DESAFÍO

¡Estás en las nubes!

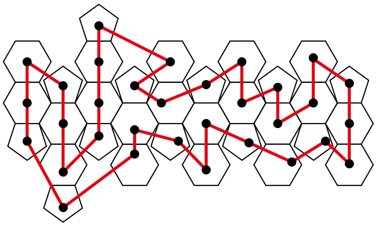
Uno de los planetas de la galaxia Pachanguita tiene forma de balón de fútbol reglamentario, donde los pentágonos y hexágonos representan regiones diferentes.

¿Se puede hacer un viaje pasando por cada región una sola vez y volviendo al punto de partida?

Esta situación es un problema similar al que se conoce como problema de los puentes de Königsberg resuelto por Euler en 1736 utilizando lo que hoy conocemos como «teoría de grafos».

La superficie del planeta Pachanguita está formada por 12 pentágonos y 20 hexágonos, es decir, tiene 32 caras en total. Se nos pide comprobar si existe un ciclo hamiltoniano, un camino que empiece y termine en el mismo vértice y que pase una sola vez por cada uno de los vértices, lo que se cumple si todo par de vértices u y v verifican que $gr(u) + gr(v) \geq n - 1$, siendo n el número de vértices. En este caso, $n = 32$, $gr(u) = 5$ y $gr(v) = 6$, representando u cada pentágono y v cada hexágono.

El planeta quedaría representado de la siguiente manera:



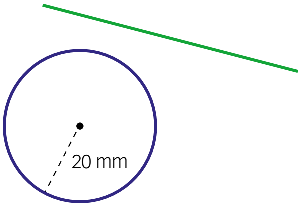
Por lo que podríamos recorrer Pachanguita pasando una y solo una vez por cada región y volviendo al punto de partida.

PIENSA

PÁG. 170. ¿Qué secciones cónicas puedes obtener a partir de una esfera?

Dados una esfera y un plano en el espacio, pueden suceder tres situaciones: que la esfera y el plano no se intersequen, que el plano sea tangente a la esfera, siendo su intersección un punto, o que el plano corte la esfera en más de un punto. En este último caso, la intersección entre ambos es una circunferencia.

PÁG. 171. Halla el lugar geométrico de los puntos que distan 15 mm de la recta y 10 mm de la circunferencia de la figura.



Los puntos que distan 15 mm de la recta serían dos rectas paralelas a la dada, a ambos lados de la misma, siendo la distancia entre cada una de ellas y la recta dada 15 mm.

Los puntos que distan 10 mm de la circunferencia dada serían dos circunferencias concéntricas con la dada, una con radio 10 mm y otra con radio 30 mm.

Por tanto, los puntos que cumplen ambas condiciones a la vez son los puntos de corte entre la recta y las circunferencias.

PÁG. 174. ¿Qué le ocurriría a la elipse si c fuera igual que a?

Si $c = a$, entonces la elipse se aproxima a un segmento.

PÁG. 177. Determina, sin hacer cálculos, si tienen algún punto en común la hipérbola y la elipse siguientes.

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 \qquad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Los vértices de la hipérbola $(-2, 0)$ y $(2, 0)$, coinciden con los vértices horizontales de la elipse. Por tanto, sí tienen puntos en común.

PÁG. 180. Dadas dos circunferencias, se sabe que $d(C_1, C_2) = r_2$. ¿Qué posición relativa pueden tener?

Pueden ser dos circunferencias tangentes interiores, de tal manera que el radio de una es el doble que el de la otra ($r_1 = 2r_2$). También pueden ser circunferencias interiores si $r_1 > 2r_2$ o secantes si $r_1 < r_2$.

ACTIVIDADES

1 Si en vez de una superficie cónica se utiliza un cilindro, ¿qué cónicas se pueden obtener?

Si el plano es perpendicular a la generatriz del cilindro, la sección es una circunferencia.

Si no es perpendicular, la sección es una elipse.

2 Razona por qué la parábola es una sección cónica que no tiene dos ramas.

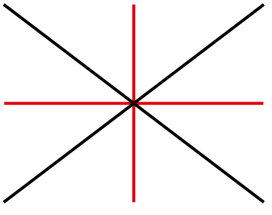
Porque el plano solo corta a uno de los conos de la superficie cónica.

3 Dibuja el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos rectas:

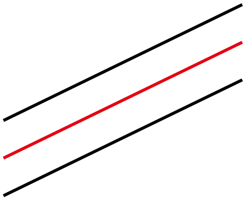
a) Que se cortan en un punto.

b) Que son paralelas.

a) El lugar geométrico está formado por las dos bisectrices de los ángulos que forman las rectas al cortarse.



b) El lugar geométrico es otra recta paralela a ambas.



4 Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de coordenadas cartesianas es 10.

¿Y si la condición del lugar geométrico es que su producto sea 10?

Los puntos que verifican la primera condición forman una recta de ecuación $x + y = 10$.

Los puntos que verifican la segunda condición forman una hipérbola equilátera de ecuación: $xy = 10$.

5 La distancia que existe entre los focos de una elipse es de 6 cm. Halla la medida del eje menor teniendo en cuenta que el eje mayor mide 10 cm.

$2c = 6 \text{ cm} \rightarrow c = 3 \text{ cm}$

$2a = 10 \text{ cm} \rightarrow a = 5 \text{ cm}$

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b = 4 \text{ cm}$

La longitud del eje menor es 8 cm.

