

MATEMÁTICA FINANCIERA

1º Bachillerato CC. SS.

Logaritmos

Si a es un número real positivo y distinto de 1, el **logaritmo** en base a de un número N es el exponente al que hay que elevar la base para obtener dicho número.

$$\log_a N = b \Leftrightarrow a^b = N$$

Ejemplo:

$$\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$$

Logaritmos

$$\log_5 25 = 2 \text{ porque } 5^2 = 25$$

$$\log_{10} 10\,000 = 4 \text{ porque } 10^4 = 10\,000$$

$$\log_{10} 0,0001 = -4 \text{ porque } 10^{-4} = 0,0001$$

$$\log_2 \frac{1}{8} = -3 \text{ porque } 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$\log_5 \frac{1}{25} = -2 \text{ porque } 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$$

Logaritmos

Aplicando la definición de logaritmo, calcula x en cada caso:

$$x = \log_{\frac{1}{2}} 8 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 8 \Leftrightarrow (2^{-1})^x = 2^3 \Leftrightarrow 2^{-x} = 2^3 \rightarrow x = -3$$

$$4 = \log_x 16 \Leftrightarrow x^4 = 16 \Leftrightarrow x^4 = 2^4 \rightarrow x = 2$$

$$\log_3 x = -2 \Leftrightarrow 3^{-2} = x \rightarrow x = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

Propiedades de los logaritmos

Logaritmo de un producto: $\log_a (P \cdot Q) = \log_a P + \log_a Q$

$$\log_2 (3 \cdot 5) = \log_2 3 + \log_2 5$$

Logaritmo de un cociente: $\log_a \left(\frac{P}{Q} \right) = \log_a P - \log_a Q$

$$\log_2 \left(\frac{3}{5} \right) = \log_2 3 - \log_2 5$$

Propiedades de los logaritmos

Logaritmo de una potencia: $\log_a P^n = n \cdot \log_a P$

$$\log_2 5^3 = 3 \cdot \log_2 5$$

Cambio de base:

$$\log_a P = \frac{\log_b P}{\log_b a}$$

$$\log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2}$$

Propiedades de los logaritmos

Calcula usando la calculadora:

$$\log_3 5 = \frac{\log 5}{\log 3} = \frac{0,69897}{0,4771212} = 1,46497...$$

$$\log_5 7 = \frac{\log 7}{\log 5} = 1,20906...$$

$$\log_7 13 = \frac{\log 13}{\log 7} = 1,31812...$$

Propiedades de los logaritmos

Convierte la expresión algebraica tomando logaritmos. $A = \frac{x^2 y}{z^3}$

$$\log A = \log \frac{x^2 y}{z^3}$$

$$\log A = \log (x^2 y) - \log z^3$$

$$\log A = \log x^2 + \log y - \log z^3$$

$$\log A = 2 \log x + \log y - 3 \log z$$

Propiedades de los logaritmos

Elimina los logaritmos de $\log B = 2 \log x + 7 \log y - 5 \log z$

$$\log B = \log x^2 + \log y^7 - \log z^5$$

$$\log B = \log(x^2 y^7) - \log z^5$$

$$\log B = \log\left(\frac{x^2 y^7}{z^5}\right)$$

$$B = \frac{x^2 y^7}{z^5}$$

Propiedades de los logaritmos

Sabiendo que $\log 2 \approx 0,301$ y que $\log 3 \approx 0,477$, hallar:

$$\log_3 8 = \frac{\log 8}{\log 3} = \frac{\log 2^3}{\log 3} = \frac{3 \cdot \log 2}{\log 3} = \frac{3 \cdot 0,301}{0,477} \approx 1,893$$

