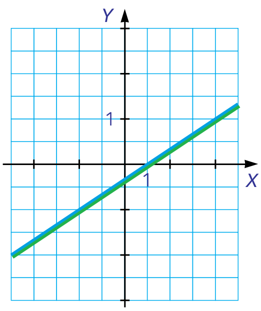
a) $\dfrac{3}{-6} = \dfrac{-2}{4} \neq \dfrac{5}{0} \rightarrow$

$\rightarrow$ Sistema incompatible



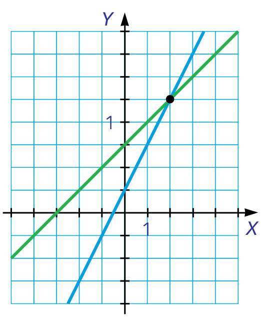
b) $\dfrac{4}{-6} = \dfrac{-6}{9} \neq \dfrac{2}{-3} \rightarrow$

$\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado



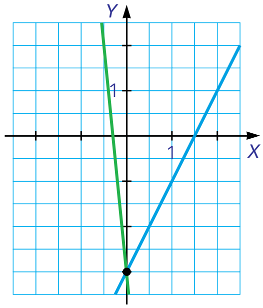
c) $\dfrac{-1}{2} \neq \dfrac{1}{-1} \rightarrow$

$\rightarrow$ Sistema compatible determinado



d) $\dfrac{10}{-4} \neq \dfrac{1}{2} \rightarrow$

$\rightarrow$ Sistema compatible determinado



9 Halla la solución de estos sistemas.

a) $\left.\begin{array}{r}x + y - z = 0\\ x - y + z = 2\\ -x + y + z = 4\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}x - 2y + 5z = 4\\ -2x + 3y - z = 1\\ 3x + y + 2z = -1\end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r}x + y - z = 0\\ x - y + z = 2\\ -x + y + z = 4\end{array}\right\} \xrightarrow{x = z = y}$

$\rightarrow \left.\begin{array}{r}z - y - y + z = 2\\ -z + y + y + z = 4\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}z - y = 1\\ 2y = 4\end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow y = 2 \xrightarrow{z = 1 + y} z = 3 \xrightarrow{x = z - y}$

$\rightarrow x = 1$

La solución es (1, 2, 3).

b) $\left.\begin{array}{r}x - 2y + 5z = 4\\ -2x + 3y - z = 1\\ 3x + y + 2z = -1\end{array}\right\} \xrightarrow{x = 4 - 5z + 2y}$

$\rightarrow \left.\begin{array}{r}-2(4 - 5z + 2y) + 3y - z = 1\\ 3(4 - 5z + 2y) + y + 2z = -1\end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{array}{r}-y + 9z = 9\\ 7y - 13z = -13\end{array}\right\} \xrightarrow{y = 9z - 9}$

$\rightarrow 7(9z - 9) - 13z = -13 \rightarrow$

$\rightarrow 50z = 50 \rightarrow z = 1 \xrightarrow{y = 9z - 9}$

$\rightarrow y = 0 \xrightarrow{x = 4 - 5z + 2y} x = -1$

10 Resuelve los siguientes sistemas.

a) $\left.\begin{array}{r}x + z = 1\\ 2x - y - 2z = 4\\ x + 3y + z = 3\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r}x + y = 1\\ x + z = 1\\ y + z = 1\end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + z = 1 \\ 2x - y - 2z = 4 \\ x + 3y + z = 3 \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 1 - z}$

$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 2(1 - z) - y - 2z = 4 \\ 1 - z + 3y + z = 3 \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{array}{r} -y - 4z = 2 \\ 3y = 2 \end{array}\right\} \rightarrow y = \frac{2}{3} \rightarrow$

$\rightarrow -\frac{2}{3} - 4z = 2 \rightarrow z = -\frac{2}{3} \xrightarrow{x = 1 - z}$

$\rightarrow x = \frac{5}{3}$

La solución es $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

b) $\left.\begin{array}{r} x + y = 1 \\ x + z = 1 \\ y + z = 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 1 - z}$

$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 1 - y + z = 1 \\ y + z = 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{y = z} 2z = 1 \rightarrow$

$\rightarrow z = \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{1}{2}$

La solución es $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

11 Resuelve estos sistemas.

a) $\left.\begin{array}{r} x - y = 3 \\ 3x + 2y = 19 \\ 2x + 3y = 16 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y + 2z = 0 \\ 2x + 5y - 6z = 0 \\ 3x + 4y + z = 0 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} x - y = 3 \\ 3x + 2y = 19 \\ 2x + 3y = 16 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{E_2 = -3E_1 + E_2} \\ \xrightarrow{E_3 = -2E_1 + E_3} \end{array}$

$\begin{array}{l} \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \left.\begin{array}{r} x - y = 3 \\ 5y = 10 \\ 5y = 10 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x - y = 3 \\ 5y = 10 \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow y = 2 \rightarrow x = 5$

La solución es (5, 2).

b) $\left.\begin{array}{r} x + y + 2z = 0 \\ 2x + 5y - 6z = 0 \\ 3x + 4y + z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{E_2 = -2E_1 + E_2} \\ \xrightarrow{E_3 = -3E_1 + E_3} \end{array}$

$\begin{array}{l} \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \left.\begin{array}{r} x + y + 2z = 0 \\ 3y - 10z = 0 \\ y - 5z = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{E_3 = E_2 - 3E_3}$

$\begin{array}{l} \\ \\ \rightarrow \end{array} \left.\begin{array}{r} x + y + 2z = 0 \\ 3y - 10z = 0 \\ 5z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow z = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow x = 0$

La solución es (0, 0, 0).

12 Resuelve los siguientes sistemas.

a) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ 3x - y = 1 \\ 5x + 7y - 3z = 3 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} x - y - 4z = -1 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ 3x - y = 1 \\ 5x + 7y - 3z = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{E_2 = -3E_1 + E_2} \\ \xrightarrow{E_3 = -5E_1 + E_3} \end{array}$

$\begin{array}{l} \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ -4y - 3z = -5 \\ 2y - 8z = -7 \end{array}\right\} \xrightarrow{E_3 = 2E_3 + E_2}$

$\begin{array}{l} \\ \rightarrow \\ \\ \end{array} \left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ -4y - 3z = -5 \\ -19z = -19 \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow z = 1 \rightarrow y = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{1}{2}$

b) $\left.\begin{array}{l} x - y - 4z = -1 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{E_2 = -2E_1 + E_2} \\ \xrightarrow{E_3 = -E_1 + E_3} \end{array}$

$\begin{array}{l} \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \left.\begin{array}{r} x - y - 4z = -1 \\ 3y + 5z = 2 \\ 3y + 7z = 2 \end{array}\right\} \xrightarrow{E_3 = -E_2 + E_3}$

$\begin{array}{l} \\ \\ \rightarrow \end{array} \left.\begin{array}{r} x - y - 4z = -1 \\ 3y + 5z = 2 \\ 2z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow z = 0 \rightarrow y = \frac{2}{3} \rightarrow x = -\frac{1}{3}$

13 Expresa de forma matricial y resuelve.

a) $\left.\begin{array}{r} 3x + 4y + 5z = 2 \\ x - y + 2z = -6 \\ -2x - y + z = 8 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x - 3y + 2z = 1 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x - y = 7 \end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -6 \\ -2 & -1 & 1 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{E_1 \leftrightarrow E_2}$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \xrightarrow{E_2 = -3E_1 + E_2} \\ \xrightarrow{E_3 = 2E_1 + E_3} \end{array}$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 7 & -1 & 20 \\ 0 & -3 & 5 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3 = 3E_2 + 7E_3}$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 7 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & 32 & 32 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x - y + 2z = -6 \\ 7y - z = 20 \\ 32z = 32 \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow z = 1 \rightarrow y = 3 \rightarrow x = -5$

La solución es $(-5, 3, 1)$.

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \xrightarrow{E_2 = -2E_1 + E_2} \\ \xrightarrow{E_3 = -3E_1 + E_3} \end{array}$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & 8 & -6 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3 = E_3/2}$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3 = -4E_2 + 7E_3}$

$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x - 3y + 2z = 1 \\ 7y - 5z = 1 \\ -z = 10 \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow z = -10 \rightarrow y = -7 \rightarrow x = 0$

La solución es $(0, -7, -10)$.

14 Expresa de forma matricial y resuelve.

a) $\left.\begin{array}{l} x - y = 3 \\ x - z = 2 \\ y - z = -1 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 3x - y + z = 1 \\ x + 3y - z = 2 \\ 4x + 2y = 1 \end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_2 = -E_1 + E_2}$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$

Como una fila se repite, el sistema es compatible indeterminado. Tiene infinitas soluciones, que se dan en función de un parámetro.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{array}{l} x - y = 3 \\ y - z = -1 \end{array}\right\} \xrightarrow{z = \lambda}$

$\rightarrow y = -1 + \lambda \rightarrow$

$\rightarrow x - (-1 + \lambda) = 3 \rightarrow x = 2 + \lambda$

Las soluciones vienen determinadas por la terna $(2 + \lambda, -1 + \lambda, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}$.

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_1 \leftrightarrow E_2}$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \xrightarrow{E_2 = -3E_1 + E_2} \\ \xrightarrow{E_3 = -4E_1 + E_3} \end{array}$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -10 & 4 & -5 \\ 0 & -10 & 4 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3 = -E_2 + E_3}$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -10 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema incompatible. No existe solución.

15 Determina el número de soluciones de estos sistemas.

a) $\left.\begin{array}{r} x + 4y - z = 2 \\ 3x - y + z = 1 \\ -2x + y - z = 0 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + 5z = 1 \\ 2x + y - z = 3 \\ 2y - 3z = 1 \end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \xrightarrow{E_2 = -3E_1 + E_2} \\ \xrightarrow{E_3 = 2E_1 + E_3} \end{array}$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -13 & 4 & -5 \\ 0 & 9 & -3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3 = 9E_2 + 13E_3}$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -13 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \end{array}\right)$

Sistema compatible determinado. Existe una única solución.

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & 1\\ 2 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 2 & -3 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{E_2 = -E_1 + E_2}$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & 1\\ 0 & 4 & -6 & 2\\ 0 & 2 & -3 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{E_3 = -E_2 + 2E_3}$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & 1\\ 0 & 4 & -6 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado.
Existen infinitas soluciones.

16 Discute estos sistemas y resuélvelos.

a) $\left.\begin{array}{r} y - 3z = 3\\ 3y - 2z = 2\\ x + 5y - 5z = 4\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x - 3y + 4z = 1\\ 2x - 2y - z = 2\\ x + y - 5z = -2\end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -3 & 3\\ 0 & 3 & -2 & 2\\ 1 & 5 & -5 & 4\end{array}\right) \xrightarrow{E_1 \leftrightarrow E_3}$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -5 & 4\\ 0 & 3 & -2 & 2\\ 0 & 1 & -3 & 3\end{array}\right) \xrightarrow{E_3 = E_2 - 3E_3}$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -5 & 4\\ 0 & 3 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 7 & -7\end{array}\right)$

$\left.\begin{array}{r} x + 5y - 5z = 4\\ 3y - 2z = 2\\ 7z = -7\end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow z = -1 \rightarrow y = 0 \rightarrow x = -1$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 1\\ 2 & -2 & -1 & 2\\ 1 & 1 & -5 & -2\end{array}\right) \begin{array}{l} \xrightarrow{E_2 = -2E_1 + 3E_2}\\ \xrightarrow{E_3 = -E_1 + E_3}\end{array}$

$\begin{array}{l}\rightarrow\\ \rightarrow\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 1\\ 0 & 4 & -9 & 0\\ 0 & 4 & -9 & -3\end{array}\right) \xrightarrow{E_3 = -E_2 + E_3}$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 1\\ 0 & 4 & -9 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{array}\right)$

Sistema incompatible. No tiene solución.

17 Resuelve estos sistemas de ecuaciones.

a) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x+1}{2} = y - 3\\ 2x^2 = y^2 - 7\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 6x + 6y = 5\\ x^2 - y^2 = \dfrac{5}{36}\end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} x = 2y - 7\\ 2x^2 = y^2 - 7\end{array}\right\} \rightarrow 2(2y - 7)^2 = y^2 - 7 \rightarrow$

$\rightarrow 8y^2 + 98 - 56y = y^2 - 7 \rightarrow$

$\rightarrow 7y^2 - 56y + 105 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow y^2 - 8y + 15 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} y_1 = 5 \rightarrow x_1 = 3\\ y_2 = 3 \rightarrow x_2 = -1\end{array}\right.$

Las dos soluciones son (3, 5) y (−1, 3).

b) $\left.\begin{array}{r} x = \dfrac{5 - 6y}{6}\\ 36x^2 - 36y^2 = 5\end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow 36\left(\dfrac{5-6y}{6}\right)^2 - 36y^2 = 5 \rightarrow$

$\rightarrow 25 + 36y^2 - 60y - 36y^2 = 5 \rightarrow$

$\rightarrow 60y = 20 \rightarrow y = \dfrac{1}{3} \rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

La solución es $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}\right)$.

18 Se sabe que la altura sobre el lado desigual de determinado triángulo isósceles mide 15 cm, y que su perímetro es de 50 cm.

Calcula la longitud de sus lados.

Sea x la mitad del lado desigual e y la longitud de los lados iguales.

$\left.\begin{array}{r} 2x + 2y = 50\\ x^2 + 15^2 = y^2\end{array}\right\} \rightarrow y = 25 - x \rightarrow$

$\rightarrow x^2 + 225 = (25 - x)^2 \rightarrow x = 8 \rightarrow y = 17$

Es un triángulo cuyos lados iguales miden 17 cm y cuyo lado desigual mide 16 cm.

19 Calcula las soluciones de estos sistemas de inecuaciones.

a) $\left.\begin{array}{r} x + 3 > 5\\ 2x - 1 > 11\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 15 + 7x \geq 8\\ 3x < 14x + 6\end{array}\right\}$

a) $x > 2 \rightarrow (2, +\infty)$

$x > 5 \rightarrow (5, +\infty)$

Solución: $(5, +\infty)$

b) $x \geq -1 \rightarrow [-1, +\infty)$

$x > -\frac{6}{11} \rightarrow \left(-\frac{6}{11}, +\infty\right)$

Solución: $\left(-\frac{6}{11}, +\infty\right)$

20 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones con una incógnita.

a) $\left.\begin{aligned} x^2 - 3x &< 6 \\ 6x^2 + 4x &\geq 2 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} 2x + x^2 &< 3x^2 - 4 \\ 4x^2 + x &\geq 2x + 6 \end{aligned}\right\}$

a) $x^2 - 3x - 6 = 0 \rightarrow x_1 = 4 \qquad x_2 = -1$

$6x^2 + 4x - 2 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{1}{3} \qquad x_2 = -1$

Solución: $\left[\frac{1}{3}, 4\right)$

b) $x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x_1 = 2 \qquad x_2 = -1$

$4x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{3}{4} \qquad x_2 = -\frac{1}{2}$

Solución: $\left(-1, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{4}, 2\right)$

PRACTICA

21 Determina el número de soluciones.

a) $\left.\begin{aligned} 3x - 6y &= 9 \\ -x + 2y &= 3 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x - y &= 2 \\ x + y &= 5 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} 3x - 6y &= 9 \\ -x + 2y &= -3 \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} x - y &= 2 \\ -x + y &= 5 \end{aligned}\right\}$

a) $\left.\begin{aligned} 3x - 6y &= 9 \\ -x + 2y &= 3 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\cdot 3}$

$\rightarrow \left.\begin{aligned} 3x - 6y &= 9 \\ -3x + 6y &= 9 \end{aligned}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow 0 \neq 18 \rightarrow$ Sistema incompatible. No existe solución.

b) $\left.\begin{aligned} x - y &= 2 \\ x + y &= 5 \end{aligned}\right\} \rightarrow 2x = 7 \rightarrow$ Sistema compatible determinado. Una única solución.

c) $\left.\begin{aligned} 3x - 6y &= 9 \\ -x + 2y &= -3 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\cdot 3}$

$\rightarrow \left.\begin{aligned} 3x - 6y &= 9 \\ -3x + 6y &= -9 \end{aligned}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow 0 = 0 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado. Infinitas soluciones.

d) $\left.\begin{aligned} x - y &= 2 \\ -x + y &= 5 \end{aligned}\right\} \rightarrow 0 \neq 7 \rightarrow$ Sistema incompatible. No tiene solución.

22 Resuelve en función del parámetro *a*.

a) $\left.\begin{aligned} 2x + y &= 7 \\ ax + 2y &= 12 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} 3x + 5y &= 20 \\ 7x + ay &= 39 \end{aligned}\right\}$

a) $\left.\begin{aligned} 2x + y &= 7 \\ ax + 2y &= 12 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\cdot(-2)}$

$\rightarrow \left.\begin{aligned} -4x - 2y &= -14 \\ ax + 2y &= 12 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{Reducción}}$

$\rightarrow (a - 4)x = -2 \rightarrow$

$\rightarrow x = \frac{2}{4 - a}$

- Si $a = 4 \rightarrow$ Sistema incompatible. No existe solución.
- Si $a \neq 4 \rightarrow$ Sistema compatible determinado. Existe una única solución.

b) $\begin{aligned} 3x + 5y &= 20 \\ 7x + ay &= 39 \end{aligned} \begin{aligned} &\xrightarrow{(-7)} \\ &\xrightarrow{\cdot 3} \end{aligned}$

$\begin{aligned} &\rightarrow -21x - 35y = -140 \\ &\rightarrow \quad 21x + 3ay = 117 \end{aligned} \Bigg\} \xrightarrow{\text{Reducción}}$

$\rightarrow (3a - 35)y = -23 \rightarrow$

$\rightarrow y = \frac{23}{35 - 3a}$

- Si $a = \frac{35}{3} \rightarrow$ Sistema incompatible. No existe solución.
- Si $a \neq \frac{35}{3} \rightarrow$ Sistema compatible determinado. Existe una única solución.

23 La diferencia de las dos cifras de un número es 2 y la diferencia entre dicho número y el obtenido intercambiando sus cifras es 18. ¿Cuál es el número?