6 Un punto de una elipse dista de cada uno de los focos 6 y 7 cm, respectivamente, y el eje menor mide 6,6 cm. Halla la medida del eje mayor y la distancia entre los focos.

$2a = d(P, F) + d(P, F') = 6 + 7 = 13 \text{ cm}$

El eje mayor mide 13 cm.

$2a = 13 \text{ cm} \rightarrow a = 6{,}5 \text{ cm}$

$2b = 6{,}6 \text{ cm} \rightarrow b = 3{,}3 \text{ cm}$

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = 5{,}6 \text{ cm}$

La distancia entre los focos mide $2c = 11{,}2$ cm.

7 Calcula la ecuación de una elipse cuyos focos son los puntos $F(5, 0)$ y $F'(-5, 0)$ y dos de sus vértices se sitúan en los puntos $A(8, 0)$ y $A'(-8, 0)$.

$$\begin{cases} c = 5 \\ a = 8 \end{cases} \rightarrow b = \sqrt{39}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} = 1$$

8 Halla la ecuación de la elipse cuyos vértices son los siguientes puntos.

$(-4, 0) \quad (0, -2) \quad (4, 0) \quad (0, 2)$

$a = 4 \quad b = 2$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

9 Calcula las excentricidades de estas elipses.

a) $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{121} = 1$ b) $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{9} = 1$

a) $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{121} = 1 \to \begin{cases} a = 12 \\ b = 11 \end{cases}$

$a^2 = b^2 + c^2 \to c = \sqrt{23} \to$

$\to e = \frac{\sqrt{23}}{12} = 0{,}39$

b) $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{9} = 1 \to \begin{cases} a = 15 \\ b = 3 \end{cases}$

$a^2 = b^2 + c^2 \to$

$\to c = \sqrt{216} = 6\sqrt{6} \to$

$\to e = \frac{6\sqrt{6}}{15} = \frac{2\sqrt{6}}{5} = 0{,}97$

10 De una elipse sabemos que su excentricidad es 0,6 y dos de sus vértices se sitúan en los puntos $A(6, 0)$ y $A'(-6, 0)$. Halla los otros dos vértices.

$a = 6$ $e = 0{,}6 = \frac{c}{a} \to c = 3{,}6$

$a^2 = b^2 + c^2 \to b^2 = 23{,}04 \to$

$\to B(0; 4{,}8)$ y $B'(0; -4{,}8)$

11 En una hipérbola la distancia entre los vértices es de 8 unidades. Si $B(0, 3)$ y su punto simétrico es $B'(0, -3)$, calcula los focos de la hipérbola.

$2a = 8 \to a = 4$ $b = 3$

$c^2 = a^2 + b^2 \to c = 5 \to$

$\to F(5, 0)$ y $F'(-5, 0)$

12 En una hipérbola la distancia entre sus focos es de 25 unidades y la distancia entre sus vértices es de 16 unidades. Halla B y B'.

$2c = 25 \to c = 12{,}5$

$2a = 16 \to a = 8$

$c^2 = a^2 + b^2 \to b = 9{,}6 \to$

$\to B(0; 9{,}6)$ y $B'(0; -9{,}6)$

13 Halla la ecuación de la hipérbola que tiene sus focos en los puntos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$ y sus vértices en $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.

$\begin{cases} c = 2 \\ a = 1 \end{cases} \to b = \sqrt{3} \to \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1$

14 Calcula la ecuación de la hipérbola que tiene sus focos en los puntos $(5, 0)$ y $(-5, 0)$ y que pasa por el punto $\left(6, \frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$.

$c = 5$

$c^2 = a^2 + b^2 \to 25 = a^2 + b^2 \to$

$\to b^2 = 25 - a^2$

Así, la ecuación de la hipérbola es de la forma:

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \to \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{25 - a^2} = 1$

Como el punto $\left(6, \frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$ pertenece

a la hipérbola $\frac{36}{a^2} - \frac{45}{100 - 4a^2} = 1 \to$

$\to 4a^4 - 289a^2 + 3600 = 0 \to$

$\to a^2 = \frac{225}{4}$ y $a^2 = 16$

$b^2 = 25 - a^2 > 0 \to a^2 = 16 \to b^2 = 9$

La ecuación de la hipérbola es: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

15 Determina los focos y los vértices de la hipérbola cuya ecuación aparece a continuación.

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{225} = 1$$

$a^2 = 64 \to a = 8 \to A(8, 0)$ y $A'(-8, 0)$

$b^2 = 225 \to b = 15 \to B(0, 15)$ y $B'(0, -15)$

$c^2 = a^2 + b^2 \to c^2 = 289 \to c = 17 \to$

$\to F(17, 0)$ y $F'(-17, 0)$

16 Calcula la excentricidad de las hipérbolas que vienen dadas por estas ecuaciones.

a) $\frac{x^2}{576} - \frac{y^2}{49} = 1$

b) $\frac{x^2}{121} - \frac{y^2}{36} = 1$

a) $a^2 = 576 \to a = 24 b^2 = 49 \to b = 7$

$c^2 = a^2 + b^2 \to c = 25 \to$

$\to e = \frac{c}{a} = \frac{25}{24} = 1{,}04$

b) $\frac{x^2}{121} - \frac{y^2}{36} = 1 \to \begin{cases} a = 11 \\ b = 6 \end{cases}$

$c^2 = a^2 + b^2 \to c = \sqrt{157} \to$

$\to e = \frac{\sqrt{157}}{11} = 1{,}13$

17 Halla la ecuación de la parábola con vértice en el origen de coordenadas y foco $F(0, 2)$.

$p = 4 \rightarrow x^2 = 8y$

18 Calcula la ecuación de la parábola que tiene el vértice en el origen de coordenadas y foco $F(2, 0)$.

$p = 4 \rightarrow y^2 = 8x$

19 Determina la ecuación de la circunferencia con centro $C(-3, 1)$ que pasa por el origen de coordenadas.

$$r = d(P, C) = \sqrt{(-3-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{10}$$

$$\rightarrow (x+3)^2 + (y-1)^2 = 10 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 2y = 0$$

20 Comprueba si esta ecuación corresponde a una circunferencia:

$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 11 = 0$.