Propiedades de los logaritmos

Sabiendo que $\log 2 \approx 0,301$ y que $\log 3 \approx 0,477$, hallar:

$$\log \sqrt{0,012} = \log \sqrt{\frac{12}{1000}} = \log\left(\frac{12}{1000}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{12}{1000} = \frac{1}{2} (\log 12 - \log 1000) =$$

$$= \frac{1}{2} (\log(2^2 \cdot 3) - 3) = \frac{1}{2} (2 \log 2 + \log 3 - 3) \approx -0,9605$$

Propiedades de los logaritmos

Toma logaritmos en la expresión $A = (x^x)^x$

$$\begin{aligned} \log A &= \log \left[(x^x)^x \right] = x \cdot \log(x^x) = \\ &= x \cdot x \cdot \log x = x^2 \cdot \log x \end{aligned}$$

$$\log A = x^2 \cdot \log x$$

PORCENTAJES

Para calcular el $x\%$ de una cantidad C se realiza la operación:

$$x\% \text{ de } C = C \cdot \frac{x}{100}$$

Si se expresa un porcentaje en forma decimal, se obtiene el **tanto por uno**.

Ejemplos:

$$\text{El } 4\% \text{ de } 12600 \text{ es } 12600 \cdot \frac{4}{100} = 504$$

$$\text{El } 25\% \text{ de } 8654 \text{ es } 8654 \cdot \frac{25}{100} = 2163'5$$

AUMENTOS Y DISMINUCIONES PORCENTUALES.

Aumentos porcentuales.

Para **aumentar** una cantidad C en un porcentaje $x\%$ se opera:

$$\text{Resultado} = C + C \cdot \frac{x}{100} = C \left(1 + \frac{x}{100} \right)$$

Ejemplo: Un equipo de música tiene un precio marcado de 360€. Un cliente pregunta si está incluido el IVA, y la respuesta es que no. ¿Cuánto tendrá que pagar sabiendo que el impuesto es del 16%?

$$\text{Total} = 360 \cdot \left(1 + \frac{16}{100} \right) = 360 \cdot 1'16 = 417'60 \text{ €}$$

Tendrá que pagar 417'60 €.

AUMENTOS Y DISMINUCIONES PORCENTUALES.

Disminuciones porcentuales.

Para **disminuir** una cantidad C en un porcentaje $x\%$ se opera:

$$\text{Resultado} = C - C \cdot \frac{x}{100} = C \left(1 - \frac{x}{100} \right)$$

Ejemplo: Una bicicleta de montaña expuesta en un escaparate tiene una etiqueta que marca 180€. Junto al precio aparece un cartel que indica -25% . ¿Cuánto cuesta la bicicleta?

$$\text{Total} = 180 \cdot \left(1 - \frac{25}{100} \right) = 180 \cdot 0'75 = 135 \text{ €}$$

La bicicleta cuesta 135 €.

AUMENTOS Y DISMINUCIONES PORCENTUALES.

Porcentajes encadenados.

Ejemplo: Un ordenador cuesta 1172 euros, a los que hay que restar un 12% de descuento y después aplicarles el 21% de IVA. ¿Cuál es el precio final del ordenador?

$$\text{Precio} = 1172 \cdot (1 - 0'12) \cdot (1 + 0'21) = 1172 \cdot 0'88 \cdot 1'21 = 1247'95 \text{ €}$$

El ordenador cuesta 1247'95 €.

INTERÉS SIMPLE Y COMPUESTO

Interés Simple.

Si una cantidad está colocada a **interés simple**, los intereses generados en cada periodo no se suman al capital, y por lo tanto, no generan nuevos intereses.

Un capital inicial C_i colocado a un rédito r (interés/100) de interés simple anual durante t años, se convierte en:

$$C_f = C_i + I = C_i + C_i \cdot r \cdot t = C_i \cdot (1 + r \cdot t)$$

Ejemplo: Se colocan 3000€ a un interés simple anual del 5% durante un período de 6 años. ¿Cuál será el capital final?

$$C_f = C_i \cdot (1 + r \cdot t) = 3000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100} \cdot 6\right) = 3900€$$

El capital final será de 3900€

INTERÉS SIMPLE Y COMPUESTO

Interés Simple.