Sea x la cifra de las decenas, e y la cifra de las unidades. Se diferencian dos casos.

- $y > x$

$$\left.\begin{aligned} y - x &= 2 \\ 10x + y - (10y + x) &= 18 \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} y - x &= 2 \\ 9x - 9y &= 18 \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} y &= 2 + x \\ 9x - 9y &= 18 \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow 9x - 9(2 + x) = 18 \rightarrow$

$\rightarrow 9x - 18 - 9x = 18 \rightarrow$

$\rightarrow$ Imposible. No existe solución.

- $x > y$

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 2 \\ 10x + y - (10y + x) &= 18 \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} x - y &= 2 \\ 10x + y - 10y - x &= 18 \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} x - y &= 2 \\ x - y &= 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Se buscan las soluciones en función de un parámetro.

$$x - y = 2 \xrightarrow{y = \lambda} \left.\begin{aligned} x &= 2 + \lambda \\ y &= \lambda \end{aligned}\right\}$$

Hay infinitas soluciones $(2 + \lambda, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}$. Por ejemplo, para $\lambda = 3$ se tiene que el número 53 cumple las condiciones dadas.

24 Resuelve estos sistemas de ecuaciones.

a) $\left.\begin{aligned} -x + 3y &= \frac{2}{5} \\ 5x - 15y &= -2 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} \frac{x}{3} - y &= \frac{5}{2} \\ 2x - 6y &= 15 \end{aligned}\right\}$

a) $\dfrac{-1}{5} = \dfrac{3}{-15} = \dfrac{\frac{2}{5}}{-2} = -\dfrac{1}{5}$

$y = \lambda$

$x = 3y - \dfrac{2}{5} \xrightarrow{y = \lambda} x = \dfrac{15\lambda - 2}{5}$

La solución del sistema es $y = \lambda$,

$x = \dfrac{15\lambda - 2}{5}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $\lambda = 1 \rightarrow x = \dfrac{15 \cdot 1 - 2}{5} = \dfrac{13}{5}$,

$y = 1$ es una solución,

si $\lambda = 2 \rightarrow x = \dfrac{15 \cdot 2 - 2}{5} = \dfrac{28}{5}$,

$y = 2$ es una solución.

b) $\dfrac{\frac{1}{3}}{2} = \dfrac{-1}{-6} = \dfrac{\frac{5}{2}}{15} = \dfrac{1}{6}$

$x = \lambda$

$y = \dfrac{x}{3} - \dfrac{5}{2} \xrightarrow{x = \lambda} y = \dfrac{2\lambda - 15}{6}$

La solución del sistema es $x = \lambda$,

$y = \dfrac{2\lambda - 15}{6}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\lambda = 1 \rightarrow$

$\rightarrow x = 1, y = \dfrac{2 \cdot 1 - 15}{6} = -\dfrac{13}{6}$

es una solución. Si $\lambda = 2 \rightarrow x = 2$,

$y = \dfrac{2 \cdot 2 - 15}{6} = -\dfrac{11}{6}$ es otra solución.

25 Resuelve estos sistemas.

a) $\left.\begin{aligned} x - 3y &= 1 \\ 2x - y + z &= 4 \\ 3x - 4y + z &= 5 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ 3x - 3y + 3z &= 0 \\ -x + y - z &= 0 \end{aligned}\right\}$

a) $\left.\begin{aligned} x - 3y &= 1 \\ 2x - y + z &= 4 \\ 3x - 4y + z &= 5 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\xrightarrow{E_2 = -2E_1 + E_2} \\ &\xrightarrow{E_3 = -3E_1 + E_3} \end{aligned}$

$$\left.\begin{aligned} x - 3y &= 1 \\ \rightarrow 5y + z &= 2 \\ \rightarrow 5y + z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Como se repite una ecuación, el sistema es compatible indeterminado.

$$\left.\begin{aligned} x - 3y &= 1 \\ 5y + z &= 2 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{z = \lambda}$$

$\rightarrow y = \dfrac{2 - \lambda}{5} \rightarrow \rightarrow x = \dfrac{11 - 3\lambda}{5}$

Hay infinitas soluciones:

$\left(\dfrac{11 - 3\lambda}{5}, \dfrac{2 - \lambda}{5}, \lambda\right), \lambda \in \mathbb{R}$.

b) $\left.\begin{array}{r} x-y+z=0 \\ 3x-3y+3z=0 \\ -x+y-z=0 \end{array}\right\} \xrightarrow[E_3=E_1+E_3]{E_2=-3E_1+E_2}$

$\begin{array}{r} \\ \to \\ \to \end{array} \left.\begin{array}{r} x-y+z=0 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{array}\right\}$

Sistema compatible indeterminado.
Como hay una ecuación y tres incógnitas, necesitados dos parámetros.

$x-y+z=0 \xrightarrow{y=\mu,\ z=\lambda} x=\mu-\lambda$

Hay infinitas soluciones:
$(\mu-\lambda, \mu, \lambda), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

26 Resuelve el sistema $\left.\begin{array}{r} x-y+z=0 \\ 2x-y-2z=1 \\ x-az=2 \end{array}\right\}$.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -a & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[E_3=-E_1+E_3]{E_2=-2E_1+E_2}$

$\begin{array}{c} \\ \to \\ \to \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1-a & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3=-E_2+E_3}$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 3-a & 1 \end{array}\right)$

- $3-a=0 \to a=3 \to$ Sistema incompatible. Ninguna solución.
- $3-a\neq 0 \to a\neq 3 \to$ Sistema compatible determinado. Una solución.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 3-a & 1 \end{array}\right) \to$

$\to \left.\begin{array}{r} x-y+z=0 \\ y-4z=1 \\ (3-a)z=1 \end{array}\right\} \to$

$z=\dfrac{1}{3-a} \to y=\dfrac{7-a}{3-a} \to x=\dfrac{6-a}{3-a}$

Hay infinitas soluciones:

$\left(\dfrac{6-a}{3-a}, \dfrac{7-a}{3-a}, \dfrac{1}{3-a}\right)$ para $a\neq 3$.

27 María, Marisa y Manuela quieren reunir 260 € para comprar un regalo. Si María pone el doble que Marisa y Manuela pone dos terceras partes de lo que pone María, ¿cuánto pone cada una?

	Dinero en € que aporta
María	$y=2x$
Marisa	x
Manuela	$z=\dfrac{2}{3}y$
TOTAL	260

$\left.\begin{array}{r} x+y+z=260 \\ y=2x \\ z=\dfrac{2}{3}y \end{array}\right\} \to$

$\to \left.\begin{array}{r} x+y+z=260 \\ 2x-y=0 \\ 2y-3z=0 \end{array}\right\} \to$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 260 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_2=-2E_1+E_2}$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 260 \\ 0 & -3 & -2 & -520 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3=2E_2+3E_3}$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 260 \\ 0 & -3 & -2 & -520 \\ 0 & 0 & -13 & -1\,040 \end{array}\right) \to \left\{\begin{array}{l} x=60 \\ y=120 \\ z=80 \end{array}\right.$

Así, María, Marisa y Manuela aportan 120 €, 60 € y 80 €, respectivamente.

28 Resuelve estos sistemas de ecuaciones.

a) $\left.\begin{array}{r} \sqrt{y+2x}=x+1 \\ x-y=-1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} \sqrt{5x^2-y}-y=1 \\ 5x+3y=8 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} \sqrt{y+2x}=x+1 \\ x-y=-1 \end{array}\right\} \to$

$\to \left.\begin{array}{r} y+2x=(x+1)^2 \\ x-y=-1 \end{array}\right\} \to$

$\to \left.\begin{array}{r} y+2x=x^2+2x+1 \\ x-y=-1 \end{array}\right\} \to$

$\to \left.\begin{array}{r} y=x^2+1 \\ y=x+1 \end{array}\right\} \to$

$\to x^2+1=x+1 \to x^2-x=0 \to$

$\to \left\{\begin{array}{l} x_1=0 \to y_1=1 \\ x_2=1 \to y_2=2 \end{array}\right.$

b) $\left.\begin{array}{r}\sqrt{5x^2 - y} = 1 + y \\ 5x + 3y = 8\end{array}\right\} \xrightarrow{x = \frac{8-3y}{5}}$

$\rightarrow 5x^2 - y = 1 + y^2 + 2y \rightarrow$

$\rightarrow 5\left(\dfrac{8 - 3y}{5}\right)^2 - y = 1 + y^2 + 2y \rightarrow$

$\rightarrow 4y^2 - 33y + 59 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{33 + \sqrt{145}}{8} \\ y_2 = \dfrac{33 - \sqrt{145}}{8} \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-35 - 3\sqrt{145}}{40} \\ x_2 = \dfrac{-35 + 3\sqrt{145}}{40} \end{cases}$

29 Todos los días compro 3 barras de pan. Pago con una moneda de 2 € y me devuelven algunas monedas de céntimos.

Hoy vienen a comer mis primos y he comprado 5 barras. Le he dado 3 € a la panadera pero me ha dicho que no había bastante dinero.

¿Una barra de pan puede costar 0,60 €? ¿Y 0,65 €?

x: precio de una barra de pan

$\left.\begin{array}{r}3x < 2 \\ 5x > 3\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}x < 0,\widehat{6} \\ x > 0,6\end{array}\right\} \rightarrow$ Solución: $(0,6;\ 0,\widehat{6})$

Una barra de pan no puede costar 0,60 €, pero sí puede costar 0,65 €.

30 Dos hortelanos deciden plantar patatas en sus huertos. El primero dispone de 3 bancales y cultiva 10 plantas en cada uno. El segundo utiliza 2 bancales, en cada uno de los cuales siembra 6 plantas. Al recoger la cosecha, el primero obtiene más de 60 kg de patatas, y el segundo, menos de 30 kg.

¿Pueden afirmar que han obtenido 3 kg de patatas por cada planta?

x: kilos de patatas obtenidos por planta

$\left.\begin{array}{r}3 \cdot 10x > 60 \\ 2 \cdot 6x < 30\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}x > 2 \\ x < 2,5\end{array}\right\} \rightarrow$ Solución: $(2;\ 2,5)$

No pueden afirmar que han obtenido 3 kg de patatas por cada planta, ya que han obtenido entre 2 y 2,5 kg.

ACTIVIDADES FINALES

1. Estudia y clasifica sistemas de ecuaciones lineales

Ecuaciones lineales

ACTIVIDADES FLASH

31 Completa para que los siguientes pares de valores sean solución de la ecuación $-x + 5y = 4$.

a) (1, ■)
b) (■, 3)
c) (−4, ■)
d) (■, −2)

a) $-1 + 5y = 4 \rightarrow y = 1 \rightarrow$ ■ $= 1$

b) $-x + 15 = 4 \rightarrow x = 11 \rightarrow$ ■ $= 11$

c) $4 + 5y = 4 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ ■ $= 0$

d) $-x - 10 = 4 \rightarrow x = -14 \rightarrow$ $\rightarrow$ ■ $= -14$

32 Completa para que las siguientes ternas de valores sean solución de la ecuación $2x - 3y + z = 8$.

a) (1, ■, 9)
b) (■, −1, 1)
c) (−1, −2, ■)
d) (0, ■, 2)
e) (−1, −5, ■)
f) (■, −2, 10)

a) $2 - 3y + 9 = 8 \rightarrow y = 1 \rightarrow$ ■ $= 1$

b) $2x + 3 + 1 = 8 \rightarrow x = 2 \rightarrow$ ■ $= 2$

c) $-2 + 6 + z = 8 \rightarrow z = 4 \rightarrow$ ■ $= 4$

d) $0 - 3y + 2 = 8 \rightarrow y = -2 \rightarrow$ ■ $= -2$

e) $-2 + 15 + z = 8 \rightarrow z = -5 \rightarrow$ $\rightarrow$ ■ $= -5$

f) $2x + 6 + 10 = 8 \rightarrow x = -4 \rightarrow$ $\rightarrow$ ■ $= -4$

33 Copia y completa estas ecuaciones para que tengan como solución $x = -1$, $y = 2$.

a) $3(x + 1) + 2y =$ ■

b) $x + 5 = 2y -$ ■

c) $3(x - 3) +$ ■$y = 0$

d) $y - 4 =$ ■$x + 2$

a) $3(-1+1)+2\cdot 2=4 \rightarrow \blacksquare = 4$
b) $-1+5=2\cdot 2-\blacksquare \rightarrow \blacksquare = 0$
c) $3(-1-3)+\blacksquare\cdot 2=0 \rightarrow \blacksquare = 6$
d) $2-4=\blacksquare\cdot(-1)+2 \rightarrow \blacksquare = 4$

34 Halla dos soluciones de estas ecuaciones.

a) $3x+y=2x-y$
b) $3(x+y)=x-y$
c) $\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{x}{3}+1$
d) $2(x-y)=4x$
e) $2(x-y)=4+x$
f) $3(x-2y)=2(2x+y)$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $(0, 0)$ y $\left(1, -\dfrac{1}{2}\right)$
b) $(0, 0)$ y $(2, -1)$
c) $(0, 2)$ y $(6, 0)$
d) $(0, 2)$ y $(2, -2)$
e) $(0, -2)$ y $\left(1, -\dfrac{3}{2}\right)$
f) $(0, 0)$ y $\left(1, -\dfrac{1}{8}\right)$

35 **INVENTA.** Escribe tres ecuaciones lineales distintas en las que una de sus soluciones sea $x=3$, $y=-1$. Después representa gráficamente esas ecuaciones. ¿Qué observas?

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$2x-3y=9 \qquad 4x-y=13 \qquad x+y=2$

Las rectas se pasan por el punto $(3, -1)$.

36 **INVESTIGA.** Escribe, en los casos en que sea posible, una ecuación lineal que tenga:

a) Una solución.
b) Dos soluciones.
c) Infinitas soluciones.
d) Ninguna solución.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) No es posible con una ecuación de dos incógnitas. Tiene que ser una ecuación con una sola incógnita.
$2x=x+1 \rightarrow x=1$
b) No es posible.
c) $3x+4y=2(x-2)+2$
d) $5x-3y=5(x-2)-3(y-1) \rightarrow$
$\rightarrow 0=-10+3 \rightarrow 0 \neq -7$

37 Escribe una ecuación cuya solución sea de la forma $(3a, 1-2a)$ y, después, averigua si estos pares de números son solución de esa ecuación.

a) $(3, -1)$
b) $(-6, 5)$
c) $(0, -2)$
d) $(-3, 3)$
e) $(6, 3)$
f) $(9, -5)$

¿Cuál es el valor de a en los casos en que son solución?

Respuesta abierta. Por ejemplo: $2x+3y=3$

a) Es solución. $a=1$
b) Es solución. $a=-2$
c) No es solución.
d) Es solución. $a=-1$
e) No es solución.
f) Es solución. $a=3$

38 Considera la ecuación $2x+y=5$.

a) Escribe todas sus soluciones.
b) Razona si $(5, -15)$ es una de sus soluciones.
c) Completa los siguientes pares de valores para que sean solución $(3, \blacksquare)$ y $(\blacksquare, 3)$.

a) $2x+y=5 \xrightarrow{y=\lambda} \left.\begin{array}{l} 2x+\lambda=5 \\ y=\lambda \end{array}\right\} \rightarrow$
$\rightarrow x=\dfrac{5-\lambda}{2} \qquad y=\lambda$

Hay infinitas soluciones:
$\left(\dfrac{5-\lambda}{2}, \lambda\right), \lambda \in \mathbb{R}.$

b) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{5-\lambda}{2}=5 \\ \lambda=-15 \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{5+15}{2}=10 \neq 5 \rightarrow$
$\rightarrow$ No es solución.

c) $x=3 \rightarrow \dfrac{5-\lambda}{2}=3 \rightarrow \lambda=-1 \rightarrow$
$\rightarrow \blacksquare=-1$
$y=3 \rightarrow \lambda=3 \rightarrow x=\dfrac{5-3}{2} \rightarrow$
$\rightarrow x=1 \rightarrow \blacksquare=1$

39 **INVENTA.** Escribe un sistema cuya solución sea:

a) $(a, a-1)$

b) $(2a, a+3)$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\left.\begin{array}{l} a = x \\ a = y+1 \end{array}\right\} \rightarrow x = y+1$

Un sistema con esa solución es:

$\left.\begin{array}{l} x = y+1 \\ a - y = 1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} x = 2a \\ y = a+3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} a = \dfrac{x}{2} \\ a = y-3 \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{x}{2} = y - 3 \rightarrow x = 2y - 6$

Un sistema con esa solución es:

$\left.\begin{array}{l} x = 2y-6 \\ x = 2a \end{array}\right\}$

40 **INVESTIGA.** Si los dos miembros de una ecuación lineal se multiplican o dividen por un número distinto de cero, ¿cómo son las soluciones de la nueva ecuación?

Las soluciones no varían porque es una propiedad de las ecuaciones.
Por ejemplo:

$x + y = 4 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 4$

$2(x+y) = 2 \cdot 4 \rightarrow 2x + 2y = 8 \rightarrow$
$\rightarrow x = 0 \rightarrow y = 4$

Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

ACTIVIDADES FLASH

41 Determina si el par de valores $x = 5$, $y = 2$ es solución de estos sistemas.

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - 4y = 7 \\ \dfrac{x-1}{2} + y = 0 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2(x-y) = x+1 \\ \dfrac{2x-y}{4} = y \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} 15 - 8 = 7 \\ \dfrac{4}{2} + 2 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 7 = 7 \\ 4 \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow$

No es solución de este sistema.

b) $\left.\begin{array}{r} 2 \cdot (5-2) = 6 \\ \dfrac{10-2}{4} = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 6 = 6 \\ 2 = 2 \end{array}\right\} \rightarrow$

Sí es solución de este sistema.