$A = -6 \rightarrow a = 3 \qquad B = 2 \rightarrow b = -1$

$C = 11 \rightarrow \quad 11 = a^2 + b^2 - r^2 \rightarrow$

$\rightarrow 11 = 10 - r^2 \rightarrow$

$\rightarrow r^2 = -1 \rightarrow$ No tiene solución.

Por tanto, esta ecuación no corresponde a una circunferencia.

21 Estudia la posición relativa de las circunferencias que aparecen a continuación.

a) c_1: $x^2 + y^2 - 9 = 0$

c_2: $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$

b) c_1: $(x-1)^2 + y^2 = 4$

c_2: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$

a) $x^2 + y^2 - 9 = 0 \rightarrow \begin{cases} C_1(0, 0) \\ r_1 = 3 \end{cases}$

$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} C_2(1, 1) \\ r_2 = 1 \end{cases}$

$$d(C_1, C_2) = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2} < r_2 - r_1 = 2$$

Las circunferencias son interiores.

b) $(x-1)^2 + y^2 = 4 \rightarrow \begin{cases} C_1(1, 0) \\ r_1 = 2 \end{cases}$

$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9 \rightarrow \begin{cases} C_2(2, 3) \\ r_2 = 3 \end{cases}$

$$d(C_1, C_2) = \sqrt{(2-1)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{10}$$

$$\begin{cases} r_2 - r_1 = 1 \\ r_2 + r_1 = 5 \end{cases} \rightarrow 1 < \sqrt{10} < 5 \rightarrow$$

$$\rightarrow r_2 - r_1 < d(C_1, C_2) < r_1 + r_2$$

Las circunferencias son secantes.

22 A partir de la ecuación de esta circunferencia, encuentra otras que cumplan las siguientes condiciones.

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$$

a) Que sea tangente interior a la dada.

b) Que sea concéntrica a la dada.

c) Que sea exterior a la dada.

a) Respuesta abierta. Por ejemplo:
$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo:
$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 1$

c) Respuesta abierta. Por ejemplo:
$(x+6)^2 + (y-2)^2 = 1$

23 Discute la posición relativa de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$ y los ejes de coordenadas.

$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} C(3, -2) \\ r = 3 \end{cases}$

La distancia del centro al eje de abscisas es:

$$d(C, OX) = \frac{|-2|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = 2$$

Al ser menor que el radio, el eje OX es secante a la circunferencia.

La distancia del centro al eje de ordenadas es: $d(C, OY) = \dfrac{|3|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 3$

Al coincidir con el radio, el eje OY es tangente a la circunferencia.

24 Encuentra tres rectas no paralelas que sean secante, tangente y exterior a la circunferencia de ecuación $x^2 + (y-3)^2 = 36$.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Una recta secante es: $x - y = 0$.

Una recta tangente es: $y + 3 = 0$.

Una recta exterior es: $x - 7 = 0$.

PRACTICA

25 Determina el lugar geométrico de los puntos que equidistan de la recta $y = 5x - 2$ y del eje OY.

Se toma, un punto genérico, $P(x, y)$ del lugar geométrico.

$d(P, r) = \dfrac{|5x - y - 2|}{\sqrt{26}}$

$d(P, OY) = |x|$

$d(P, r) = d(P, OY) \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{|5x - y - 2|}{\sqrt{26}} = |x| \rightarrow$

$\rightarrow 5x - y - 2 = \sqrt{26}x \rightarrow$

$\rightarrow \left(5 - \sqrt{26}\right)x - y - 2 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 5x - y - 2 = -\sqrt{26}x \rightarrow$

$\rightarrow \left(5 + \sqrt{26}\right)x - y - 2 = 0$

El lugar geométrico son las dos ecuaciones obtenidas que, al ser de grado 1, equivalen a dos rectas que son las bisectrices de los ángulos que forman la recta dada y el eje OY.

26 Determina el lugar geométrico de los puntos que equidistan de la recta $3y = x + 1$ y del eje OX.

Se toma, un punto genérico, $P(x, y)$ del lugar geométrico.

$d(P, r) = \dfrac{|x - 3y + 1|}{\sqrt{10}}$

$d(P, OX) = |y|$

$d(P, r) = d(P, OX) \rightarrow$

$\dfrac{|x - 3y + 1|}{\sqrt{10}} = |y| \rightarrow$

$\rightarrow x - 3y + 1 = \sqrt{10}y \rightarrow$

$\rightarrow x - \left(3 + \sqrt{10}\right)y + 1 = 0$

$x - 3y + 1 = -\sqrt{10}y \rightarrow$

$\rightarrow x - \left(3 - \sqrt{10}\right)y + 1 = 0$

El lugar geométrico son las dos ecuaciones obtenidas, que, al ser de grado 1, equivalen a dos rectas que son las bisectrices de los ángulos que forman la recta dada y el eje X.