Ejemplo: Se colocan 3000€ a un interés simple anual del 5% durante un período de 1 año y 5 meses. ¿Cuál será el interés y el capital final?

$$C_i = 3000€ \quad r = \frac{5}{100} \quad t = 1 \text{ año y } 5 \text{ meses} = 1'42 \text{ años}$$

$$I = C_i \cdot r \cdot t = 3000 \cdot \frac{5}{100} \cdot 1'42 = 213€$$

$$C_f = C_i + I = 3000 + 213 = 3213€$$

El interés será de 213€ y el capital final será de 3213€

INTERÉS SIMPLE Y COMPUESTO

Interés Compuesto. Período de Capitalización de un año.

Cuando una cantidad se deposita a interés compuesto, cada cierto período, llamado período de capitalización, los intereses se incorporan automáticamente al capital y se generan nuevos intereses.

Un capital inicial C_i colocado a un rédito r (interés/100) de interés compuesto con capitalización anual durante t años, se convierte en:

$$C_f = C_i \cdot (1 + r)^t$$

Ejemplo: Se colocan 7500€ a un interés compuesto anual del 4% durante un período de 3 años. ¿Cuál será el capital final?

$$C_f = C_i \cdot (1 + r)^t = 7500 \cdot (1 + 0'04)^3 = 8436'48€$$

El capital final será de 8436'48€

INTERÉS SIMPLE Y COMPUESTO

Interés Compuesto. Período de Capitalización inferior a un año.

Un capital inicial C_i colocado a un rédito r (interés/100) de interés compuesto con capitalización k veces al año durante t años, se convierte en:

$$C_f = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{k \cdot t}$$

Ejemplo: Se colocan 7500€ a un interés compuesto anual del 4% durante un período de 3 años, si el período de capitalización es de un trimestre. ¿Cuál será el capital final?

$$C_f = 7500 \cdot \left(1 + \frac{0'04}{4}\right)^{4 \cdot 3} = 8451'19€$$

El capital final será de 8451'19€

ANUALIDADES DE CAPITALIZACIÓN Y AMORTIZACIÓN

Anualidades de Capitalización.

Las **anualidades de capitalización** son cantidades fijas que se depositan cada año durante un cierto número de años, a un interés compuesto, de forma que se consigue un capital final igual a las cantidades entregadas más los intereses producidas por ellas.

El capital **C** que se consigue al ingresar una anualidad de capitalización **a** durante **t** años a un rédito **r** (interés/100) de interés compuesto es:

$$C_f = \frac{a \cdot (1+r) \cdot \left[(1+r)^t - 1 \right]}{r}$$

ANUALIDADES DE CAPITALIZACIÓN Y AMORTIZACIÓN

Anualidades de Capitalización.

Si las aportaciones se hacen con una periodicidad inferior a un año, realizando **k** veces al año, quedaría:

El capital **C** que se consigue al ingresar una anualidad de capitalización **a** durante **t** años a un rédito **r** (interés/100) de interés compuesto es:

$$C_f = \frac{a \cdot \left(1 + \frac{r}{k} \right) \cdot \left[\left(1 + \frac{r}{k} \right)^{k \cdot t} - 1 \right]}{\frac{r}{k}}$$

ANUALIDADES DE CAPITALIZACIÓN Y AMORTIZACIÓN

Anualidades de Capitalización.

$$C_f = \frac{a \cdot (1+r) \cdot \left[(1+r)^t - 1 \right]}{r} \qquad C_f = \frac{a \cdot \left(1 + \frac{r}{k} \right) \cdot \left[\left(1 + \frac{r}{k} \right)^{k \cdot t} - 1 \right]}{\frac{r}{k}}$$