42 Completa estos sistemas para que $x = 1$, $y = 4$ sea solución.

a) $\left.\begin{array}{r} \blacksquare x - 3y = -10 \\ -5x + \blacksquare y = 11 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} \blacksquare x + 3y = 16 \\ -2x + 7y = \blacksquare \end{array}\right\}$

Por comodidad, denotamos al $\blacksquare$ de la primera ecuación por a, y al de la segunda ecuación, por b. Entonces, sustituyendo:

a) $\left.\begin{array}{r} a - 12 = -10 \\ -5 + 4b = 11 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = 4 \end{array}\right.$

b) $\left.\begin{array}{r} a + 12 = 16 \\ -2 + 28 = b \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 4 \\ b = 26 \end{array}\right.$

43 Calcula el valor de a y b para que el siguiente sistema tenga por solución $x = 1$, $y = -2$.

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 2(5x - y) - 3 = a \\ 4(x - 2y) + 3x - 2 = b \end{array}\right\}$$

$\left.\begin{array}{r} 3 \cdot 1 - 2(5 \cdot 1 + 2) - 3 = a \\ 4(1 + 2 \cdot 2) + 3 \cdot 1 - 2 = b \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -14 \\ b = 21 \end{array}\right.$

44 Del siguiente sistema de ecuaciones se sabe que $x = -1$ forma parte de su solución. Determina el valor de y.

$$\left.\begin{array}{r} 3(2x + y - 1) - 6(4x - y) = 15 \\ -x + y + 3(x - 2y) + 6 = 4 \end{array}\right\}$$

$\left.\begin{array}{r} 3(y - 3) - 6(-4 - y) = 15 \\ 1 + y + 3(-1 - 2y) = -2 \end{array}\right\} \rightarrow y = 0$

45 Resuelve estos sistemas por sustitución.

a) $\left.\begin{array}{r} 2x+y=1 \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{5}=2 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x-\dfrac{y+3}{5}=2 \\ 2x+y=8 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x+y=1 \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{5}=2 \end{array}\right\} \xrightarrow{y=1-2x}$

$\rightarrow \dfrac{x}{3}-\dfrac{1-2x}{5}=2 \rightarrow$

$\rightarrow 5x-3+6x=30 \rightarrow$

$\rightarrow x=3 \rightarrow y=-5$

b) $\left.\begin{array}{r} x-\dfrac{y+3}{5}=2 \\ 2x+y=8 \end{array}\right\} \xrightarrow{y=8-2x}$

$\rightarrow x-\dfrac{8-2x+3}{5}=2 \rightarrow$

$\rightarrow x=3 \rightarrow y=2$

46 Resuelve por igualación.

a) $\left.\begin{array}{r} y-x+2=6 \\ 2(x-y)+1=-y \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ \dfrac{x-y}{4}=\dfrac{-3}{8} \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{l} y=4+x \\ y=2x+1 \end{array}\right\} \rightarrow 4+x=2x+1 \rightarrow$

$\rightarrow x=3 \rightarrow y=7$

b) $\left.\begin{array}{r} y=1-x \\ 2x-2y=-3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} y=1-x \\ y=\dfrac{2x+3}{2} \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow 1-x=\dfrac{2x+3}{2} \rightarrow$

$\rightarrow 2-2x=2x+3 \rightarrow -1=4x \rightarrow$

$\rightarrow x=-\dfrac{1}{4} \rightarrow y=\dfrac{5}{4}$

47 Resuelve por reducción.

a) $\left.\begin{array}{r} 4x-2=y-5 \\ 3x-\dfrac{y-2}{5}=2 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x+y=2 \\ 3x+\dfrac{10}{3}=y \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} 4x-y=-3 \\ -15x+y=-8 \end{array}\right\} \rightarrow -11x=-11 \rightarrow$

$\rightarrow x=1 \rightarrow y=7$

b) $\left.\begin{array}{r} x+y=2 \\ 9x-3y=-10 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot 3}$

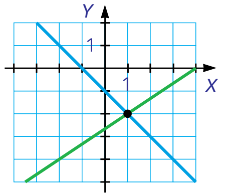
$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+3y=6 \\ 9x-3y=-10 \end{array}\right\} \rightarrow 12x=-4 \rightarrow$

$\rightarrow x=-\dfrac{1}{3} \rightarrow y=\dfrac{7}{3}$

48 **INVENTA.** Escribe y representa un sistema de ecuaciones lineales cuya solución sea $x=1$, $y=-2$.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$\left.\begin{array}{r} 2x-3y=8 \\ x+y=-1 \end{array}\right\}$



49 Resuelve estos sistemas de ecuaciones.

a) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x+1}{2}-\dfrac{y+5}{4}=\dfrac{3}{2} \\ 2(x-1)-3(1-y)=-3x+1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{4x}{3}+\dfrac{3y-2}{6}=\dfrac{5}{6} \\ \dfrac{x+y}{4}=-x \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x-y=9 \\ 5x+3y=6 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot 3}$

$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 6x-3y=27 \\ 5x+3y=6 \end{array}\right\} \rightarrow 11x=33 \rightarrow$

$\rightarrow x=3 \rightarrow y=-3$

b) $\rightarrow \left.\begin{array}{r} 8x+3y=7 \\ 5x+y=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot 3}$

$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 8x+3y=7 \\ -15x-3y=0 \end{array}\right\} \rightarrow -7x=7 \rightarrow$

$\rightarrow x=-1 \rightarrow y=5$

50 **INVENTA.** Determina cuatro posibles valores que faltan para que estos sistemas de ecuaciones tengan como solución $x = 2$, $y = -1$.

a) $\left.\begin{array}{l} \blacksquare x + \blacksquare y = 2 \\ \blacksquare x + \blacksquare y = 3 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} \blacksquare x - \blacksquare y = -2 \\ \blacksquare x - \blacksquare y = 0 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l} \blacksquare x + \blacksquare y = \dfrac{1}{2} \\ \blacksquare x - \blacksquare y = -1 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{l} \blacksquare x + \blacksquare y = \dfrac{1}{4} \\ \blacksquare x - \blacksquare y = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right\}$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\left.\begin{array}{l} 2x + 2y = 2 \\ 4x + 5y = 3 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x + 8y = -2 \\ x + 2y = 0 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l} 2x + \dfrac{7}{2}y = \dfrac{1}{2} \\ x + 3y = -1 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{l} 3x + \dfrac{23}{4}y = \dfrac{1}{4} \\ x + \dfrac{7}{2}y = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right\}$

51 Encuentra, si es posible, un valor de a para que el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 8x - 12y = 20 \\ 4x + 9y = a \end{array}\right\}$$

a) Sea incompatible.
b) Sea compatible indeterminado.
c) Sea compatible determinado.

$\dfrac{8}{4} \neq \dfrac{-12}{9}$

a) Para ningún valor de a.
b) Para ningún valor de a.
c) Para cualquier valor de a.

52 Halla, si es posible, valores de a para que el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} ax + 2y = 2 \\ -2x + \dfrac{y}{2} = a \end{array}\right\}$$

a) Sea incompatible.
b) Sea compatible indeterminado.
c) Sea compatible determinado.

$\dfrac{a}{-2} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{2}} \to a = -8 \to$

$\to \dfrac{-8}{-2} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{2}} \neq \dfrac{2}{-8}$

a) $a = -8$
b) El sistema no es compatible determinado para ningún valor de a.
c) $a \neq -8$

53 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\left.\begin{array}{r} -2(x+4) + 3(3-2y) - 1 = 12 \\ 5(x+y) - 4(x+1) - 2y + 10 = 0 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{2x+3}{3} + \dfrac{y+1}{5} = 3 \\ \dfrac{x-5}{2} - \dfrac{2y-1}{3} = 0 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x+3}{9} - \dfrac{y-5}{8} = 0 \\ \dfrac{2x-y+1}{2} - \dfrac{x+2y-3}{5} = 0 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 6x - 2y = 6 \\ 3(x+1) - (y-2) = 8 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} x - 2y - 3 - \dfrac{2x+y-3}{2} + \dfrac{x+7}{6} = 0 \\ \dfrac{x-6y}{2} - \dfrac{x-y}{3} + \dfrac{y}{6} = 0 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} -2x - 6y = 12 \\ x + 3y + 6 = 0 \end{array}\right\} \to x = -3y - 6$

Sistema compatible indeterminado:
$x = -3\lambda - 6 \quad y = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$

b) $\left.\begin{array}{r} 10x + 3y = 27 \\ 3x - 4y = 13 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\cdot(-3)} \\ \xrightarrow{\cdot 10} \end{array}$

$\begin{array}{l} \to -30x - 9y = -81 \\ \to 30x - 40y = 130 \end{array}\Big\} \to y = -1 \to$

$\to 3x - 4 \cdot (-1) = 13 \to x = 3$

Sistema compatible determinado:
$x = 3 \quad y = -1$

c) $\left.\begin{array}{l} 8x - 9y = -69 \\ 8x - 9y = -11 \end{array}\right\}$

Sistema incompatible

d) $\left.\begin{array}{r} 6x - 2y = 6 \\ 3x - y = 3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 6x - 2y = 6 \\ -6x + 2y = -6 \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow 3x - y = 3$

Sistema compatible indeterminado:

$x = \lambda \qquad y = 3\lambda - 3, \lambda \in \mathbb{R}$

e) $\left.\begin{array}{l} x - 15y = 2 \\ x - 15y = 0 \end{array}\right\}$

Sistema incompatible

54 ●●● **RETO.** Si m y n son dos números enteros y $2m - n = 3$, ¿qué se puede decir de $m - 2n$?

$\left.\begin{array}{l} 2m - n = 3 \\ m - 2n = k \end{array}\right\} \rightarrow n = 2m - 3 \rightarrow$

$\rightarrow m - 2(2m - 3) = k \rightarrow$

$\rightarrow k = 6 - 3m \rightarrow k = 3(2 - m)$

Por tanto, podemos afirmar que $m - 2n$ es múltiplo de 3.

55 ●●● Clasifica los siguientes sistemas en función del valor del parámetro a.

a) $\left.\begin{array}{r} 3x + ay = 5 \\ 3x + y = -a \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} -x + 2y = a \\ ax + y = -3 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} ax - y = 0 \\ x + 3ay = 0 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 3x - y = -a + 1 \\ -2ax + 2y = 4 \end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & a & 5 \\ 3 & 1 & -a \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & a & 5 \\ 0 & a - 1 & 5 + a \end{array}\right)$

Si $a - 1 = 0 \rightarrow a = 1 \rightarrow$ Sistema incompatible, pues $0 \neq 6$.

Si $a - 1 \neq 0 \rightarrow a \neq 1 \rightarrow$ Sistema compatible determinado.

No se puede dar el caso compatible indeterminado porque $a - 1$ y $5 + a$ no se anulan a la vez.

b) $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & a \\ a & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss}}$

$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & a \\ 0 & 1 + 2a & a^2 - 3 \end{array}\right) \rightarrow$

Si $1 + 2a = 0 \rightarrow a = -\frac{1}{2} \rightarrow$

$\rightarrow$ Sistema incompatible, pues $0 \neq -\frac{11}{4}$.

Si $1 + 2a \neq 0 \rightarrow a \neq -\frac{1}{2} \rightarrow$

$\rightarrow$ Sistema compatible determinado.

No se puede dar el caso compatible indeterminado porque $1 + 2a$ y $a^2 - 3$ no se anulan a la vez.

c) $\left(\begin{array}{cc|c} a & -1 & 0 \\ 1 & 3a & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{cc|c} a & -1 & 0 \\ 0 & -1 - 3a^2 & 0 \end{array}\right)$

Como $-1 - 3a^2 \neq 0$, el sistema es siempre compatible determinado.

d) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & -a + 1 \\ -2a & 2 & 4 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & -a + 1 \\ -a & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss}}$

$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & -a + 1 \\ 3 - a & 0 & 3 - a \end{array}\right)$

Si $3 - a = 0 \rightarrow a = 3 \rightarrow$

$\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Para el resto de los valores de a es sistema compatible determinado.

56 ●●○ **INVENTA.** Añade a la ecuación $3x - 5y = 3$ otra ecuación, de forma que resulte un sistema:

a) Determinado.
b) Indeterminado.
c) Incompatible.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - 5y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} 3x - 5y = 3 \\ 10y = 6x - 6 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l} 3x - 5y = 3 \\ 12x = 20y \end{array}\right\}$

57 ●●○ Agrupa de dos en dos estas ecuaciones lineales:

$4x - y - 1 = 0$	$y + 1 = -2x$
$2y = 8x + 10$	$y + 2x = 3$
$6x - 9 + 3y = 0$	$y - 4x = 5$

Para formar:

a) Dos sistemas compatibles determinados.

b) Dos sistemas compatibles indeterminados.

c) Dos sistemas incompatibles.

a) $\left.\begin{aligned} 4x - y - 1 &= 0 \\ y + 2x &= 3 \end{aligned}\right\}$ $\qquad$ $\left.\begin{aligned} 2y &= 8x + 10 \\ y + 2x &= 3 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} 6x - 9 + 3y &= 0 \\ y + 2x &= 3 \end{aligned}\right\}$ $\qquad$ $\left.\begin{aligned} 2y &= 8x + 10 \\ y - 4x &= 5 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} 4x - y - 1 &= 0 \\ y - 4x &= 5 \end{aligned}\right\}$ $\qquad$ $\left.\begin{aligned} y + 1 &= -2x \\ y + 2x &= 3 \end{aligned}\right\}$

58 **RETO.** Considera las ecuaciones:

$3x - y = 1 \qquad ax + by = c$

Calcula los valores de a, b y c para que las dos ecuaciones formen en cada caso un sistema con estas características:

a) $ax + by = c$ pasa por $(2, -3)$ y el sistema tiene como solución $(-2, -7)$.

b) $ax + by = c$ pasa por $(4, 3)$ y el sistema tiene como solución un punto de ordenada 5.

c) $ax + by = c$ pasa por $(-2, 0)$ y el sistema es incompatible.

a) $\left.\begin{aligned} ax + by = c \xrightarrow{(2,\,-3)} 2a - 3b &= c \\ \xrightarrow{(-2,\,-7)} \left.\begin{aligned} 1 &= 1 \\ -2a - 7b &= c \end{aligned}\right\} \end{aligned}\right\}$

Se forma un sistema con variables a, b y c, que es compatible indeterminado, porque hay dos ecuaciones y tres incógnitas. Las posibles soluciones se dan en función de un parámetro.

$\left.\begin{aligned} 2a - 3b &= c \\ -2a - 7b &= c \end{aligned}\right\} \rightarrow -10b = 2c \rightarrow$

$\rightarrow c = -5b \xrightarrow{b = \lambda,\ a = \frac{c + 3\lambda}{2}}$

$\rightarrow \begin{cases} a = -\lambda \\ b = \lambda \\ c = -5\lambda \end{cases}$

Por ejemplo, si $\lambda = 1 \rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = -5 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{aligned} 3x - y &= 1 \\ -x + y &= -5 \end{aligned}\right\}$

b) $x + by = c \xrightarrow{(4,\,3)} 4a - 3b = c$

$\left.\begin{aligned} 3x - y &= 1 \\ ax + by &= c \end{aligned}\right\} \xrightarrow{y = 5} \left.\begin{aligned} 3x - 5 &= 1 \\ ax + 5b &= c \end{aligned}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{aligned} x &= 2 \\ 2a + 5b &= c \end{aligned}\right\}$

Se forma un sistema con variables a, b y c, que es compatible indeterminado, porque hay dos ecuaciones y tres incógnitas. Las posibles soluciones se dan en función de un parámetro.

$\left.\begin{aligned} 4a + 3b &= c \\ 2a + 5b &= c \end{aligned}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow c = 7b \xrightarrow{b = \lambda,\ a = \frac{c - 5\lambda}{2}} \begin{cases} a = \lambda \\ b = \lambda \\ c = 7\lambda \end{cases}$

Por ejemplo, si $\lambda = 1 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 7 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{aligned} 3x - y &= 1 \\ x + y &= 7 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} ax + by = c &\xrightarrow{(-2,\,0)} -2a = c \\ \left.\begin{aligned} 3x - y &= 1 \\ ax + by &= c \end{aligned}\right\} &\xrightarrow{\text{Incomp.}} \frac{3}{a} = \frac{-1}{b} \neq \frac{1}{c} \end{aligned}\right\}$

$\rightarrow \frac{3}{a} = \frac{-1}{b} \neq \frac{1}{-2a} \rightarrow 3b = -a$

Se forma un sistema con variables a, b, c, que es compatible indeterminado, porque hay dos ecuaciones y tres incógnitas. Las posibles soluciones se dan en función de un parámetro.

$\left.\begin{aligned} -2a &= c \\ 3b &= -a \end{aligned}\right\} \rightarrow a = -3b \xrightarrow{b = \lambda,\ c = 6\lambda}$

$\rightarrow \begin{cases} a = -3\lambda \\ b = \lambda \\ c = 6\lambda \end{cases}$

Por ejemplo, si $\lambda = -1 \rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \\ c = -6 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{aligned} 3x - y &= 1 \\ 3x - y &= -6 \end{aligned}\right\}$

59 **INVENTA.** Considera el par de valores $(3\lambda, \lambda)$, donde λ puede ser cualquier número real.

a) Escribe una ecuación cuyas soluciones sean ese par de valores.

b) Escribe un sistema de dos ecuaciones lineales cuyas soluciones sean ese par de valores.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $x - 3y = 0$ b) $\left.\begin{array}{r} x = 3y \\ 6y - 2x = 0 \end{array}\right\}$

60 **INVENTA.** Escribe dos sistemas de ecuaciones lineales que tengan como solución el par de valores $(1 - \lambda, 2\lambda)$, donde λ es cualquier número real.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} 2x = 2 - y \\ x + \dfrac{y}{2} = 1 \end{array}\right\}$$

61 **INVENTA.** Escribe un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas de modo que cumpla la condición indicada en cada caso.

a) Es compatible determinado con solución $x = -1, y = -2$.

b) Es compatible indeterminado y $x = -1$, $y = -2$ una solución del sistema.

c) Es compatible indeterminado y todas sus soluciones son de la forma $x = -1$, $y = \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = -8 \\ x + y = -3 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x - y = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x + y = -1 + y \\ 2x - y = -2 - y \end{array}\right\}$

62 **RETO.** Si las soluciones de la ecuación $ax + by = c$ son de la forma $(\lambda, 2\lambda)$ y las de la ecuación $dx + ey = f$ son de la forma $(\lambda, -3\lambda + 10)$, encuentra la solución del sistema formado por ambas ecuaciones.