27 Halla la ecuación de la elipse cuya excentricidad es 0,8 y cuya distancia focal es 8.

$2c = 8 \rightarrow c = 4$

$e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{a} = 0{,}8 \rightarrow a = 5$

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b^2 = 9$

La ecuación de la elipse es de la forma:

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

28 Halla la ecuación de una elipse, con ejes paralelos a los ejes OX y OY, de centro $C(4, 1)$ y vértices $A'(1, 1)$ y $B'(4, -1)$.

Se traslada el centro $C(4, 1)$ al origen de coordenadas.

$A'(1, 1) \rightarrow A''(1 - 4, 1 - 1) = (-3, 0) \rightarrow$
$\rightarrow a = 3$

$B'(4, -1) \rightarrow$
$\rightarrow B''(4 - 4, -1 - 1) = (0, -2) \rightarrow b = 2$

La ecuación de la elipse es de la forma:

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \dfrac{(x-4)^2}{9} + \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1$

29 Halla la ecuación de la hipérbola con ejes paralelos a los ejes OX y OY, sabiendo que su centro es $C(-1, 2)$, uno de sus focos es $F(3, 2)$ y su excentricidad es 1,5.

Se traslada el centro $C(-1, 2)$ al origen de coordenadas.

$F(3, 2) \rightarrow F''(3 - (-1), 2 - 2) = (4, 0) \rightarrow$
$\rightarrow c = 4$

$e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{a} = 1{,}5 \rightarrow a = \dfrac{8}{3}$

$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b^2 = \dfrac{80}{9}$

La ecuación de la hipérbola es de la forma:

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{9(x+1)^2}{64} - \dfrac{9(y-2)^2}{80} = 1$

30 Halla la ecuación de la hipérbola con ejes paralelos a los ejes OX y OY, sabiendo que su centro es $C(4, 0)$, uno de sus focos es $F(1, -3)$ y su excentricidad es 2.

Se traslada el centro $C(4, 0)$ al origen de coordenadas:

$F(1, 0) \rightarrow F''(1 - 4, 0) = (-3, 0) \rightarrow c = 3$

$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{a} = 2 \rightarrow a = \frac{3}{2}$

$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b^2 = \frac{27}{4}$

La ecuación de la hipérbola es de la forma:

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{4(x-4)^2}{9} - \frac{4y^2}{27} = 1$

31 Halla la ecuación de una parábola cuyo vértice es $V(-2, 1)$ y cuya directriz es la recta $y = -1$.

Se traslada el vértice $V(-2, 1)$ al origen de coordenadas.

$y = -1 \rightarrow y' = -1 - 1 = -2 \rightarrow$

$\rightarrow -2 = -\frac{p}{2} \rightarrow p = 4$

La ecuación de la parábola es de la forma:

$(x - a)^2 = 2p(y - b) \rightarrow$

$\rightarrow (x + 2)^2 = 2p(y - 1) \rightarrow$

$\rightarrow (x + 2)^2 = 8(y - 1) \rightarrow$

$\rightarrow x^2 + 4x - 8y + 12 = 0$

32 Halla la ecuación de una parábola cuyo vértice es $V(3, 5)$ y cuya directriz es la recta $y = 1$.

Se traslada el vértice $V(3, 5)$ al origen de coordenadas.

$y = 1 \rightarrow y' = 1 - 5 = -4 \rightarrow$

$\rightarrow -4 = -\frac{p}{2} \rightarrow p = 8$

La ecuación de la parábola es de la forma:

$(x - a)^2 = 2p(y - b) \rightarrow$

$\rightarrow (x - 3)^2 = 2p(y - 5) \rightarrow$

$\rightarrow (x - 3)^2 = 16(y - 5) \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - 6x - 16y + 89 = 0$

33 Halla la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos $P(1, 4)$, $Q(1, 0)$ y $R(3, 2)$.

La ecuación general de la circunferencia es de esta forma:

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} P(1, 4) \rightarrow A + 4B + C = -17 \\ Q(1, 0) \rightarrow A + C = -1 \\ R(1, 4) \rightarrow 3A + 2B + C = -13 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow A = -2B = -4C = 1 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$

34 Calcula el centro y el radio de la circunferencia que pasa por los puntos $P(-4, 4)$, $Q(-5, 1)$ y $R(-1, 3)$.

Como $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$:

$$\left.\begin{array}{l} P(-4, 4) \rightarrow (-4 - a)^2 + (4 - b)^2 = r^2 \\ Q(-5, 1) \rightarrow (-5 - a)^2 + (1 - b)^2 = r^2 \\ R(-1, 3) \rightarrow (-1 - a)^2 + (3 - b)^2 = r^2 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 16 + a^2 + 8a + 16 + b^2 - 8b = r^2 \\ 25 + a^2 + 10a + 1 + b^2 - 2b = r^2 \\ 1 + a^2 + 2a + 9 + b^2 - 6b = r^2 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -3 \\ b = 2 \\ r^2 = 5 \end{array}\right.$$

El centro es $C(-3, 2)$ y el radio, $r = \sqrt{5}$.

35 Halla la ecuación de una circunferencia que pasa por los puntos $A(1, -2)$ y $B(-3, 0)$ y cuyo centro está en la recta de ecuación $y = 5 - 2x$.