Ejemplo: Luis contrata un depósito en un banco a un interés del 2'5% durante 5 años. ¿Qué cantidades trimestrales deberá depositar para obtener al final 30000€?

$$30000 = \frac{a \cdot \left(1 + \frac{0'025}{4} \right) \cdot \left[\left(1 + \frac{0'025}{4} \right)^{4 \cdot 5} - 1 \right]}{\frac{0'025}{4}} \rightarrow a = \frac{30000 \cdot \frac{0'025}{4}}{\left(1 + \frac{0'025}{4} \right) \cdot \left[\left(1 + \frac{0'025}{4} \right)^{4 \cdot 5} - 1 \right]} = 1404'10€$$

Deberá depositar 1404'10€

ANUALIDADES DE CAPITALIZACIÓN Y AMORTIZACIÓN

Anualidades de Amortización.

Otra operación financiera es la solicitud de un préstamo que se devuelve en varios años mediante el pago de una cantidad fija cada año, denominada **anualidad de amortización**. Al final se habrá devuelto la cantidad prestada más los intereses pactados.

La **anualidad de amortización** que se deberá devolver al final de cada uno de los **t** años que se tarda en cubrir una deuda de un préstamo de **C**€ a un rédito **r** (interés/100) es:

$$a = \frac{C \cdot r \cdot (1+r)^t}{(1+r)^t - 1}$$

ANUALIDADES DE CAPITALIZACIÓN Y AMORTIZACIÓN

Anualidades de Amortización.

Si se hacen **k** devoluciones al año, la **anualidad de amortización** que se deberá devolver al final de cada uno de los plazos que se tarda en cubrir una deuda de un préstamo de **C€** a un rédito **r** (interés/100) es:

$$a = \frac{C \cdot \frac{r}{k} \cdot \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{k \cdot t}}{\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{k \cdot t} - 1}$$

ANUALIDADES DE CAPITALIZACIÓN Y AMORTIZACIÓN

Anualidades de Amortización.

$$a = \frac{C \cdot r \cdot (1+r)^t}{(1+r)^t - 1} \qquad a = \frac{C \cdot \frac{r}{k} \cdot \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{k \cdot t}}{\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{k \cdot t} - 1}$$

Ejemplo: Se solicita un préstamo hipotecario de 125000€ a devolver en 16 años, a un interés del 5%. ¿Qué anualidad y mensualidad habrá que pagar?

$$a_1 = \frac{C \cdot r \cdot (1+r)^t}{(1+r)^t - 1} = \frac{125000 \cdot 0'05 \cdot 1'05^{16}}{1'05^{16} - 1} = 11533'74€$$

$$a_2 = \frac{125000 \cdot \frac{0'05}{12} \cdot \left(1 + \frac{0'05}{12}\right)^{12 \cdot 16}}{\left(1 + \frac{0'05}{12}\right)^{12 \cdot 16} - 1} = 947'10€$$

ANUALIDADES DE CAPITALIZACIÓN Y AMORTIZACIÓN

Tasa Anual Equivalente (TAE).

Para facilitar la comparación en distintas ofertas, las entidades financieras deben indicar el **TAE** que es el rédito que produciría el mismo capital final si el período de capitalización fuera de una año.

La **TAE** indica el porcentaje de crecimiento total del capital durante un año y se calcula mediante la fórmula:

$$TAE = \left[\left(1 + \frac{r}{k}\right)^k - 1 \right] \cdot 100$$

ANUALIDADES DE CAPITALIZACIÓN Y AMORTIZACIÓN

Tasa Anual Equivalente (TAE).

$$TAE = \left[\left(1 + \frac{r}{k}\right)^k - 1 \right] \cdot 100$$

Ejemplo: Un 5% de interés anual con periodos de capitalización mensuales produce un incremento real de:

$$TAE = \left[\left(1 + \frac{0'05}{12}\right)^{12} - 1 \right] \cdot 100 = 5'12\%$$