Se obtiene una ecuación equivalente de cada una de las ecuaciones dadas a partir de la forma que tiene su solución:

$$\left.\begin{array}{l} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{x = \lambda,\ y = 2\lambda} \\ \xrightarrow{x = \lambda,\ y = 10 - 3\lambda} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow y = 2x \\ \rightarrow y = 10 - 3x \end{array}\right\} \rightarrow 2x = 10 - 3x \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 2 \rightarrow y = 4$$

63 **INVESTIGA.** Halla el valor de k para que los siguientes sistemas sean compatibles determinados.

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - 2y = -1 \\ x - ky = -3 \\ 4x - y = 2 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x - ky = 12 \\ kx - y = 11 \\ x + y = 1 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - 2y = -1 \\ -3x + 3ky = 9 \\ -3x + \dfrac{3}{4}y = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right\} \rightarrow$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} (3k - 2)y = 8 \\ -\dfrac{5}{4}y = -\dfrac{5}{2} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} y = \dfrac{8}{3k - 2} \\ y = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{8}{3k - 2} = 2 \rightarrow$$

$$\rightarrow k = 2$$

b) $\left.\begin{array}{l} (2 + k)x = 12 + k \\ (k + 1)x = 12 \end{array}\right\} \rightarrow$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{12 + k}{2 + k} \\ x = \dfrac{12}{k + 1} \end{array}\right\} \rightarrow k^2 + k - 12 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} k_1 = 3 \\ k_2 = -4 \end{array}\right.$$

64 Determina el número de soluciones de estos sistemas.

a) $\left.\begin{array}{r} x - 2y = -2 \\ \dfrac{x}{4} + y = 7 \\ x - y = 3 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 8 \\ \dfrac{x + 2y}{5} = -1 \\ x - 1 = -y \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x - \dfrac{2y}{3} = 2 \\ -6x + 4y = -12 \\ 2y - 3x = -6 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} -x + 4y = 15 \\ \dfrac{x - 3y}{3} = -1 \\ 5y - 3x = 0 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{aligned} x - 2y &= -2 \\ \frac{x}{4} + y &= 7 \\ x - y &= 3 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\cdot 4} \left.\begin{aligned} x - 2y &= -2 \\ x + 4y &= 28 \\ x - y &= 3 \end{aligned}\right\} \to$

$\to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 28 \\ 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss}}$

$\to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas. Existe una única solución.

b) $\left.\begin{aligned} x - \frac{2y}{3} &= 2 \\ -6x + 4y &= -12 \\ -2y + 3x &= -6 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\xrightarrow{\cdot 3} \\ & \\ &\longrightarrow \end{aligned}$

$\left.\begin{aligned} \to\quad 3x - 2y &= 6 \\ -6x + 4y &= -12 \\ \to\ -3x + 2y &= -6 \end{aligned}\right\} \to$

$\to \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 6 \\ -6 & 4 & -12 \\ -3 & 2 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss}}$

$\to \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema de una ecuación y dos incógnitas. Existen infinitas soluciones.

c) $\left.\begin{aligned} 2x + y &= 8 \\ \frac{x + 2y}{5} &= -1 \\ x - 1 &= -y \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\cdot 5} \left.\begin{aligned} 2x + y &= 8 \\ x + 2y &= -5 \\ x + y &= 1 \end{aligned}\right\} \to$

$\to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas. Existe una única solución.

d) $\left.\begin{aligned} -x + 4y &= 15 \\ \frac{x - 3y}{3} &= -1 \\ 5y - 3x &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\xrightarrow{\cdot 3} \\ &\xrightarrow{\cdot (-1)} \end{aligned}$

$\left.\begin{aligned} -x + 4y &= 15 \\ \to\quad x - 3y &= -3 \\ \to\quad 3x - 5y &= 0 \end{aligned}\right\} \to$

$\to \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 15 \\ 1 & -3 & -3 \\ 3 & -5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss}}$

$\to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 7 & 45 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & -39 \end{array}\right) \to$

$\to 0 \neq -39$

Sistema incompatible. Es imposible que se cumpla la tercera ecuación. No existe ninguna solución.

65 **INVENTA.** Añade una ecuación a este sistema con dos incógnitas para que sea:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 0 \\ 3x - y &= \frac{11}{3} \end{aligned}\right\}$$

a) Compatible determinado.
b) Compatible indeterminado.
c) Incompatible.

El sistema es compatible determinado.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $4x + 6y = 0$
b) No es posible.
c) $2x + 3y = 4$

2. Aplica el método de Gauss para resolver, estudiar y clasificar sistemas de ecuaciones

Sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas. Método de Gauss

ACTIVIDADES FLASH

66 Añade una ecuación en cada caso para formar un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas cuya solución sea $x = -1$, $y = 1$ y $z = 2$.

a) $x - 2y + 2z = 1$
$3x + y - 4z = -10$

b) $-x + z = 3$
$3y - 2z = -1$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $2x + 3y + 2z = 5$

b) $3x + y = -2$

67 Añade dos ecuaciones a la ecuación $\frac{x - 2y}{2} + z = -1$ para formar un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas cuya solución sea $x = 2$, $y = -1$ y $z = -3$.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$3x - y + z = 4$

$2x + y - 4z = 15$

68 Escribe, en cada caso, un sistema de tres ecuaciones cuya solución sea la que se indica.

a) $x = 4, y = -2, z = 0$

b) $x = -3, y = 5, z = 1$

c) $x = 2, y = 7, z = -1$

d) $x = 0, y = 1, z = \frac{1}{2}$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\left.\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ x - y &= 6 \\ y - z &= -2 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ x - y + 8z &= 0 \\ y - z &= 4 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} x + y + z &= 8 \\ x - y - z &= -4 \\ 4x - y + z &= 0 \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} x + y + 2z &= 2 \\ x + y - 2z &= 0 \\ 10x + 2y - 4z &= 0 \end{aligned}\right\}$

69 Halla el valor de a y b en la ecuación $ax - 4y + bz = -4$ sabiendo que $(-1, 3, 2)$ y $(3, 5, 2)$ son dos de sus soluciones.

Después, escribe otras dos soluciones de la misma ecuación.

$\left.\begin{aligned} -a + 2b &= 8 \\ 3a + 2b &= 16 \end{aligned}\right\} \rightarrow a = 2 \quad b = 5$

La ecuación es $2x - 4y + 5z = -4$.

Respuesta abierta. Por ejemplo: $(0, 1, 0)$ y $(2, 2, 0)$

70 Halla el valor de a y b en la ecuación $3x + ay + bz = 6$ sabiendo que $(1, 5, 1)$ y $(-1, 7, -1)$ son dos de sus soluciones. Después, escribe tres soluciones que cumplan:

a) $x = 2$

b) $y = -3$

c) $z = 5$

$\left.\begin{aligned} 3 + 5a + b &= 6 \\ -3 + 7a - b &= 6 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 5a + b &= 3 \\ 7a - b &= 9 \end{aligned}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow a = 1 \quad b = -2$

La ecuación es $3x + y - 2z = 6$.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $(2, 2, 0)$

b) $(3, -3, 0)$

c) $(5, 1, 5)$

71 Resuelve los sistemas.

a) $\left.\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ x - 2y + z &= 11 \\ 2x + y - 2z &= 4 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x - 2y + 5z &= 4 \\ x + 3y - 4z &= 9 \\ -x - y + 4z &= 11 \end{aligned}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -10 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases}$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & -4 & 9 \\ -1 & -1 & 4 & 11 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & -9 & 5 \\ 0 & -3 & 9 & 15 \end{array}\right) \rightarrow$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{18}{5} & 18 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 9 \\ z = 5 \end{cases}$$

72 Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de Gauss.

a) $\left.\begin{aligned} -x + y + z &= 5 \\ 2x - y + 4z &= -5 \\ x + y - 5z &= 5 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x - 2y - z &= -1 \\ x - y + 2z &= 2 \\ x + 2y + z &= 3 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} 2x - y - z &= 24 \\ 7x + 10y + 2z &= 6 \\ 2x + 6y + 4z &= -10 \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} -x + 3y + z &= -15 \\ 3x - y + 3z &= 9 \\ x + 4y - 2z &= -4 \end{aligned}\right\}$

e) $\left.\begin{aligned} 3x + 2y + 2z &= 1 \\ 2x + y + z &= 0 \\ 3y + 2z &= -1 \end{aligned}\right\}$

f) $\left.\begin{aligned} 3x - 2y + 4z &= 5 \\ 5x + 2y - 2z &= -1 \\ -x + 6y - 10z &= -11 \end{aligned}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & -5 & 5 \end{array}\right) \rightarrow$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & -5 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \\ z = 0 \end{cases}$$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & -8 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{3}{5} \\ z = \frac{4}{5} \end{cases}$$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 24 \\ 7 & 10 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & -10 \end{array}\right) \rightarrow$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 24 \\ 0 & 27 & 11 & -156 \\ 0 & 7 & 5 & -34 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 24 \\ 0 & 27 & 11 & -156 \\ 0 & 0 & 58 & -174 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = -7 \\ z = 3 \end{cases}$$

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & -15 \\ 3 & -1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & -2 & -4 \end{array}\right) \rightarrow$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & -15 \\ 0 & 4 & 3 & -18 \\ 0 & 7 & -1 & -19 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & -15 \\ 0 & 4 & 3 & -18 \\ 0 & 0 & 25 & -50 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \\ z = -2 \end{cases}$$

e) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right) \rightarrow$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -5 \\ z = 7 \end{cases}$$

f) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & 6 & -10 & -11 \end{array}\right) \rightarrow$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & -8 & 13 & 14 \\ 0 & 8 & -13 & -14 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & -8 & 13 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Sistema compatible indeterminado. Hay infinitas soluciones en función del parámetro λ:

$$\left(\frac{2-\lambda}{4}, \frac{13\lambda - 14}{8}, \lambda\right), \lambda \in \mathbb{R}$$

73 Resuelve estos sistemas por el método de Gauss utilizando su forma matricial.

a) $\left.\begin{aligned} x + y - z &= 3 \\ 2x - y - 5z &= 0 \\ \frac{x}{2} + 3y + 2z &= \frac{13}{2} \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x - y + z = 1 \\ -2x + y - z = -4 \\ x + 2y - 2z = 7 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} -x + y + z = 5 \\ 2x - y - 4z = -5 \\ x + y - 5z = 5 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} x + y - 5z = 2 \\ x - y - z = -4 \\ y - 2z = 3 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} x - 2z = -11 \\ 2y - z = -5 \\ x - 4y = -1 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} -x + y - z = -7 \\ 3x - y - z = 15 \\ 4x - 2y = 22 \end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & 2 & \frac{13}{2} \end{array}\right) \to$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 \\ 1 & 6 & 4 & 13 \end{array}\right) \to$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado. Las infinitas soluciones están determinadas por la siguiente terna, en función del parámetro λ:

$(1 + 2\lambda, 2 - \lambda, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -2 & 7 \end{array}\right) \to$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{array}\right) \to$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado. Hay infinitas soluciones en función del parámetro λ:

$(3, 2 + \lambda, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -4 & -5 \\ 1 & 1 & -5 & 5 \end{array}\right) \to$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -4 & 10 \end{array}\right) \to$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado. Hay infinitas soluciones en función del parámetro λ:

$(3\lambda, 5 + 2\lambda, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}$

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \to$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \to$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado. Hay infinitas soluciones en función del parámetro λ:

$(3\lambda - 1, 3 + 2\lambda, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}$

e) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -11 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & -4 & 0 & -1 \end{array}\right) \to$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -11 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & -4 & 2 & 10 \end{array}\right) \to$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -11 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado. Hay infinitas soluciones en función del parámetro λ:

$\left(2\lambda - 11, \frac{\lambda - 5}{2}, \lambda\right), \lambda \in \mathbb{R}$

f) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -7 \\ 3 & -1 & -1 & 15 \\ 4 & -2 & 0 & 22 \end{array}\right) \to$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 2 & -4 & -6 \\ 0 & 2 & -4 & -6 \end{array}\right) \to$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 2 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado. Hay infinitas soluciones en función del parámetro λ:

$(\lambda + 4, 2\lambda - 3, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}$

74 Comprueba si estos sistemas de ecuaciones tienen solución o no.

a) $\left.\begin{aligned} x - y + z &= 3 \\ 2x + 4z &= 2 \\ 2x - y + 3z &= 1 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} 2x + y - z &= 0 \\ x + 3y - 2z &= 1 \\ x + 2y + z &= 2 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} -x - y + 2z &= 3 \\ 2x + 3y + z &= -2 \\ 2y + 10z &= 8 \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} x + 2y - z &= 5 \\ 2x + y - 2z &= 7 \\ x - y - z &= 0 \end{aligned}\right\}$

e) $\left.\begin{aligned} x + 5y - 5z &= 12 \\ -2x - 3y + 3z &= -1 \\ 3x + y - z &= 0 \end{aligned}\right\}$

f) $\left.\begin{aligned} x - 5y + 3z &= 10 \\ 2x - 2y + z &= -4 \\ 3x + y - z &= 5 \end{aligned}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow$ Sistema incompatible. No existe solución.

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & -4 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & -7 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow$ Sistema compatible determinado.

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 10 & 8 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & 7 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow$ Sistema incompatible. No existe solución.

e) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -5 & 12 \\ -2 & -3 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -5 & 12 \\ 0 & 7 & -7 & 23 \\ 0 & -14 & 14 & -36 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -5 & 12 \\ 0 & 7 & -7 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow$ Sistema incompatible. No existe solución.

f) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 3 & 10 \\ 2 & -2 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 3 & 10 \\ 0 & 8 & -5 & -24 \\ 0 & 16 & -10 & -25 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 3 & 10 \\ 0 & 8 & -5 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{23}{2} \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow$ Sistema incompatible. No existe solución.

75 Opera y resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de Gauss.

a) $\left.\begin{aligned} x+3y&=-9-y\\ -y+2z&=-6-2x\\ 3(x+y)+3x&=3(-2+y)\end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x+y&=2(2-z)\\ y-z&=2x+3\\ x+2y+z&=1+2x\end{aligned}\right\}$

a) $\left.\begin{aligned} x+3y&=-9-y\\ -y+2z&=-6-2x\\ 3(x+y)+3x&=3(-2+y)\end{aligned}\right\}\to$

$\to \left.\begin{aligned} x+4y&=-9\\ 2x-y+2z&=-6\\ 6x&=-6\end{aligned}\right\}\to$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & -9\\ 2 & -1 & 2 & -6\\ 6 & 0 & 0 & -6\end{array}\right)$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 4 & 0 & -8\\ 0 & -1 & 2 & -4\end{array}\right)\to \left\{\begin{aligned} x&=-1\\ y&=-2\\ z&=-3\end{aligned}\right.$

b) $\left.\begin{aligned} x+y&=2(2-z)\\ y-z&=2x+3\\ x+2y+z&=1+2x\end{aligned}\right\}\to$

$\to \left.\begin{aligned} x+y+2z&=4\\ -2x+y-z&=3\\ -x+2y+z&=1\end{aligned}\right\}\to$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4\\ -2 & 1 & -1 & 3\\ -1 & 2 & 1 & 1\end{array}\right)\to$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4\\ 0 & 3 & 3 & 11\\ 0 & 3 & 3 & 5\end{array}\right)\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4\\ 0 & 3 & 3 & 11\\ 0 & 0 & 0 & 6\end{array}\right)$

Sistema incompatible. No existe solución.

76 Opera y resuelve por el método de Gauss estos sistemas de ecuaciones utilizando su forma matricial.

a) $\left.\begin{aligned} \frac{x+1}{2}-\frac{y-3}{4}&=12-z\\ \frac{y}{5}+\frac{z-6}{2}&=6-2x\\ \frac{x-y}{2}&=z-4\end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} 3(x+y)-4z&=-1\\ 2x-(y+z)&=-5\\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{5}{6}&=\frac{z+4}{5}\end{aligned}\right\}$

a) $\left.\begin{aligned} 2x-y+4z&=43\\ 20x+2y+5z&=90\\ x-y-2z&=-8\end{aligned}\right\}$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 43\\ 20 & 2 & 5 & 90\\ 1 & -1 & -2 & -8\end{array}\right)\to$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 43\\ 0 & 12 & -35 & -340\\ 0 & -1 & -8 & -59\end{array}\right)\to$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 43\\ 0 & 12 & -35 & -340\\ 0 & 0 & -131 & 1\,048\end{array}\right)\to \left\{\begin{aligned} x&=3\\ y&=-5\\ z&=8\end{aligned}\right.$

b) $\left.\begin{aligned} -3x-3y+4z&=1\\ 2x-y-z&=-5\\ 15x+10y-6z&=-1\end{aligned}\right\}\to$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & 4 & 1\\ 2 & -1 & -1 & -5\\ 15 & 10 & -6 & -1\end{array}\right)\to$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & 4 & 1\\ 0 & -9 & 5 & -13\\ 0 & -5 & 14 & 4\end{array}\right)\to$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & 4 & 1\\ 0 & -9 & 5 & -13\\ 0 & 0 & 101 & 101\end{array}\right)\to \left\{\begin{aligned} x&=-1\\ y&=2\\ z&=1\end{aligned}\right.$

77 Resuelve estos sistemas de tres ecuaciones con dos incógnitas utilizando el método de Gauss y comprueba las soluciones.

a) $\left.\begin{aligned} 2x+y&=-1\\ -x+y&=-4\\ -4x-y&=-1\end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x+y&=7\\ 2x-y&=2\\ 3x-2y&=0\end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} 2x+y&=0\\ -3x-2y&=1\\ x-3y&=7\end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} -4x+2y&=0\\ 6x-3y&=2\\ 3x-2y&=-2\end{aligned}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -4\\ -4 & -1 & -1\end{array}\right)\to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)\to$

$\to \left\{\begin{aligned} y&=-3\\ x&=1\end{aligned}\right.$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to$

Sistema incompatible. No existe solución.

c) $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{cases} y = -2 \\ x = 1 \end{cases}$

d) $\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 8 \end{array}\right)$

Sistema incompatible. No existe solución.