Se calcula el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ que equidistan de A y B.

$d(A, P) = d(B, P) \rightarrow$

$\rightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 2)^2} = \sqrt{(x + 3)^2 + y^2} \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 =$

$= x^2 + 6x + 9 + y^2 \rightarrow 8x - 4y = -4 \rightarrow$

$\rightarrow 2x - y = -1$

El centro será la intersección de este lugar geométrico y la recta dada.

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y = -1 \\ 2x + y = 5 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 3 \end{array}\right. \rightarrow C(1, 3)$$

$d(C, A) = \sqrt{(1 - 1)^2 + (-2 - 3)^2} = 5 \rightarrow$

$\rightarrow r = 5$

La ecuación de la circunferencia es:

$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 25 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$

36 Calcula el centro y el radio de la circunferencia que pasa por los puntos $A(1, 1)$ y $B(2, 4)$ y su centro está en la recta de ecuación $3x + y - 11 = 0$.

Se calcula el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ que equidistan de A y B:

$d(A, P) = d(B, P) \rightarrow$

$\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 4)^2}$

$\rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 =$

$= x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 \rightarrow$
$\rightarrow 2x + 6y = 18 \rightarrow x + 3y = 9$

El centro será la intersección de este lugar geométrico y la recta dada.

$$\left.\begin{array}{l} x + 3y = 9 \\ 3x + y = 11 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 2 \end{array}\right. \rightarrow C(3, 2)$$

$d(C, A) = \sqrt{(1-3)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{5} \rightarrow$
$\rightarrow r = \sqrt{5}$

La ecuación de la circunferencia es:

$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5 \rightarrow$
$\rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$

37 **Identifica qué cónicas son las que tienen estas ecuaciones.**

a) $x^2 + y^2 + 11 = 4y - 8x$

b) $\dfrac{x^2}{16} + 9y^2 = 1$

c) $x^2 - 2x - 10y = 19$

d) $x^2 - 4y = 0$

e) $\dfrac{x^2}{225} = 1 + \dfrac{y^2}{81}$

f) $x^2 + y^2 + 6y = 7$

a) Aparecen las dos variables al cuadrado con coeficiente $+1$; por tanto, es una circunferencia.

$x^2 + y^2 + 8x - 4y + 11 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow A = 8 \quad B = -4 \quad C = 11$

$A = -2a \rightarrow a = -4$

$B = -2b \rightarrow b = 2$

$C = a^2 + b^2 - r^2 \rightarrow r^2 = 9$

La cónica es una circunferencia de centro $C(-4, 2)$ y $r = 3$.

b) Aparecen las dos variables al cuadrado con el mismo signo y distinto coeficiente; por tanto, es una elipse.

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{\frac{1}{9}} = 1 \rightarrow a = 4, b = \frac{1}{3}$$

$$c^2 = \frac{143}{9} \rightarrow c = \frac{\sqrt{143}}{3}$$

La cónica es una elipse de focos $F\left(\dfrac{\sqrt{143}}{3}, 0\right)$ y $F'\left(-\dfrac{\sqrt{143}}{3}, 0\right)$.

c) Aparece una variable al cuadrado y la otra con grado 1; por tanto, es una parábola.

$x^2 - 2x + 1 = 10y + 19 + 1 \rightarrow$
$\rightarrow (x-1)^2 = 10(y+2)$

La cónica es una parábola de vértice $V(1, -2)$ y directriz paralela al eje Y.

d) Aparece una variable al cuadrado y la otra con grado 1; por tanto, es una parábola.

$x^2 = 4y$

La cónica es una parábola de vértice el origen de coordenadas y directriz paralela al eje Y.

e) Aparecen las dos variables al cuadrado con distinto signo; por tanto, es una hipérbola.

$$\frac{x^2}{15^2} - \frac{y^2}{9^2} = 1 \rightarrow a = 15 \qquad b = 9$$

Como $a^2 + b^2 = c^2 \rightarrow c^2 = 306 = 3\sqrt{54}$

La cónica es una hipérbola de focos $F\left(3\sqrt{54}, 0\right)$ y $F'\left(-3\sqrt{54}, 0\right)$.

f) Aparecen las dos variables al cuadrado con coeficiente 1; por tanto, es una circunferencia:

$x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow A = 0 \quad B = 6 \quad C = -7$

$A = -2a \rightarrow a = 0$

$B = -2b \rightarrow b = -3$

$C = a^2 + b^2 - r^2 \rightarrow r^2 = 16$

La cónica es una circunferencia de centro $C(0, -3)$ y $r = 4$.

38 **Estudia la posición de los puntos $A(0, 2)$ y $B(4, 1)$ respecto de la circunferencia $x^2 + (y-m)^2 = 16$, según el valor de m.**

Centro y radio de la circunferencia: $C(0, m)$ y $r = 4$.

$d(C, A) = \sqrt{(0-0)^2 + (2-m)^2} =$
$= \sqrt{m^2 - 4m + 4}$

- $\sqrt{m^2 - 4m + 4} = 4 \rightarrow$
$\rightarrow m^2 - 4m - 12 = 0 \rightarrow m_1 = 6$ y $m_2 = -2$
- $\sqrt{m^2 - 4m + 4} > 4 \rightarrow$
$\rightarrow m^2 - 4m - 12 > 0 \rightarrow m < -2$ y $m > 6$
- $\sqrt{m^2 - 4m + 4} < 4 \rightarrow$
$\rightarrow m^2 - 4m - 12 < 0 \rightarrow -2 < m < 6$

Si $m < -2$ o $m > 6 \rightarrow$ El punto A es exterior.