78 Escribe los sistemas en su forma matricial y resuelve utilizando el método de Gauss.

a) $\left.\begin{aligned} -2(x-4-1) &= y-1 \\ -4x+y &= -2x-3y+2 \\ 10-x-4y &= \frac{2x+3y-10}{3} \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} \frac{-x+y-1}{2} &= \frac{5-x}{3} \\ x+y-2 &= \frac{2(x+y)-3}{3} \\ x+y+5 &= 7+2(x-y) \end{aligned}\right\}$

a) $\left.\begin{aligned} 2x+y &= 11 \\ -2x+4y &= 2 \\ 5x+15y &= 40 \end{aligned}\right\} \to$

$\to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 11 \\ -2 & 4 & -2 \\ 5 & 15 & 40 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & 9 \\ 1 & 3 & 8 \end{array}\right)$

Sistema incompatible. No existe solución.

b) $\left.\begin{aligned} x-3y &= -13 \\ x+y &= 3 \\ -x+3y &= 2 \end{aligned}\right\} \to$

$\to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -13 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{array}\right) \to$

$\to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -13 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 11 \end{array}\right) \to$

$\to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 11 \\ 0 & 5 & 13 \\ 0 & 19 & -67 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 11 \\ 0 & 5 & 13 \\ 0 & 0 & 582 \end{array}\right) \to$

Sistema incompatible. No existe solución.

79 Halla el valor de los parámetros a y b del sistema de ecuaciones lineales sabiendo que $x = -2$, $y = 4$ y $z = 1$ es una solución.

$$\left.\begin{aligned} x-y+az &= 5 \\ 3x+2y+z &= 3 \\ x+y-5z &= b \end{aligned}\right\}$$

Sustituyendo los valores de x, y, z, especificados en el enunciado, obtenemos:
$a = 11 \qquad b = -3$

80 Discute y resuelve estos sistemas de ecuaciones lineales en función del parámetro a.

a) $\left.\begin{aligned} x+3y+2z &= 0 \\ 2x+4y+3z &= 2 \\ x+y+az &= 3 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} 2x-y-3z &= 0 \\ x+y+z &= 0 \\ x-2y+az &= 0 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} x-3y+9z &= 2 \\ -x+y+z &= 0 \\ 5x-7y+az &= 4 \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} x+y+az &= -1 \\ 2x-7y-4z &= 1 \\ x-5y &= 5z \end{aligned}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & a & 3 \end{array}\right) \to$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2-a & -3 \end{array}\right) \to$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1-a & -1 \end{array}\right)$

- Si $a \neq 1 \to$ Sistema compatible determinado

  Solución:

  $\left(\dfrac{7-6a}{2-2a}, \dfrac{-1+2a}{2-2a}, \dfrac{-1}{1-a}\right)$

- Si $a = 1 \to$ Sistema incompatible

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & a & 0 \end{array}\right) \to$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 1-a & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -4-a & 0 \end{array}\right)$$

- Si $a \neq -4 \rightarrow$ Sistema compatible determinado

  Solución:

  (0, 0, 0)

- Si $a = -4 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

  Solución:

  $\left(\frac{-8\lambda}{3}, \frac{5\lambda}{3}, \lambda\right), \lambda \in \mathbb{R}$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 9 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -7 & a & 4 \end{array}\right) \rightarrow$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 10 & 2 \\ 0 & -2 & 5+a & 4 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 5-a & -2 \end{array}\right)$$

- Si $a \neq 5 \rightarrow$ Sistema compatible determinado

  Solución:

  $\left(\frac{a-17}{5-a}, \frac{a-15}{5-a}, \frac{-2}{5-a}\right)$

- Si $a = 5 \rightarrow$ Sistema incompatible

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -7 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & -5 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & -6 & -5-a & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 7-a & 3 \end{array}\right)$$

- Si $a \neq 7 \rightarrow$ Sistema compatible determinado

  Solución:

  $\left(\frac{-5a-10}{21-3a}, \frac{-11-a}{21-3a}, \frac{3}{7-a}\right)$

- Si $a = 7 \rightarrow$ Sistema incompatible

81 ●○○ **INVENTA.** Añade una ecuación a estas dos ecuaciones

$$x - y + 2z = 0$$
$$-2x + y + 2z = -1$$

para que el sistema resultante sea un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas que sea:

a) Compatible determinado.

b) Compatible indeterminado.

c) Incompatible.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $x + y - 3z = 1$

b) $2x - 2y + 4z = 0$

c) $x - y + 2z = 2$

82 ●●● Discute y resuelve estos sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas.

a) $\left.\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ x + 2y + z &= 2 \\ ax + y - z &= 1 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x - 2y + 4z &= 6 \\ -x + y - z &= -2 \\ x - ay + z &= 3 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 3 \\ 2x + 2y - 3z &= 2 \\ x + y - z &= a \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} 3x - 4y - 2z &= 6 \\ -x + 3y + z &= -a \\ x + ay - z &= -2 \end{aligned}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ a & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[E_3 = -aE_1 + E_3]{E_2 = -E_1 + E_2}$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1-a & a-1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_3 = -(1-a)E_2 + E_3}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3a-3 & 2a-1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$\rightarrow 3a - 3 = 0 \rightarrow a = 1$

- Si $a = 1 \rightarrow$ Sistema incompatible

- Si $a \neq 1 \rightarrow$ Sistema compatible determinado

  Solución:
  $\left(\frac{1}{a-1}, \frac{2a-4}{3a-3}, \frac{2a-1}{3a-3}\right)$
  para cualquier valor de $a \neq 1$.

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 6 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -a & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[E_3 = -E_1 + E_3]{E_2 = E_1 + E_2}$

$\begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 2-a & -3 & -3 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{E_3 = -(2-a)E_2 + E_3}$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3-3a & 5-4a \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow 3a - 3 = 0 \rightarrow a = 1$

- Si $a = 1 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $a \neq 1 \rightarrow$ Sistema compatible determinado

  Solución:
  $\left(\frac{4-2a}{3-3a}, \frac{1}{1-a}, \frac{5-4a}{3-3a}\right)$
  para cualquier valor de $a \neq 1$.

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & a \end{array}\right) \xrightarrow{E_1 \leftrightarrow E_3}$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 2 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[E_3 = -3E_1 + E_3]{E_2 = -2E_1 + E_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & 0 & -1 & 2-2a \\ 0 & -5 & 4 & 3-3a \end{array}\right)$

Sistema compatible determinado para cualquier valor de a

Solución:
$\left(\frac{4a+1}{5}, \frac{11a-11}{5}, 2a-2\right)$
para cualquier valor de $a \neq 1$.

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & -2 & 6 \\ -1 & 3 & 1 & -a \\ 1 & a & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{E_1 \leftrightarrow E_3}$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 & -a \\ 3 & -4 & -2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[E_3 = -3E_1 + E_3]{E_2 = E_1 + E_2}$

$\begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & -2 \\ 0 & 3+a & 0 & -2-a \\ 0 & -4-3a & -2+3a & 12 \end{array}\right)$

- Si $a = -3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $a \neq -3 \rightarrow$ Sistema compatible determinado

  Solución:
  $\left(\frac{-2a^2+2a+22}{3+a}, \frac{-2-a}{3+a}, \frac{-3a^2+2a+28}{3+a}\right)$
  para cualquier valor de $a \neq 1$.

83 ●●● **RETO.** Discute y resuelve estos sistemas.

a) $\left.\begin{array}{r} x + ay + z = 3 \\ x - y + z = 9 \\ x - ay + 2z = 4 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x + ay + z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ ax + y + z = 0 \end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 9 \\ 1 & -a & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[E_3 = -E_1 + E_3]{E_2 = -E_1 + E_2}$

$\begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 3 \\ 0 & -1-a & 0 & 6 \\ 0 & -2a & 1 & 1 \end{array}\right)$

- Si $a = -1 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $a \neq -1 \rightarrow$ Sistema compatible determinado

  Solución:
  $\left(\frac{2+20a}{1+a}, \frac{-6}{1+a}, \frac{1-11a}{1+a}\right)$
  para cualquier valor de $a \neq -1$.

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[E_3 = -aE_1 + E_3]{E_2 = -E_1 + E_2}$

$\begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 3 \\ 0 & -1-a & 0 & -2 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & -3a \end{array}\right)$

- Si $a = \pm 1 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $a \neq \pm 1 \rightarrow$ Sistema compatible determinado

  Solución:
  $\left(\frac{-5-a}{a^2-1}, \frac{2}{a+1}, \frac{2+a}{a-1}\right)$
  para cualquier valor de $a \neq \pm 1$.

84 Discute y resuelve estos sistemas de dos incógnitas utilizando el método de Gauss.

a) $\left.\begin{array}{r} x - y = 1 \\ 2x + y = -2 \\ 3x + 3y = a \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 2 \\ x + y = 1 \\ ax - y = -1 \end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & a \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 6 & a-3 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow a - 3 = -8 \rightarrow a = -5$

- Si $a = -5 \rightarrow$ Sistema compatible determinado
  Solución:
  $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$
- Si $a \neq -5 \rightarrow$ Sistema Incompatible

b) $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & -1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ a & -1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1-a & -1-a \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow -1 - a = 0 \rightarrow a = -1$

- Si $a = -1 \rightarrow$ Sistema compatible determinado
  Solución: (1, 0)
- Si $a \neq -1 \rightarrow$ Sistema incompatible

85 Los valores $x = 3\lambda$, $y = \frac{\lambda}{2}$, $z = \lambda$ son solución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Escribe cinco soluciones distintas para el sistema.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Si $\lambda = -2 \rightarrow (-6, -1, -2)$

Si $\lambda = 1 \rightarrow \left(3, \frac{1}{2}, 1\right)$

Si $\lambda = 2 \rightarrow (6, 1, 2)$

Si $\lambda = -1 \rightarrow \left(-3, -\frac{1}{2}, -1\right)$

Si $\lambda = 0 \rightarrow (0, 0, 0)$

86 Los valores $(2\lambda, \lambda - 3, \lambda)$ son solución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Completa en tu cuaderno para que las siguientes ternas de valores sean solución del mismo sistema.

a) (4, ■, ■)
b) (■, ■, 3)
c) (■, 5, ■)
d) (■, ■, −2)
e) (1, ■, ■)
f) (■, 1, ■)

a) $x = 4 \rightarrow 2\lambda = 4 \rightarrow \lambda = 2 \rightarrow (4, -1, 2)$

b) $z = 3 \rightarrow \lambda = 3 \rightarrow (6, 0, 3)$

c) $y = 5 \rightarrow \lambda - 3 = 5 \rightarrow \lambda = 8 \rightarrow$
$\rightarrow (16, 5, 8)$

d) $z = -2 \rightarrow \lambda = -2 \rightarrow (-4, -5, -2)$

e) $x = 1 \rightarrow 2\lambda = 1 \rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \rightarrow$
$\rightarrow \left(1, -\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$

f) $y = 1 \rightarrow \lambda - 3 = 1 \rightarrow \lambda = 4 \rightarrow$
$\rightarrow (8, 1, 4)$

87 ¿Cuáles de los siguientes valores son solución de este sistema?

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y - z = 8 \\ x - z = 3 \\ x - y = 5 \end{array}\right\}$$

a) $(\lambda, \lambda + 2, \lambda + 6)$
b) $(\lambda + 3, \lambda - 2, \lambda)$
c) $(\lambda + 3, \lambda, \lambda - 3)$
d) $(\lambda + 5, \lambda, \lambda + 2)$
e) $(\lambda, \lambda - 5, \lambda - 3)$
f) $(\lambda, \lambda - 3, \lambda - 5)$

a) $\left.\begin{array}{r} 2\lambda - (\lambda + 2) - (\lambda + 6) = 8 \\ \lambda - (\lambda - 6) = 3 \\ \lambda - (\lambda + 2) = 5 \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{array}{r} -8 \neq 8 \\ 6 \neq 3 \\ -2 \neq 5 \end{array}\right\} \rightarrow$ No es solución.

b) $\left.\begin{array}{r} 2(\lambda + 3) - (\lambda - 2) - \lambda = 8 \\ (\lambda + 3) - \lambda = 3 \\ (\lambda + 3) - (\lambda - 2) = 5 \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 8 = 8 \\ 3 = 3 \\ 5 = 5 \end{array}\right\} \rightarrow$ Sí es solución.

c) $\left.\begin{aligned} 2(\lambda+3)-\lambda-(\lambda-3)&=8\\ (\lambda+3)-(\lambda-3)&=3\\ (\lambda+3)-\lambda&=5\end{aligned}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{aligned} 9&\neq 8\\ 6&\neq 3\\ 3&\neq 5\end{aligned}\right\} \rightarrow$ No es solución.

d) $\left.\begin{aligned} 2(\lambda+5)-\lambda-(\lambda+2)&=8\\ (\lambda+5)-(\lambda+2)&=3\\ (\lambda+5)-\lambda&=5\end{aligned}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{aligned} 8&=8\\ 3&=3\\ 5&=5\end{aligned}\right\} \rightarrow$ Sí es solución.

e) $\left.\begin{aligned} 2\lambda-(\lambda-5)-(\lambda-3)&=8\\ \lambda-(\lambda-3)&=3\\ \lambda-(\lambda-5)&=5\end{aligned}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{aligned} 8&=8\\ 3&=3\\ 5&=5\end{aligned}\right\} \rightarrow$ Sí es solución.

f) $\left.\begin{aligned} 2\lambda-(\lambda-3)-(\lambda-5)&=8\\ \lambda-(\lambda-5)&=3\\ \lambda-(\lambda-3)&=5\end{aligned}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{aligned} 8&=8\\ 5&\neq 3\\ 3&\neq 5\end{aligned}\right\} \rightarrow$ No es solución.

88 ●●○ **INVENTA.** Escribe dos sistemas de tres ecuaciones lineales cuya solución sea $(\lambda+1, 2\lambda-3, \lambda)$.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} \lambda&=x-1\\ \lambda&=\frac{y+3}{2}\\ \lambda&=z\end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x-1&=\frac{y+3}{2}\\ z&=\frac{y+3}{2}\\ z&=x-1\end{aligned}\right\}$$

Por tanto, dos sistemas podrían ser:

$$\left.\begin{aligned} 2x-y&=5\\ -y+2z&=3\\ -x+z&=-1\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 4x-2y&=10\\ -y+2z&=3\\ -x+z&=-1\end{aligned}\right\}$$

89 ●●○ Sabiendo que los valores $(3\lambda-1, 4\lambda+3, \lambda)$ son solución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, averigua qué soluciones son de la forma:

a) $(a, a, ■)$ b) $(■, a, a)$

a) $\left.\begin{aligned} a&=3\lambda-1\\ a&=4\lambda+3\end{aligned}\right\} \rightarrow 3\lambda-1=4\lambda+3 \rightarrow$

$\rightarrow \lambda=-4 \rightarrow (-13, -13, -4)$

b) $\left.\begin{aligned} a&=4\lambda+3\\ a&=\lambda\end{aligned}\right\} \rightarrow 4\lambda+3=\lambda \rightarrow$

$\rightarrow \lambda=-1 \rightarrow (-4, -1, -1)$

90 ●●● **INVESTIGA.** Si la terna $(\lambda, \lambda+1, \lambda-3)$ es solución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, averigua cuáles de las siguientes también lo son y razona por qué.

a) $(2\lambda, 2\lambda+2, 2\lambda-6)$
b) $(2\lambda, 2\lambda+1, 2\lambda-3)$
c) $(\lambda+1, \lambda+2, \lambda-2)$
d) $(\lambda-3, \lambda-2, \lambda-6)$
e) $(\lambda-1, \lambda, \lambda-4)$
f) $(0, \lambda, -3\lambda)$

Un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas del cual $(\lambda, \lambda+1, \lambda-3)$ es solución, es, por ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} 2x-y-z&=2\\ x-y&=-1\\ x-z&=3\end{aligned}\right\}$$

Sustituyendo cada terna dada en el sistema, se observa si es o no solución.

a) $\left.\begin{aligned} 2(2\lambda)-(2\lambda+2)-(2\lambda-6)&=2\\ 2\lambda-(2\lambda+2)&=-1\\ 2\lambda-(2\lambda-6)&=3\end{aligned}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{aligned} 4&\neq 2\\ -2&\neq -1\\ 6&\neq 3\end{aligned}\right\} \rightarrow$ No es solución.

b) $\left.\begin{aligned} 2(2\lambda)-(2\lambda+1)-(2\lambda-3)&=2\\ 2\lambda-(2\lambda+1)&=-1\\ 2\lambda-(2\lambda-3)&=3\end{aligned}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{aligned} 2&=2\\ -1&=-1\\ 3&=3\end{aligned}\right\} \rightarrow$ Sí es solución.

c) $\left.\begin{aligned} 2(\lambda+1)-(\lambda+2)-(\lambda-2)&=2\\ \lambda+1-(\lambda+2)&=-1\\ \lambda+1-(\lambda-2)&=3\end{aligned}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{aligned} 2&=2\\ -1&=-1\\ 3&=3\end{aligned}\right\} \rightarrow$ Sí es solución.

d) $\left.\begin{array}{r}2(\lambda-3)-(\lambda-2)-(\lambda-6)=2\\ \lambda-3-(\lambda-2)=-1\\ \lambda-3-(\lambda-6)=3\end{array}\right\}\rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{array}{r}2=2\\ -1=-1\\ 3=3\end{array}\right\}\rightarrow$ Sí es solución.

e) $\left.\begin{array}{r}2(\lambda-1)-\lambda-(\lambda-4)=2\\ \lambda-1-\lambda=-1\\ \lambda-1-(\lambda-4)=3\end{array}\right\}\rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{array}{r}2=2\\ -1=-1\\ 3=3\end{array}\right\}\rightarrow$ Sí es solución.

f) $\left.\begin{array}{r}-\lambda-(-3\lambda)=2\\ -\lambda=-1\\ -(-3\lambda)=3\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{r}2\lambda=2\\ -\lambda=-1\\ 3\lambda=3\end{array}\right\}\rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{array}{r}\lambda=1\\ \lambda=1\\ \lambda=1\end{array}\right\}\rightarrow$ No es solución, porque solo se cumple si $\lambda = 1$.