Si $m = 6$ o $m = -2 \rightarrow$ El punto A pertenece a la circunferencia.

Si $-2 < m < 6 \rightarrow$ El punto A es interior.

$$d(C, B) = \sqrt{(4-0)^2 + (1-m)^2} = \sqrt{m^2 - 2m + 17}$$

- $\sqrt{m^2 - 2m + 17} = 4 \rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \rightarrow m = 1$
- $\sqrt{m^2 - 2m + 17} > 4 \rightarrow m^2 - 2m + 1 > 0 \rightarrow m \neq 1$
- $\sqrt{m^2 - 2m + 17} < 4 \rightarrow m^2 - 2m + 1 < 0 \rightarrow$ No tiene solución.

Si $m = 1 \rightarrow$ El punto B pertenece a la circunferencia.

Si $m \neq 1 \rightarrow$ El punto B es exterior.

39 Dada la circunferencia $(x-m)^2 + (y-1)^2 = 9$, estudia la posición de los puntos $A(0, -2)$ y $B(-5, 1)$ respecto de ella en función del valor de m.

Centro y radio de la circunferencia: $C(m, 1)$ y $r = 3$.

$$d(C, A) = \sqrt{(0-m)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{m^2 + 9}$$

- $\sqrt{m^2 + 9} = 3 \rightarrow m^2 = 0 \rightarrow m = 0$
- $\sqrt{m^2 + 9} > 3 \rightarrow m^2 > 0 \rightarrow m \neq 0$
- $\sqrt{m^2 + 9} < 3 \rightarrow m^2 < 0 \rightarrow$ No tiene solución.

Si $m = 0 \rightarrow$ El punto A pertenece a la circunferencia.

Si $m \neq 0 \rightarrow$ El punto A es exterior.

$$d(C, B) = \sqrt{(-5-m)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{m^2 + 10m + 25}$$

- $\sqrt{m^2 + 10m + 25} = 3 \rightarrow m^2 + 10m + 16 = 0 \rightarrow m_1 = -8$ y $m_2 = -2$
- $\sqrt{m^2 + 10m + 25} > 3 \rightarrow m^2 + 10m + 16 > 0 \rightarrow m < -8$ y $m > -2$
- $\sqrt{m^2 + 10m + 25} < 3 \rightarrow m^2 + 10m + 16 < 0 \rightarrow -8 < m < -2$

Si $m < -8$ o $m > -2 \rightarrow$ El punto B es exterior.

Si $m = -8$ o $m = -2 \rightarrow$ El punto B pertenece a la circunferencia.

Si $-8 < m < -2 \rightarrow$ El punto B es interior.

ACTIVIDADES FINALES

1. Conoce el significado de *lugar geométrico* e identifica los más usuales en el plano

ACTIVIDADES FLASH

40 Determina el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los puntos A y B.

a) $A(-1, 0), B(1, 0)$

b) $A(0, -1), B(0, 1)$

c) $A(-3, 1), B(3, 1)$

d) $A(3, -1), B(3, 1)$

a) Sea $P(x, y)$ un punto equidistante de A y B, entonces $d(A, P) = d(B, P)$.

$$\left.\begin{array}{l} d(A, P) = \sqrt{(x+1)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 1} \\ d(B, P) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 1} = \sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1}$$

$4x = 0 \rightarrow$ El lugar geométrico es la mediatriz del segmento AB, que coincide con el eje de ordenadas, $x = 0$.

b) Sea $P(x, y)$ un punto equidistante de A y B, entonces $d(A, P) = d(B, P)$.

$$\left.\begin{array}{l} d(A, P) = \sqrt{(x-0)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 1} \\ d(B, P) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 2y + 1} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 1} = \sqrt{x^2 + y^2 - 2y + 1}$$

$4y = 0 \rightarrow$ El lugar geométrico es la mediatriz del segmento AB, que coincide con el eje de abscisas, $y = 0$.

c) Sea $P(x, y)$ un punto equidistante de A y B, entonces $d(A, P) = d(B, P)$.

$$\left.\begin{aligned} d(A, P) &= \sqrt{(x+3)^2 + (y-1)^2} = \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + 6x - 2y + 10} \\ d(B, P) &= \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 2y + 10} \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + 6x - 2y + 10} = \sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 2y + 10}$$

$12x = 0 \rightarrow$ El lugar geométrico es la mediatriz del segmento AB, que coincide con el eje de ordenadas, $x = 0$.

d) Sea $P(x, y)$ un punto equidistante de A y B, entonces $d(A, P) = d(B, P)$.

$$\left.\begin{aligned} d(A, P) &= \sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2} = \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10} \\ d(B, P) &= \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 2y + 10} \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10} = \sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 2y + 10}$$

$4y = 0 \rightarrow$ El lugar geométrico es la mediatriz del segmento AB, que coincide con el eje de abscisas, $y = 0$.