91 Completa en tu cuaderno las ternas de valores para que sean solución de este sistema.

$$\left.\begin{array}{r}x-y-3z=2\\ 2x+\dfrac{y}{2}-z=4\end{array}\right\}$$

a) (■, ■, λ) c) (■, λ, ■) e) (λ, ■, ■)
b) (■, ■, 3) d) (■, 3, ■) f) (3, ■, ■)

Se resuelve el sistema en función de μ y se calculan las soluciones:

$\left.\begin{array}{r}x-y-3z=2\\ 2x+\dfrac{y}{2}-z=4\end{array}\right\}\rightarrow$ Hay infinitas en función del parámetro λ:

$(\mu+2, -2\mu, \mu)$.

a) $\mu=\lambda \rightarrow (\lambda+2, -2\lambda, \lambda), \lambda\in\mathbb{R}$

b) $\mu=3\rightarrow(5, -6, 3)$

c) $-2\mu=\lambda\rightarrow\mu=-\dfrac{\lambda}{2}\rightarrow$

$\rightarrow\left(2-\dfrac{\lambda}{2}, \lambda, -\dfrac{\lambda}{2}\right), \lambda\in\mathbb{R}$

d) $-2\mu=3\rightarrow\mu=-\dfrac{3}{2}\rightarrow\left(\dfrac{1}{2}, 3, -\dfrac{3}{2}\right)$

e) $\mu+2=\lambda\rightarrow\mu=\lambda-2\rightarrow$
$\rightarrow(\lambda, 4-2\lambda, \lambda-2), \lambda\in\mathbb{R}$

f) $3=\mu+2\rightarrow\mu=1\rightarrow(3, -2, 1)$

92 Resuelve el sistema $\left.\begin{array}{r}x=y+z\\ x-3y+2z=13\end{array}\right\}$:

a) Para $x=1$.
b) Para $x=-4$.
c) Para cualquier valor de x.

a) $\left.\begin{array}{r}1=y+z\\ 1-3y+2z=13\end{array}\right\}\rightarrow$

$\rightarrow\left.\begin{array}{r}y+z=1\\ -3y+2z=12\end{array}\right\}\xrightarrow{z=1-y}$

$\rightarrow -3y+2(1-y)=12\rightarrow\left\{\begin{array}{l}y=-2\\ z=3\end{array}\right.\rightarrow$

$\rightarrow(1, -2, 3)$

b) $\left.\begin{array}{r}-4=y+z\\ -4-3y+2z=13\end{array}\right\}\rightarrow$

$\rightarrow\left.\begin{array}{r}y+z=-4\\ -3y+2z=17\end{array}\right\}\xrightarrow{z=-4-y}$

$\rightarrow -3y+2(-4-y)=17\rightarrow$

$\rightarrow\left\{\begin{array}{l}y=-5\\ z=1\end{array}\right.\rightarrow(-4, -5, 1)$

c) Hay infinitas soluciones en función de un parámetro λ:

$x=\lambda\rightarrow\left.\begin{array}{r}\lambda=y+z\\ \lambda-3y+2z=13\end{array}\right\}\rightarrow$

$\xrightarrow{y=\lambda-z}\lambda-3(\lambda-z)+2z=13\rightarrow$

$\rightarrow\left\{\begin{array}{l}y=\dfrac{3\lambda-13}{5}\\ z=\dfrac{13+2\lambda}{5}\end{array}\right.\rightarrow$

$\rightarrow\left(\lambda, \dfrac{3\lambda-13}{5}, \dfrac{13+2\lambda}{5}\right), \lambda\in\mathbb{R}$

93 Considera el sistema $\left.\begin{array}{r}x-2=z-y\\ 3x+y=1-2z\end{array}\right\}$.

a) Resuélvelo para $y=3$.
b) Resuélvelo para cualquier valor de y.
c) Halla y para $x=7$.
d) Halla z para $x=-2$.

a) $y=3\rightarrow\left.\begin{array}{r}x-2=z-3\\ 3x+3=1-2z\end{array}\right\}\rightarrow$

$\rightarrow\left.\begin{array}{r}x-z=-1\\ 3x+2z=-2\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Reducción}}$

$\rightarrow 5z=1\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=-\dfrac{4}{5}\\ z=\dfrac{1}{5}\end{array}\right.\rightarrow\left(-\dfrac{4}{5}, 3, \dfrac{1}{5}\right)$

b) Hay infinitas soluciones en función de un parámetro λ:

$$y = \lambda \rightarrow \left.\begin{array}{r} x - 2 = z - \lambda \\ 3x + \lambda = 1 - 2z \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x - z = 2 - \lambda \\ 3x + 2z = 1 - \lambda \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Reducción}}$$

$$\rightarrow 5x = 5 - 3\lambda \rightarrow \begin{cases} z = \dfrac{2\lambda - 5}{5} \\ x = \dfrac{5 - 3\lambda}{5} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\frac{5 - 3\lambda}{5}, \lambda, \frac{2\lambda - 5}{5}\right), \lambda \in \mathbb{R}$$

c) $x = 7 \rightarrow \dfrac{5 - 3\lambda}{5} = 7 \rightarrow \lambda = y = -10$

d) $x = -2 \rightarrow \dfrac{5 - 3\lambda}{5} = -2 \rightarrow \lambda = 5 \rightarrow$

$$\rightarrow z = \frac{2 \cdot 5 - 5}{5} = 1$$

94 Escribe un sistema de ecuaciones lineales de tres ecuaciones con tres incógnitas que cumplan las condiciones en cada caso.

a) Que sea compatible determinado con solución $x = 3, y = 2, z = 2$.

b) Que sea compatible indeterminado y $x = 3, y = 2, z = 2$, una solución del sistema.

c) Que sea compatible indeterminado y $x = 3, y = 2, z = 2$ y $x = 1, y = 1, z = 1$ sean soluciones.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 7 \\ x + 2y + 2z = 11 \\ x - z = 1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 7 \\ 2x + 2y + 2z = 14 \\ x - z = 1 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x - y - z = -1 \\ y - z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = -2 \end{array}\right\}$

95 **RETO.** Si a, b, c y d son números reales y se cumple que $a - 1 = b + 2 = c - 3 = d + 4$, ¿cuál es el mayor número de los cuatro?

$a - 1 = b + 2 = c - 3 = d + 4 = n$

$a = n + 1 \qquad c = n + 3$

$b = n - 2 \qquad d = n - 4$

Por tanto, el mayor es c.

Sistemas de ecuaciones no lineales

96 GEOGEBRA Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales.

a) $\left.\begin{array}{r} x^2 + 3x - y = -4 \\ x + y = 7 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x - y = 1 \\ xy = 2 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 2x - y = 0 \\ xy - 3y = 20 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 = 10 \\ -x + y = -2 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} x^2 - 3y^2 = 6 \\ x - y = -2 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} xy = -2 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{array}\right\}$

a) $y = 7 - x \rightarrow x^2 + 4x - 3 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 + \sqrt{7} \rightarrow y_1 = 9 - \sqrt{7} \\ x_2 = -2 - \sqrt{7} \rightarrow y_2 = 9 + \sqrt{7} \end{cases}$$

b) $y = x - 1 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \rightarrow y_1 = 1 \\ x_2 = -1 \rightarrow y_2 = -2 \end{cases}$$

c) $y = 2x \rightarrow 2x^2 - 6x = 20 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \rightarrow y_1 = 10 \\ x_2 = -2 \rightarrow y_2 = -4 \end{cases}$$

d) $y = x - 2 \rightarrow x^2 + (x - 2)^2 = 10 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \rightarrow y_1 = 1 \\ x_2 = -1 \rightarrow y_2 = -3 \end{cases}$$

e) $x = y - 2 \rightarrow (y - 2)^2 - 3y^2 = 6 \rightarrow$

$\rightarrow y^2 + 2y + 1 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow y = -1 \rightarrow x = -3$

f) $y = -\dfrac{2}{x} \rightarrow x^2 - \left(-\dfrac{2}{x}\right)^2 = 3 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - \dfrac{4}{x^2} = 3 \rightarrow$

$\rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow$ Es una ecuación bicuadrada.
Hacemos el cambio $t = x^2$.

$t^2 - 3t - 4 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} t_1 = 4 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \rightarrow y_1 = -1 \\ x_2 = -2 \rightarrow y_2 = 1 \end{cases} \\ t_2 = -1 \rightarrow \text{Imposible} \end{cases}$$

97 **RETO.** Resuelve este sistema.

$$\left.\begin{aligned} (a + b + c)^2 &= 36 \\ a^2 + b^2 &= 2ab \\ ab + bc &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} (a + b + c)^2 &= 36 \\ a^2 + b^2 - 2ab &= 0 \\ b(a + c) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$(a + b + c)^2 = 36 \rightarrow \left.\begin{aligned} a + b + c &= 6 \\ a + b + c &= -6 \end{aligned}\right\}$

$a^2 + b^2 - 2ab = 0 \rightarrow (a - b)^2 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow a = b$

$b(a + c) = 0 \rightarrow \left.\begin{aligned} &b = 0 \\ &a + c = 0 \rightarrow a = -c \end{aligned}\right\}$

- $b = 0 \rightarrow a = 0 \rightarrow \begin{cases} c_1 = 6 \\ c_2 = -6 \end{cases}$
- $a = -c \rightarrow b = -c \rightarrow$
$\rightarrow \begin{cases} -c + -c + c = 6 \rightarrow c_3 = -6 \\ -c + -c + c = -6 \rightarrow c_4 = 6 \end{cases}$

Las soluciones son: $(0, 0, 6)$, $(0, 0, -6)$, $(6, 6, -6)$ y $(-6, -6, 6)$.

98 Encuentra las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales.

a) $\left.\begin{aligned} x - 3y + 5 &= 0 \\ xy - 10 &= \frac{x}{2} \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} 2x + y &= 4 \\ x^2 + y^2 &= 13 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} x - \frac{x+1}{y} &= 11 \\ x + y &= 4 \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} (x - 2y)^2 &= 4 \\ -2x + y &= -16 \end{aligned}\right\}$

e) $\left.\begin{aligned} (y - x)^2 - xy &= 1 \\ x - (y - 1)^2 &= xy \end{aligned}\right\}$

f) $\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{9y} &= 2 \\ x - \frac{x}{y} &= -3 \end{aligned}\right\}$

a) $x = 3y - 5 \rightarrow$

$\rightarrow (3y - 5)y - 10 = \dfrac{3y - 5}{2} \rightarrow$

$\rightarrow 6y^2 - 13y - 15 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} y_1 = 3 \rightarrow x_1 = 4 \\ y_2 = -\dfrac{5}{6} \rightarrow x_2 = -\dfrac{15}{2} \end{cases}$$

b) $y = 4 - 2x \rightarrow$

$\rightarrow x^2 + (4 - 2x)^2 = 13 \rightarrow$

$\rightarrow 5x^2 - 16x + 3 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \rightarrow y_1 = -2 \\ x_2 = \dfrac{1}{5} \rightarrow y_2 = \dfrac{18}{5} \end{cases}$$

c) $x = 4 - y \rightarrow$

$\rightarrow 4 - y - \dfrac{(4 - y) + 1}{y} = 11 \rightarrow$

$\rightarrow y^2 + 6y + 5 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} y_1 = -5 \rightarrow x_1 = 9 \\ y_2 = -1 \rightarrow x_2 = 5 \end{cases}$$

d) $y = 2x - 16 \rightarrow$

$\rightarrow (x - 2(2x - 16))^2 = 4 \rightarrow$

$\rightarrow 3x^2 - 64x + 340 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 10 \rightarrow y_1 = 4 \\ x_2 = \dfrac{34}{3} \rightarrow y_2 = \dfrac{20}{3} \end{cases}$$

e) $\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 - 3xy &= 1 \\ x(1 - y) - (y - 1)^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow x = \dfrac{(y - 1)^2}{1 - y} \rightarrow x = 1 - y \rightarrow$

$\rightarrow (1 - y)^2 + y^2 - 3(1 - y)y = 1 \rightarrow$

$\rightarrow 5y^2 - 5y = 0 \rightarrow 5y(y - 1) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \rightarrow x_1 = 1 \\ y_2 = 1 \rightarrow x_2 = 0 \end{cases}$$

f) $\left.\begin{array}{r} x^2 = 18y \\ xy - x = -3y \end{array}\right\} \rightarrow y = \dfrac{x^2}{18} \rightarrow$

$\rightarrow x\left(\dfrac{x^2}{18}\right) - x = -3\left(\dfrac{x^2}{18}\right) \rightarrow$

$\rightarrow x^3 + 3x^2 - 18x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x(x^2 + 3x - 18) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow y_1 = 0 \rightarrow \text{No es válida.} \\ x_2 = 3 \rightarrow y_2 = \dfrac{1}{2} \\ x_3 = -6 \rightarrow y_3 = 2 \end{cases}$

99 **INVESTIGA.** Resuelve estos sistemas de ecuaciones no lineales.

●●●

a) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 2 \\ \dfrac{4}{x} - \dfrac{9}{y} = -1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} - \dfrac{3}{z} = 1 \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{y} + \dfrac{6}{z} = 2 \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{6}{y} - \dfrac{3}{z} = -1 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{l} 2y + 3x = 2xy \\ 4y - 9x = -xy \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 6y + 9x = 6xy \\ 4y - 9x = -xy \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{array}{l} 2y + 3x = 2xy \\ 4y - 9x = -xy \end{array}\right\} \rightarrow 10y = 5xy \rightarrow$

$\rightarrow (10 - 5x)y = 0 \rightarrow \begin{cases} y = 0 \rightarrow \text{No válida.} \\ x = 2 \rightarrow y = 3 \end{cases}$

La solución es $x = 2$, $y = 3$.

b) $\left.\begin{array}{r} yz + 2xz - 3xy = xyz \\ 2yz - 4xz + 6xy = 2xyz \\ 3yz - 6xz - 3xy = -xyz \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{array}{r} -8xz + 12xy = 0 \\ -12xz + 6xy = -4xyz \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow 16xz = 8xyz \rightarrow y = 2 \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{array}{r} -8xz + 24x = 0 \\ -12xz + 12x = -8xz \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow -12xz + 12x = -24x \rightarrow$

$\rightarrow (-12z + 36)x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow \text{No válida.} \\ z = 3 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{r} 6 + 6x - 6x = 6x \\ 12 - 12x + 12x = 12x \\ 18 - 18x - 6x = -6x \end{array}\right\} \rightarrow x = 1$

La solución es $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

100 Resuelve estos sistemas de inecuaciones.

●○○

a) $\left.\begin{array}{r} 2(x - 5) - 3(2 - 2x) < 0 \\ -x + 3(2 + x) > 3 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 4(2x - 5) + 2(8 - 2x) + 7 \geq 0 \\ 3(1 - 2x) - 3(2x - 1) + 1 \geq 0 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-2}{5} + \dfrac{1-x}{3} < 0 \\ \dfrac{2-3x}{6} - \dfrac{3-3x}{2} > 0 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} 8x < 16 \\ 2x > -3 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > -\dfrac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \left(-\dfrac{3}{2}, 2\right)$

b) $\left.\begin{array}{r} 4x + 3 > 0 \\ -12x + 7 \geq 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{3}{4} \\ x \leq \dfrac{7}{12} \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \left(-\dfrac{3}{4}, \dfrac{7}{12}\right]$

c) $\left.\begin{array}{r} -2x - 1 < 0 \\ 6x - 7 > 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{2} \\ x > \dfrac{7}{6} \end{cases} \rightarrow \left(\dfrac{7}{6}, +\infty\right)$

101 Obtén las soluciones de estos sistemas.

●○○

a) $\left.\begin{array}{r} x^2 - 3x - 4 > 0 \\ 2x - 3 < 0 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x^2 - 3x - 4 < 0 \\ 2x - 3 < 0 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x^2 - 3x - 4 > 0 \\ 2x - 3 > 0 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} x^2 - 3x - 4 < 0 \\ 2x - 3 > 0 \end{array}\right\}$

a) Resolvemos cada una de las inecuaciones.

$-x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta.

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow (-10)^2 - 3 \cdot (-10) - 4 > 0 \rightarrow (-\infty, -1)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \to 0^2 - 3 \cdot 0 - 4 < 0 \to (-1, 4)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \to 10^2 - 3 \cdot 10 - 4 > 0 \to$
$\to (4, +\infty)$ es solución de la inecuación.

Por lo que la solución es $(-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$.

$2x - 3 < 0 \to x < \dfrac{3}{2}$

Por tanto, la solución es $\left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right)$.

La solución del sistema es la intersección de las soluciones de cada una de las inecuaciones: $(-\infty, -1)$.

b) Repitiendo el proceso del apartado anterior, la solución es $\left(-1, \dfrac{3}{2}\right)$.

c) Repitiendo el proceso del apartado anterior, la solución es $(4, +\infty)$.

d) Repitiendo el proceso del apartado anterior, la solución es $\left(\dfrac{3}{2}, 4\right)$.

102 Resuelve estos sistemas de inecuaciones.

a) $\left.\begin{aligned} 10 - 3x - x^2 &< 0 \\ 3x + 5 &> -16 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} 10 - 3x - x^2 &< 0 \\ 2x - 3 &> 13 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} x^2 + 4x - 5 &> 0 \\ 3x - 2 &< 10 \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} x^2 + 4x - 5 &< 0 \\ 3x - 2 &> 10 \end{aligned}\right\}$

a) $x^2 + 3x - 10 > 0$

$x^2 + 3x - 10 = 0 \to \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -5 \end{cases} \to$

$\to (-\infty, -5) \cup (2, +\infty)$

$x > -7$

Solución: $(-7, -5) \cup (2, +\infty)$

b) $x^2 + 3x - 10 > 0$

$x^2 + 3x - 10 = 0 \to \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -5 \end{cases} \to$

$\to (-\infty, -5) \cup (2, +\infty)$

$x > 8$

Solución: $(8, +\infty)$

c) $x^2 + 4x - 5 = 0 \to \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -5 \end{cases} \to$

$\to (-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$

$x < 4$

Solución: $(-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$

d) $x^2 + 4x - 5 = 0 \to \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -5 \end{cases} \to$

$\to (-5, 1)$

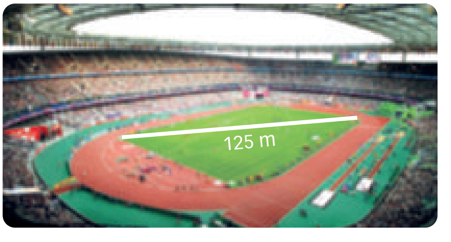
$x > 4$

No tiene solución.