41 Determina el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los puntos A y B.

a) $A(-6, 0)$ y $B(-1, 0)$

b) $A(-2, -1)$ y $B(4, 1)$

c) $A(3, -5)$ y $B(7, 1)$

d) $A(0, -2)$ y $B(0, 7)$

a) Sea $P(x, y)$ un punto equidistante de A y B, entonces $d(A, P) = d(B, P)$.

$$d(A, P) = \sqrt{(x-(-6))^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 12x + 36}$$

$$d(B, P) = \sqrt{(x-(-1))^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 1}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 12x + 36} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 1} \rightarrow$$

$$\rightarrow 12x + 36 = 2x + 1 \rightarrow x = -\frac{7}{2}$$

El lugar geométrico es la mediatriz del segmento AB, $x = -\dfrac{7}{2}$.

b) Sea $P(x, y)$ un punto equidistante de A y B, entonces $d(A, P) = d(B, P)$.

$$d(A, P) = \sqrt{(x-(-2))^2 + (y-(-1))^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 4x + 2y + 5}$$

$$d(B, P) = \sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 8x - 2y + 17}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 4x + 2y + 5} = \sqrt{x^2 + y^2 - 8x - 2y + 17} \rightarrow$$

$$\rightarrow 4x + 2y + 5 = -8x - 2y + 17 \rightarrow$$

$$\rightarrow 3x + y - 3 = 0$$

El lugar geométrico es la mediatriz del segmento AB, $3x + y - 3 = 0$.

c) Sea $P(x, y)$ un punto equidistante de A y B, entonces $d(A, P) = d(B, P)$.

$$d(A, P) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-(-5))^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 6x + 10y + 34}$$

$$d(B, P) = \sqrt{(x-7)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 14x - 2y + 50}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 6x + 10y + 34} = \sqrt{x^2 + y^2 - 14x - 2y + 50} \rightarrow$$

$$\rightarrow -6x + 10y + 34 = -14x - 2y + 50 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x + 3y - 4 = 0$$

El lugar geométrico es la mediatriz del segmento AB, $2x + 3y - 4 = 0$.

d) Sea $P(x, y)$ un punto equidistante de A y B, entonces $d(A, P) = d(B, P)$:

$$d(A, P) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-(-2))^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4}$$

$$d(B, P) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-7)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 14y + 49}$$

$$\sqrt{x^2+y^2+4y+4} = \\ = \sqrt{x^2+y^2-14y+49} \rightarrow \\ \rightarrow 4y+4=-14y+49 \rightarrow y=\frac{5}{2}$$

El lugar geométrico es la mediatriz del segmento AB, $\quad y=\frac{5}{2}$.

42 Halla el lugar geométrico de los puntos, P, del plano cuya distancia a $A(-3, 0)$ sea el doble de la distancia a $B(1, 0)$. Identifica la figura resultante.

Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico, entonces $d(A, P) = 2d(B, P)$.

$$d(A, P) = \sqrt{(x-(-3))^2+(y-0)^2} = \\ = \sqrt{x^2+y^2+6x+9}$$

$$d(B, P) = \sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2} = \\ = \sqrt{x^2+y^2-2x+1}$$

$$\sqrt{x^2+y^2+6x+9} = \\ = 2\sqrt{x^2+y^2-2x+1} \rightarrow \\ \rightarrow x^2+y^2+6x+9 = \\ = 4(x^2+y^2-2x+1) \rightarrow \\ \rightarrow 3x^2+3y^2-14x-5=0$$

El lugar geométrico es la circunferencia

$$x^2+y^2-\frac{14}{3}x-\frac{5}{3}=0.$$

43 Calcula el lugar geométrico de los puntos que distan 4 unidades de la recta $r: 4x-2y+5=0$.

Sea (x, y) un punto del lugar geométrico, entonces:

$$\frac{|4x-2y+5|}{\sqrt{4^2+(-2)^2}} = 4 \rightarrow$$

$$\rightarrow |4x-2y+5| = 4\sqrt{20} \rightarrow$$

$$\rightarrow |4x-2y+5| = 8\sqrt{5} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 4x-2y+5-8\sqrt{5}=0 \\ -4x+2y-5-8\sqrt{5}=0 \end{cases}$$

44 Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los siguientes pares de rectas.

a) $3x-4y-26=0$
$12x+5y+1=0$

b) $-2x+7y+9=0$
$4x-14y+11=0$

c) $2x-3y+3=0$
$3x-2=0$

d) $2y-5=0$
$2x-3y+5=0$

a) $$\frac{|3x-4y-26|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{|12x+5y+1|}{\sqrt{12^2+5^2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{3x-4y-26}{5} = \dfrac{12x+5y+1}{13} \\ \dfrac{3x-4y-26}{5} = \dfrac{-12x-5y-1}{13} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 39x-52y-338 = 60x+25y+5 \\ 39x-52y-338 = -60x-25y-5 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3x-11y+49=0 \\ 11x-3y-37=0 \end{cases}$$

El lugar geométrico está formado por las dos bisectrices de los ángulos formados por las dos rectas.

b) $$\frac{|-2x+7y+9|}{\sqrt{(-2)^2+7^2}} = \frac{|4x-14y+11|}{\sqrt{4^2+(-14)^2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{-2x+7y+9}{\sqrt{53}} = \dfrac{4x-14y+11}{2\sqrt{53}} \\ \dfrac{-2x+7y+9}{\sqrt{53}} = \dfrac{-4x+14y-11}{2\sqrt{53}} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} -4x+14y+18 = 4x-14y+11 \\ -4x+14y+18 = -4x+14y-11 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 8x-28y-7=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

Como las rectas son paralelas, el lugar geométrico es otra recta paralela a ambas.