3. Formula algebraicamente mediante sistemas situaciones de la vida real

INTERNET

103 **MATEMÁTICAS Y... FÚTBOL.** San Mamés es el estadio de fútbol del Athletic de Bilbao. El terreno de juego tiene una superficie de 7 140 m² y su diagonal mide 125 m. ¿Cuánto mide de largo y de ancho?



$\left.\begin{aligned} xy &= 7140 \\ x^2 + y^2 &= 125^2 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{y = \frac{7140}{x}}$

$\to x^2 + \dfrac{7140^2}{x^2} = 15625 \to$

$\to x^4 - 15625x^2 + 50979600 = 0 \to$

$\to t^2 - 15625t + 50979600 = 0$

$\to \begin{cases} t_1 = 10983{,}55 \to \begin{cases} x_1 = 104{,}8 \\ y_1 = 68{,}13 \end{cases} \\ t_2 = 4641{,}45 \to \begin{cases} x_2 = 68{,}13 \\ y_2 = 104{,}8 \end{cases} \end{cases}$

El estadio mide 104,8 m de largo y 68,13 m de ancho.

104 Se quiere cercar un terreno que tiene forma rectangular. Para dos lados consecutivos del terreno se necesitan 170 m de alambre. Si la diagonal del rectángulo mide 130 m, ¿cuáles son las dimensiones y el área del terreno?

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 170 \\ x^2 + y^2 = 130^2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 170 - x \\ x^2 + y^2 = 16900 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + 28900 + x^2 - 340x = 16900$$

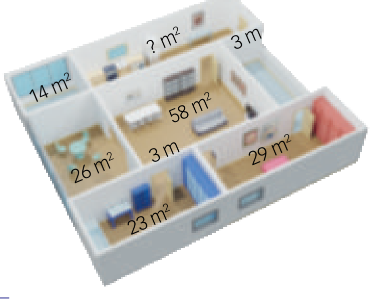
$$\rightarrow 2x^2 - 340x + 12000 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 120 \rightarrow y_1 = 50 \\ x_2 = 50 \rightarrow y_2 = 120 \end{cases}$$

$$A = 50 \cdot 120 = 6000$$

Las dimensiones del recinto son 120 m de largo y 50 m de ancho, y su área, 6000 m².

105 **RETO.** Calcula la superficie desconocida.



$$\sqrt{14} = 3{,}74$$
$$3{,}74x = 26 \rightarrow x = 6{,}95$$
$$6{,}95y = 58 \rightarrow y = 8{,}35$$
$$? = 3{,}74 \cdot (8{,}35 + 3) = 42{,}45 \text{ m}^2$$

106 En una bodega venden dos tipos de vino: crianza y reserva. Averigua cuál es el precio de cada uno si 3 botellas de reserva y 12 de crianza valen 69 €, y 6 botellas de crianza y 8 de reserva, 80 €.

Sean x e y los precios en euros de las botellas de crianza y de reserva, respectivamente. Entonces, el gasto que han realizado Juan y Belén queda reflejado en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 12x + 3y = 69 \\ 6x + 8y = 80 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x + y = 23 \\ 3x + 4y = 40 \end{array}\right\} \xrightarrow{y = 23 - 4x}$$

$$\rightarrow 3x + 4(23 - 4x) = 40 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 7 \end{cases}$$

Una botella de crianza cuesta 4 € y una de reserva, 7 €.

107 De 35 estudiantes de una clase han aprobado la asignatura de Matemáticas el 80% de las chicas y el 60% de los chicos. ¿Cuántas alumnas tiene la clase si el número de chicas que han aprobado es el mismo que el de chicos? ¿Cuántos chicos hay?

x: n.° de chicas
y: n.° de chicos

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 35 \\ 0{,}8x = 0{,}6y \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 6x + 6y = 210 \\ 8x - 6y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow 14x = 210 \rightarrow x = 15 \rightarrow y = 20$$

En la clase hay 15 chicas y 20 chicos.

108 Un camión sale de una ciudad a 80 km/h y media hora después parte en la misma dirección un coche a 100 km/h. ¿Cuánto tardará en alcanzarlo y qué distancia habrá recorrido hasta ese momento?

x: tiempo transcurrido
y: distancia recorrida

$$\left.\begin{array}{l} y = 80x \\ y = 100(x - 0{,}5) \end{array}\right\} \rightarrow 80x = 100(x - 0{,}5) \rightarrow$$

$$\rightarrow 20x = 50 \rightarrow x = 2{,}5 \rightarrow y = 200$$

Como ha salido media hora más tarde, tardará 2 horas en alcanzarlo y habrá recorrido 200 km.

109 El alquiler de una tienda de campaña cuesta 80 € al día. Inés está preparando una excursión con sus amigos y hace la siguiente reflexión: «Si fuéramos tres amigos más, tendríamos que pagar 6 € menos cada uno». ¿Cuántos amigos van de excursión?

N.º de amigos	Precio en € por persona	Total en €
x	y	80
$x + 3$	$y - 6$	80

El sistema que hay que resolver es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} xy = 80 \\ (x+3)(y-6) = 80 \end{array}\right\} \xrightarrow{y = \frac{80}{x}}$$

$$\to (x+3)\left(\frac{80}{x} - 6\right) = 80 \to$$

$$\to x^2 + 3x - 40 = 0 \to$$

$$\to \begin{cases} x_1 = 5 \to y_1 = 16 \\ x_2 = -8 \to \text{No válida.} \end{cases}$$

Por tanto, van de excursión 5 amigos y cada uno paga 16 €.

110 ●●○ **MATEMÁTICAS E... INDUSTRIA.** La estandarización de la leche consiste en agregar o eliminar grasa de la misma con el fin de conseguir una leche con una composición determinada. Se realiza para obtener una leche con mayor nivel de grasa orientada, por ejemplo, a la elaboración de quesos, o con menor contenido graso destinada a la fabricación de productos desnatados o con bajo contenido calórico. Para elaborar helados se suele utilizar leche con un contenido en grasa del 9 %. ¿Cuánta nata con el 40 % de grasa hay que mezclar con leche entera que contiene un 3,1 % de grasa para obtener 200 ℓ de leche para elaborar helados?

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 200 \\ 0{,}4x + 0{,}031y = 0{,}09 \cdot 200 \end{array}\right\} \to$$

$$\to \left.\begin{array}{r} x + y = 200 \\ 0{,}4x + 0{,}031y = 18 \end{array}\right\} \xrightarrow{y = 200 - x}$$

$$\to 0{,}4x + 6{,}2 - 0{,}031x = 18$$

$$\to 0{,}369x = 11{,}8 \to \begin{cases} x = 31{,}97 \\ y = 168{,}03 \end{cases}$$

Hay que mezclar 31,97 litros de nata y 168,03 litros de leche entera.

111 ●○○ **MATEMÁTICAS Y... AUTOMÓVILES.** El diseño de amortiguadores de automóviles requiere estudiar las vibraciones de sistemas de muelles y cuerpos pesados.

Por ejemplo, para estudiar las posiciones de equilibrio de un amortiguador que soporta dos cuerpos cuyas masas son $m_1 = m_2 = 2$ kg, los muelles tienen una constante de rigidez $k = 40$ N/m y la longitud entre ellos, cuando no actúa ninguna fuerza, es 1,5 m. Basta con aplicar las leyes de la mecánica de Newton y se obtiene este sistema, donde y_1 e y_2 son las posiciones de equilibrio buscadas.

$$\left.\begin{array}{r} 2y_1 - y_2 = -\dfrac{1}{2} \\ -y_1 + y_2 = 1 \end{array}\right\}$$

¿Cuáles son las posiciones de equilibrio en este amortiguador?

$$\left.\begin{array}{r} 2y_1 - y_2 = -\dfrac{1}{2} \\ -y_1 + y_2 = 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{y_2 = 1 + y_1}$$

$$\to 4y_1 - 2 - 2y_1 = -1 \to$$

$$\to 2y_1 = 1 \to \begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{2} \\ y_2 = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Las posiciones de equilibrio son $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2}$.

Esta actividad puede utilizarse para trabajar el ODS 9, industria, innovación e infraestructura.

112 ●●○ Cuando en el año 1800 Beethoven escribe su primera sinfonía, su edad es diez veces mayor que la del jovencito Schubert. Pasa el tiempo y es Schubert el que compone su célebre

Sinfonía inacabada. Entonces entre ambos músicos suman 77 años. Cinco años después muere Beethoven y en ese momento Schubert tiene los mismos años que tenía Beethoven cuando compuso su primera sinfonía.

Calcula el año de nacimiento de estos dos fantásticos compositores.

	Beethoven	Schubert	Ecuación
Edad en 1800	$10x$	x	
Edad en 1800 + + y años	$10x + y$	$x + y$	$10x + y + x + y = 77$
Edad en 1800 + + y + + 5 años	$10x + y + 5$	$x + y + 5$	$x + y + 5 = 10x$

$$\left.\begin{array}{r} 10x + y + x + y = 77 \\ x + y + 5 = 10x \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 11x + 2y = 77 \\ 9x - y = 5 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 11x + 2y = 77 \\ 18x - 2y = 10 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 22 \end{array}\right.$$

Beethoven murió en el año $1800 + 22 + 5 = 1827$ a la edad de $30 + 3 + 22 + 5 = 57$ años. Por tanto, su año de nacimiento fue 1770.

Schubert tenía 3 años en 1800. Por tanto, su año de nacimiento fue 1797.

113 Un cuaderno grande, uno mediano y uno pequeño cuestan en total 3,90 €. Tres grandes, cuatro medianos y uno pequeño cuestan 11,10 €, y seis pequeños y tres medianos cuestan lo mismo que cinco grandes. Calcula el precio de cada tipo de cuaderno.

Sean x, y, z los precios de un cuaderno grande, uno mediano y uno pequeño.

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 3{,}9 \\ 3x + 4y + z = 11{,}1 \\ 6z + 3y = 5x \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 3{,}9 \\ 3 & 4 & 1 & 11{,}1 \\ -5 & 3 & 6 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 3{,}9 \\ 0 & 1 & -2 & -0{,}6 \\ 0 & 8 & 11 & 19{,}5 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 3{,}9 \\ 0 & 1 & -2 & -0{,}6 \\ 0 & 0 & 27 & 24{,}3 \end{array}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1{,}8 \\ y = 1{,}2 \\ z = 0{,}9 \end{array}\right.$$

Por tanto, el cuaderno grande cuesta 1,80 €; el cuaderno mediano, 1,20 €; y el cuaderno pequeño, 0,90 €.

114 Con 11 monedas de 1; 0,50 y 0,20 € se tienen 4,90 €. Di cuántas monedas hay de cada tipo si la suma del doble de las de 1 € más las de 0,50 € coincide con las de 0,20 €.

	1 €	0,5 €	0,2 €	Total
N.º de monedas	x	y	z	11
Aportación (€)	x	$0{,}5y$	$0{,}2z$	4,9

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 11 \\ 2x + y = z \\ x + 0{,}5y + 0{,}2z = 4{,}9 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0{,}5 & 0{,}2 & 4{,}9 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & -1 & -3 & -22 \\ 0 & 0 & 1{,}4 & 9{,}8 \end{array}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 7 \end{array}\right.$$

Hay tres monedas de 1 €, una moneda de 0,50 € y siete monedas de 0,20 €.

115 Una cartera contiene billetes de 5, 10 y 20 €. En total son 16 billetes. El triple de los billetes de más valor es igual al total del resto y la mitad de los billetes de más valor es igual a la diferencia de los de menor valor y los de valor intermedio. Calcula cuántos billetes de cada tipo hay.

Sean x, y, z el número de billetes de 5, 10 y 20 €, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{l} 3z = x + y \\ \dfrac{z}{2} = x - y \\ x + y + z = 16 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 16 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 16 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 7 \quad y = 5 \quad z = 4$$

Hay siete billetes de 5 €, 5 billetes de 10 € y cuatro billetes de 20 €.

116 ●●○ En un bazar todos los productos valen 1 €, 2 € o 5 €. Hoy han vendido 179 productos por 638 €. Si han vendido el triple de productos de 5 € que de 1 €, ¿cuántos productos han vendido de cada importe?

Sean x, y, z el número de productos que cuestan 1 €, 2 € y 5 €, respectivamente.

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 179 \\ x + 2y + 5z &= 638 \\ z &= 3x \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 179 \\ 1 & 2 & 5 & 638 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[E_3 = -3E_1 + E_3]{E_2 = -E_1 + E_2}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 179 \\ 0 & 1 & 4 & 459 \\ 0 & -3 & -4 & -537 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{E_3 = 3E_2 + E_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 179 \\ 0 & 1 & 4 & 459 \\ 0 & 0 & 8 & 840 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 35 \qquad y = 39 \qquad z = 105$$

Se han vendido 35 productos de 1 €, 39 de 2 € y 105 de 5 €.

117 ●●○ En un camión se cargan tres bidones. El doble del peso del primero menos el triple del segundo es 10 kg. El quíntuplo el peso del segundo menos un tercio del peso del tercero es 50 kg. Halla el peso de cada bidón si entre los tres pesan 275 kg.

Sean x, y, z lo que pesa el primer, segundo y tercer bidón, respectivamente.

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 275 \\ 2x - 3y &= 10 \\ 5y - \frac{1}{3}z &= 50 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x + y + z &= 275 \\ 2x - 3y &= 10 \\ 15y - z &= 150 \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 275 \\ 2 & -3 & 0 & 10 \\ 0 & 15 & -1 & 150 \end{array}\right) \xrightarrow{E_2 = -2E_1 + E_2}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 275 \\ 0 & -5 & -2 & -540 \\ 0 & 15 & -1 & 150 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3 = 3E_2 + E_3}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 275 \\ 0 & -5 & -2 & -540 \\ 0 & 0 & -7 & -1470 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow x = 41 \qquad y = 24 \qquad z = 210$$

El primer bidón pesa 41 kg; el segundo, 24 kg, y el tercero, 210 kg.

118 ●●○ **MATEMÁTICAS Y... BALONCESTO.** En los cuartos de final de baloncesto femenino de la Copa de la Reina de 2020 se enfrentaron el Ciudad de La Laguna y el Valencia. Ganó el Valencia por 69 a 54. El Valencia encestó el doble de canastas de dos puntos que de tiros libres (1 punto), y el número de triples (3 puntos) que marcó superó en siete al número de tiros libres. ¿Cuántas canastas de cada tipo metieron?

Sean x, el número de canastas de dos puntos, y, el número de tiros libres, y z, el número de triples.

$$\left.\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 69 \\ x &= 2y \\ z &= 7 + y \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow 4y + y + 21 + 3y = 69 \rightarrow$$

$$\rightarrow 8y = 48 \rightarrow y = 6 \qquad z = 13 \qquad x = 12$$

Se metieron 12 canastas de dos puntos, 6 tiros libres y 13 triples.

Esta actividad puede utilizarse para trabajar el ODS 5, igualdad de género.

119 ●●○ En una tienda tienen tres tipos de café:

- El tipo A, que cuesta a 9,80 €/kg.
- El tipo B, a 8,75 €/kg.
- Y el tipo C, a 9,50 €/kg.

Mezclando distintas cantidades de cada tipo hacen 105 kg con un coste de 9,40 €/kg. Además, la cantidad de tipo C que se añade a la mezcla es el doble que las de tipo A y B juntas. ¿Cuál es la mezcla?

Sean x, y, z las cantidades de café de los tipos A, B y C, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{ll} x+y+z & = 105 \\ 9{,}8x+8{,}75y+9{,}5z & = 9{,}4\cdot 105 \\ z & = 2(x+y) \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{ll} x+y+z & = 105 \\ 9{,}8x+8{,}75y+9{,}5z & = 987 \\ 2x+2y-z & = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 105 \\ 9{,}8 & 8{,}75 & 9{,}5 & 987 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[E_3 = -2E_1 + E_3]{E_2 = -9{,}8E_1 + E_2}$$

$$\begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 105 \\ 0 & -1{,}05 & -0{,}3 & -42 \\ 0 & 0 & -3 & -210 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 15 \qquad y = 20 \qquad z = 70$$

La mezcla está compuesta por 15 kg de café de tipo A, 20 kg de tipo B y 70 kg de tipo C.

120 ●●○ Una empresa necesita euros, dólares y libras esterlinas. Entre las tres monedas debe tener 2 496 €.

> **Cotizaciones de moneda extranjera**
>
> 1 libra esterlina 1,20 €
>
> 1 dólar 0,80 €

Además, el dinero disponible en euros tiene que ser el doble que el de dólares, y las libras deben ser la décima parte del dinero en euros.

Calcula el dinero en cada moneda.

Sean x, y, z el número de euros, dólares y libras esterlinas, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{ll} x+0{,}8y+1{,}2z & = 2\,496 \\ x & = 2\cdot 0{,}8y \\ 1{,}2z & = \dfrac{x}{10} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{ll} x+0{,}8y+1{,}2z & = 2\,496 \\ x & = 1{,}6y \\ x & = 12z \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow 12z + 0{,}8\frac{12}{1{,}6}z + 1{,}2z = 2\,496 \rightarrow$$

$$\rightarrow 19{,}2z = 2\,496 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 1560 \qquad y = 975 \qquad z = 130$$

Hay 1 560 euros, 975 dólares y 130 libras esterlinas.

121 ●●○ Averigua las dimensiones que tiene un pliego rectangular de papel, sabiendo que si los márgenes laterales son de 1 cm y los verticales de 2,5 cm, el área que ocupa el texto es 360 m², y que si los márgenes laterales son de 2 cm y los verticales son de 1,25 cm, el área es la misma.

Sean x e y las dimensiones del pliego:

$$\left.\begin{array}{r} (x-2)(y-5) = 360 \\ (x-4)(y-2{,}5) = 360 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{350+2y}{y-5} \\ x = \dfrac{350+4y}{y-2{,}5} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow 2y^2 - 15y - 875 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow y = \frac{-(-15) \pm \sqrt{(-15)^2 - 4\cdot 2\cdot(-875)}}{2\cdot 2} =$$

$$= \frac{15 \pm 85}{4} \rightarrow \begin{cases} y_1 = -\dfrac{35}{2} \\ y_2 = 25 \end{cases}$$

$$\text{Si } y_1 = -\frac{35}{2} \rightarrow x_1 = \frac{350 + 2\dfrac{-35}{2}}{\dfrac{-35}{2} - 5} = -14$$

$$\text{Si } y_2 = 25 \rightarrow x_2 = \frac{350 + 2\cdot 25}{25 - 5} = 20$$

Las dimensiones del pliego son 20 y 25 cm, respectivamente.

122 ●●○ Jesús y Beatriz quieren saber cuánto cuesta un bote de refresco, pero no recuerdan exactamente lo que pagaron. Jesús compró 12 botes y sabe que pagó con un billete de 10 € y que le devolvieron una moneda de 1 € y algo más de dinero. Beatriz compró 10 botes y recuerda que pagó la cantidad exacta con un billete de 5 €, una moneda de 2 € y alguna moneda más. Con estos datos, ¿qué podrías decir del precio del bote de refresco?

Llamamos x al precio del bote de refresco.

$$\left.\begin{array}{l} 12x < 9 \\ 10x > 7 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x < 0{,}75 \\ x > 0{,}7 \end{cases}$$

El precio del bote de refresco puede ser 71, 72, 73 o 74 céntimos.

123 **MATEMÁTICAS Y… ECONOMÍA.** Habitualmente, los cajeros automáticos suelen tener 3 compartimentos con billetes de 50 €, de 20 € y de 10 €, de modo que cada compartimento contiene solo un tipo de billetes. Un cajero tiene una capacidad máxima de 5 000 billetes y se procura que contenga:

- 1 billete de 20 € por cada 5 billetes de 50 €.
- 1 billete de 10 € por cada 10 billetes de 50 €.

Si se ha cargado un cajero con 198 000 €, averigua cuántos billetes de cada clase hay.

Sean x, y, z el número de billetes de 50 €, de 20 € y de 10 €, respectivamente.

$$\left.\begin{aligned} 50x + 20y + 10z &= 198\,000 \\ x &= 5y \\ x &= 10z \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow 50x + 4x + x = 198\,000 \rightarrow$

$\rightarrow 55x = 198\,000$

$\rightarrow x = 3\,600 \qquad y = 720 \qquad z = 360$

Hay 3 600 billetes de 50 €, 720 de 20 € y 360 de 10 €.

124 El administrador de una comunidad de vecinos está tratando de descubrir cuánto cobran por hora un electricista, un fontanero y un albañil. Sabe que:

- En el 4.º A el electricista estuvo 1 hora y el albañil 2 horas y tuvieron que pagar 78 € de mano de obra.
- En el 3.º D pagaron 85 € por las dos horas que estuvo el fontanero y la hora que estuvo el albañil.
- En el 2.º B estuvieron 1 hora el fontanero, 1 hora el electricista y 3 horas el albañil y cobraron 133 €.

¿Cuánto cobra por hora cada profesional?

	Electricista	Fontanero	Albañil	Total en €
€/h	x	y	z	
horas 4.º A	1	0	2	78
horas 3.º D	0	2	1	85
horas 2.º B	1	1	3	133

Sean x, y, z la cantidad de dinero que cobra por hora de trabajo el electricista, el fontanero y el albañil, respectivamente.

$$\left.\begin{aligned} x + 2z &= 78 \\ 2y + z &= 85 \\ x + y + 3z &= 133 \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 78 \\ 0 & 2 & 1 & 85 \\ 1 & 1 & 3 & 133 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3 = -E_1 + E_3}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 78 \\ 0 & 2 & 1 & 85 \\ 0 & 1 & 1 & 55 \end{array}\right) \xrightarrow{E_2 = -2E_1 + E_2}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 78 \\ 0 & 0 & -1 & -25 \\ 0 & 1 & 1 & 55 \end{array}\right) \rightarrow$$

$\rightarrow x = 28 \qquad y = 30 \qquad z = 25$

El electricista cobra 28 €/h, el fontanero, 30 €/h, y el albañil, 25 €/h.

125 **RETO.** Averigua el número capicúa de cinco cifras.

- La suma de sus cifras es 9.
- La cifra de las centenas es igual a la suma de la de las unidades y la de las decenas.
- Si se intercambian las cifras de las unidades y de las decenas, el número resultante es 9 unidades menor que el original.

Sean x la cifra de las decenas de millar y de las unidades, y la cifra de las unidades de millar y de las decenas, z la cifra de las centenas.

$$\left.\begin{array}{r} 2x+2y+z=9 \\ z=x+y \\ 10y+x-(10x+y)=9 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+2y+z=9 \\ x+y-z=0 \\ -x+y=1 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 2 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_1 \leftrightarrow E_2}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 9 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \xrightarrow{E_2 = -2E_1 + E_2} \\ \xrightarrow{E_3 = E_1 + E_3} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$\rightarrow x=1 \quad y=2 \quad z=3$

El número es 12321.

126 **MATEMÁTICAS Y… FÚTBOL.**

●●○ A un partido entre el Valencia y el Atalanta asistieron 55000 espectadores. Las entradas se repartieron de la siguiente forma:

- Del Valencia hubo 6000 socios más que del Atalanta.
- Por cada 9 socios de alguno de los dos equipos había 2 espectadores que no eran socios de ninguno.

Averigua cuántas entradas se pusieron a la venta para espectadores que no eran socios de ningún equipo.

Sean x, y, z el número de socios del Valencia, el número de socios del Atalanta y el número de personas que no son socios, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=55\,000 \\ x=y+6\,000 \\ 9z=2(x+y) \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=55\,000 \\ x-y=6\,000 \\ 2x+2y-9z=0 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 55\,000 \\ 1 & -1 & 0 & 6\,000 \\ 2 & 2 & -9 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \xrightarrow{E_2 = -E_1 + E_2} \\ \xrightarrow{E_3 = -2E_1 + E_3} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 55\,000 \\ 0 & -2 & -1 & -49\,000 \\ 0 & 0 & -11 & -11\,000 \end{array}\right)$$

$\rightarrow x = 25\,500 \quad y = 19\,500 \quad z = 10\,000$

Se pusieron a la venta 10000 entradas para los espectadores que no eran socios de ningún equipo.

127 Un examen consiste en un test de 60 preguntas. Cada pregunta acertada suma 3 puntos, por cada fallo se restan 2 puntos y por cada pregunta no contestada se quita 1 punto.

●●○

a) Si he sacado 68 puntos y he fallado el doble de preguntas que he dejado sin contestar, ¿cuántas preguntas he acertado?

b) Si no me dejo ninguna pregunta sin contestar, ¿puedo sacar una puntuación de 80 puntos?

c) Si he contestado a todas las preguntas, ¿hasta cuántos fallos puedo tener para sacar como mínimo 30 puntos?

Sean x, y, z las preguntas acertadas, falladas y no contestadas, respectivamente.

a) $$\left.\begin{array}{r} x+y+z=60 \\ 3x-2y-z=68 \\ y=2z \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=60 \\ 3x-2y-z=68 \\ y-2z=0 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 3 & -2 & -1 & 68 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_2 = -3E_1 + E_2}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & -5 & -4 & -112 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_2 = 5E_3 + E_2}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & 0 & -14 & -112 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$\rightarrow x=36 \quad y=16 \quad z=8$

He acertado 36 preguntas.

b) $$\left.\begin{array}{r} x+y=60 \\ 3x-2y=80 \end{array}\right\} \xrightarrow{y=60-x}$$

$\rightarrow 3x-2(60-x)=80 \rightarrow y=20$

Puedo sacar 80 puntos si acierto 40 preguntas y fallo 20.

c) $\left.\begin{array}{r} x + y = 60 \\ 3x - 2y \geq 30 \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 60 - y}$

$\rightarrow 3(60 - y) - 2y \geq 30 \rightarrow$

$\rightarrow 180 - 5y \geq 30 \rightarrow y \leq 30$

Puedo tener hasta 30 fallos.

128 **MATEMÁTICAS Y… BIOLOGÍA.** Las bacterias se reproducen a un ritmo exponencial. Para un experimento se tienen tres tipos de bacterias en una misma placa de Petri. Las del primer tipo se duplican cada 2 horas, las del segundo tipo cada 4 horas y las del tercero cada hora. Se sabe que al comienzo del experimento se tenían 9 bacterias. Tras 4 horas se tenían 38 bacterias, y tras 8 horas, 324. ¿Cuántas bacterias de cada tipo había al comienzo?

Sean x, y, z el número de bacterias del primer, segundo y tercer tipo, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 9 \\ 4x + 2y + 16z = 38 \\ 16x + 4y + 256z = 324 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 4 & 2 & 16 & 38 \\ 16 & 4 & 256 & 324 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & -2 & 12 & 2 \\ 0 & -4 & 192 & 172 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & -2 & 12 & 2 \\ 0 & 0 & 168 & 168 \end{array}\right) \rightarrow$$

$\rightarrow x = 3 \quad y = 5 \quad z = 1$

Al comienzo había 3 bacterias del primer tipo, 5 del segundo tipo y 1 del tercer tipo.

INTERNET

129 **MATEMÁTICAS E… HISTORIA.** En el Reino Unido, antes de 1971, la moneda oficial era la libra esterlina, que se dividía en 20 chelines, y este a su vez en 12 peniques. Es decir, una libra equivalía a 240 peniques. En esos momentos la moneda más pequeña era el penique.

Este sistema creaba situaciones muy pintorescas, por ejemplo, los precios tenían dos comas en lugar de una, para indicar libras, chelines y peniques.

Entonces, un vaso de limonada, tres bocadillos y cinco bizcochos en una cafetería valían 1 chelín y 2 peniques. Sabiendo que los precios de cada cosa eran diferentes, lo más caro era la limonada y lo más barato los bizcochos, ¿cuánto valían un vaso de limonada, un bocadillo y un bizcocho?

Sean x, y, z los precios de una limonada, un bocadillo y un bizcocho, respectivamente.

$x \neq y \qquad x \neq z \qquad y \neq z$

$x > y > z$

$x + 3y + 5z = 14$

Como la moneda más pequeña es el penique, podemos deducir que el precio en peniques se expresa en unidades enteras. La única solución posible es $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$.

130 **MATEMÁTICAS Y… GANADERÍA.** Una vaca, por término medio, produce 20 ℓ de leche diarios y una oveja, aproximadamente, 2,2 ℓ.

Se quieren comprar vacas y ovejas para montar una granja con 70 animales como máximo. La leche se almacenará diariamente en un contenedor de 500 ℓ que se vaciará al final del día en el camión cisterna que la transporta a la fábrica. ¿Cuántas vacas y ovejas puede haber?

Sean x e y el número de vacas y el número de ovejas, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{r} x + y \leq 70 \\ 20x + 2{,}2y \leq 500 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 70 \\ 20 & 2{,}2 & 500 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 70 \\ 0 & -17{,}8 & -900 \end{array}\right) \rightarrow$$

$\rightarrow y \leq 50 \rightarrow x \leq 20$

Si sustituimos en la segunda ecuación, comprobamos que no puede ser $x = 20$ e $y = 50$. Como máximo hay 19 vacas y 50 ovejas o 20 vacas y 45 ovejas.

FAKE NEWS

¿Cuántas máquinas necesitamos?

Uno de los principales problemas al que se han enfrentado los hospitales durante la epidemia ha sido el número de pruebas que se podían analizar diariamente. El análisis se lleva a cabo de manera automática por unos robots de tres tipos que poseen los hospitales.

Hospital	Robots análisis clínico	N.º de pruebas analizadas
La Paz	1 tipo A30 1 tipo B40	120 pruebas cada 4 h
Ramón y Cajal	1 tipo A30 1 tipo C50	120 pruebas cada 3 h
Severo Ochoa	1 tipo B40 1 tipo C50	100 pruebas cada 2 h

Sanidad afirma que dotando de un nuevo robot a cada hospital se podrá duplicar el número de pruebas diarias.

Y tú, ¿qué opinas?

Calculamos cuántas pruebas diarias se hacen.

$120 : 4 = 30 \rightarrow 30 \cdot 24 = 720$

$120 : 3 = 40 \rightarrow 40 \cdot 24 = 960$

$100 : 2 = 50 \rightarrow 50 \cdot 24 = 1\,200$

$1\,200 - 960 + 720 = 2\,880$

Actualmente se hacen 2880 pruebas diarias.

Para saber cuántas hace cada máquina, restamos las que se hacen en el Ramón y Cajal menos las que se hacen en La Paz:

$960 - 720 = 240$

La máquina C50 hace más pruebas que la B40.

Restamos las que se hacen en el Severo Ochoa menos las que se hacen en el Ramón y Cajal:

$1\,200 - 960 = 240$

La máquina B40 hace más pruebas que la A30.

Por tanto, la máquina A30 hace 240 pruebas diarias, la B40 hace 480 y la C50 hace 720.

Como mucho se harían $720 \cdot 3 = 2\,160$ pruebas diarias más, luego no se llegaría a duplicar el número de pruebas que se hace actualmente.

PROBLEMAS APARENTEMENTE DISTINTOS

131 Resuelve este sistema.

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 3{,}4 \\ 3x + y &= 3 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 3{,}4 \\ 3x + y &= 3 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= 0{,}8 \\ y &= 0{,}6 \end{aligned}\right.$$

132 Una fábrica utiliza dos aleaciones distintas de zinc. Si las dos se utilizan en una proporción 2:3, se obtiene un 68 % de zinc. Si se utiliza en una proporción 3:1, se obtiene un 75 % de zinc. ¿Qué porcentaje de zinc tiene cada aleación?

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \cdot 0{,}68 \\ 3x + y &= 4 \cdot 0{,}75 \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 3{,}4 \\ 3x + y &= 3 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= 0{,}8 \\ y &= 0{,}6 \end{aligned}\right.$$

133 Calcula las soluciones de este sistema.

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 3{,}2 \\ 2x + y + 2z &= 5 \\ x + 2y + 2z &= 6 \end{aligned}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3{,}2 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{E_2 = -2E_1 + E_2} \\ \xrightarrow{E_3 = -E_1 + E_3} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3{,}2 \\ 0 & -1 & 0 & -1{,}4 \\ 0 & 1 & 1 & 2{,}8 \end{array}\right) \rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= 0{,}4 \\ y &= 1{,}4 \\ z &= 1{,}4 \end{aligned}\right.$$

134 Un kilo de manzanas, uno de peras y uno de limas cuestan 3,20 €. Dos kilos de manzanas, uno de peras y dos de limas, 5 €. Y uno de manzanas, dos de peras y dos de limas, 6 €.

¿Cuánto cuesta el kilo de cada fruta?

Sean x, y, z el precio del kilo de manzanas, de peras y de limas, respectivamente.

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 3{,}2 \\ 2x + y + 2z &= 5 \\ x + 2y + 2z &= 6 \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3{,}2 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{E_2 = -2E_1 + E_2} \\ \xrightarrow{E_3 = -E_1 + E_3} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3{,}2 \\ 0 & -1 & 0 & -1{,}4 \\ 0 & 1 & 1 & 2{,}8 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x = 0{,}4 \\ y = 1{,}4 \\ z = 1{,}4 \end{cases}$$

El kilo de manzanas cuesta 0,40 €, el de peras, 1,40 €, y el de limas, 1,40 €.

135 Resuelve el siguiente sistema de dos ecuaciones no lineales.

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + 10^2 = y^2 \\ 15^2 + (25 - x)^2 = y^2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + 10^2 = y^2 \\ 15^2 + (25 - x)^2 = y^2 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + 10^2 = 15^2 + (25 - x)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 50x = 750 \rightarrow \begin{cases} x = 15 \quad y = 5\sqrt{13} \\ x = 15 \quad y = -5\sqrt{13} \end{cases}$$

136 Dos eucaliptos de 10 m y 15 m de altura están separados por un río de 25 m de ancho. En la copa de ambos árboles hay dos pájaros que se lanzan en el mismo instante a pescar un pez en el río, ambos a la misma velocidad. Si llegan a la vez, ¿qué distancia ha recorrido cada pájaro?

La distancia que recorren ambos pájaros es la misma, puesto que llevan la misma velocidad y tardan el mismo tiempo.

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + 10^2 = y^2 \\ 15^2 + (25 - x)^2 = y^2 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + 10^2 = 15^2 + (25 - x)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 50x = 750 \rightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 5\sqrt{13} \end{cases}$$

La distancia recorrida por ambos pájaros es $5\sqrt{13}$ m.

¿PARA QUÉ SIRVE…?

1 Explica por qué la demanda y la oferta no suben o bajan al mismo tiempo.

Aunque ambos dependen del precio del producto, cada uno de ellos depende a su vez de otros factores que no son comunes. La demanda depende, por ejemplo, de los gustos del consumidor; y la oferta, de los precios de producción. Cuando hay mucha demanda, disminuye la oferta porque se revaloriza el producto. Cuando hay muy poca demanda, aumenta la oferta porque hay más disponibilidad.

2 El día del espectador las entradas cuestan 4 €. Si las ecuaciones de oferta y demanda se mantienen, ¿habrá un exceso de demanda o de oferta?

Demanda:

$Q_x + 100 \cdot 4 = 1\,500 \rightarrow Q_x = 1\,100$

Oferta: $-3Q_x + 700 \cdot 4 = 700 \rightarrow Q_x = 700$

Por tanto, hay un exceso de demanda.

INTERNET

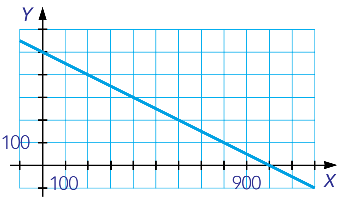
3 Cuando el precio de un producto está intervenido, ¿se puede aplicar la ley de la oferta y la demanda?

No, si el precio está intervenido, se desvirtúa la teoría de la oferta y la demanda.

4 Resuelve, de forma gráfica, el sistema que varía la ecuación de oferta para que el precio de mercado:

a) Ascienda a 6 €. b) Baje a 5 €.

a)



b)