c) $$\frac{|2x-3y+3|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} = \frac{|3x-2|}{\sqrt{3^2+0^2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{2x-3y+3}{\sqrt{13}} = \dfrac{3x-2}{3} \\ \dfrac{2x-3y+3}{\sqrt{13}} = \dfrac{-3x+2}{3} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 6x-9y+9 = 3\sqrt{13}x-2\sqrt{13} \\ 6x-9y+9 = -3\sqrt{13}x+2\sqrt{13} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} (6-3\sqrt{13})x-9y+9+2\sqrt{13}=0 \\ (6+3\sqrt{13})x-9y+9-2\sqrt{13}=0 \end{cases}$$

El lugar geométrico está formado por las dos bisectrices de los ángulos formados por las dos rectas.

d) $\dfrac{|2y-5|}{\sqrt{2^2+0^2}} = \dfrac{|2x-3y+5|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{2y-5}{2} = \dfrac{2x-3y+5}{\sqrt{13}} \\ \dfrac{2y-5}{2} = \dfrac{-2x+3y-5}{\sqrt{13}} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2\sqrt{13}y - 5\sqrt{13} = 4x - 6y + 10 \\ 2\sqrt{13}y - 5\sqrt{13} = -4x + 6y - 10 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} -4x + \left(6 + 2\sqrt{13}\right)y - 10 - 5\sqrt{13} = 0 \\ 4x + \left(-6 + 2\sqrt{13}\right)y + 10 - 5\sqrt{13} = 0 \end{cases}$$

El lugar geométrico está formado por las dos bisectrices de los ángulos formados por las dos rectas.

45 Determina las bisectrices de las siguientes rectas.

$$3x - 2y - 1 = 0$$
$$4x + 2y - 6 = 0$$

$$\frac{|3x-2y-1|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}} = \frac{|4x+2y-6|}{\sqrt{4^2+2^2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{3x-2y-1}{\sqrt{13}} = \dfrac{2x+y-3}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{3x-2y-1}{\sqrt{13}} = \dfrac{-2x-y+3}{\sqrt{5}} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3\sqrt{5}x - 2\sqrt{5}y - \sqrt{5} = \\ = 2\sqrt{13}x + \sqrt{13}y - 3\sqrt{13} \\ 3\sqrt{5}x - 2\sqrt{5}y - \sqrt{5} = \\ = -2\sqrt{13}x - \sqrt{13}y + 3\sqrt{13} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \left(3\sqrt{5} - 2\sqrt{13}\right)x - \\ -\left(2\sqrt{5} + \sqrt{13}\right)y - \sqrt{5} + 3\sqrt{13} = 0 \\ \left(3\sqrt{5} + 2\sqrt{13}\right)x - \\ -\left(2\sqrt{5} - \sqrt{13}\right)y - \sqrt{5} - 3\sqrt{13} = 0 \end{cases}$$

46 **INVESTIGA.** Una escalera está apoyada en una pared. En el peldaño central de la escalera hay un gato durmiendo. La escalera comienza a deslizarse hacia abajo. ¿Qué trayectoria describe el gato antes de llegar al suelo?

Llamamos A y B a los extremos de la escalera.

Suponemos que el extremo A está apoyado en la pared, por tanto, sus coordenadas son $A(0, a)$ y el extremo B está apoyado en el suelo, siendo $B(b, 0)$.

Consideramos que, al deslizarse la escalera, el extremo A siempre está sobre el eje de ordenadas y el B sobre el eje de abscisas.

Llamamos (x, y) a la posición del gato en todo momento y L a la longitud de la escalera, de tal manera que $a^2 + b^2 = L$.

Como el enunciado dice que el gato está justo en el centro de la escalera.

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{2} \rightarrow a = 2x \\ y = \dfrac{b}{2} \rightarrow b = 2y \end{cases} \rightarrow 4x^2 + 4y^2 = L \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 = \frac{L}{4} = \left(\frac{\sqrt{L}}{2}\right)^2$$

Por tanto, el gato va describiendo un arco de circunferencia de centro el origen y radio $\dfrac{\sqrt{L}}{2}$.

47 Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia del eje OX sea la misma que al punto $A(3, 2)$.

Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico, entonces $d(OX, P) = d(A, P)$.

$d(OX, P) = |y|$

$d(A, P) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} \rightarrow$

$\rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13} = |y| \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - 6x - 4y + 13 = 0$

El lugar geométrico es una parábola cuya directriz es paralela al eje X.

48 **RETO.** Halla el lugar geométrico de los puntos del plano tales que el triángulo $\widehat{ABP}$ sea rectángulo en P, siendo $A(-3, 1)$ y $B(4, 3)$. ¿De qué figura se trata?

ABP es un triángulo rectángulo en $P(x, y)$ si sus lados AP y BP son perpendiculares.

$AP = (x + 3, y - 1)$

$BP = (x - 4, y - 3)$

Para que sean perpendiculares, su producto escalar debe ser 0.

$AP \cdot BP = (x + 3)(x - 4) + (y - 1)(y - 3) =$
$= 0 \rightarrow x^2 + y^2 - x - 4y - 9 = 0$

El lugar geométrico es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - x - 4y - 9 = 0$ cuyo centro es el punto medio del segmento AB y su radio es la mitad de su módulo.

49 Encuentra la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos $A(3, 1)$ y $B(5, 1)$ sea igual a 8.

Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico, entonces $d(A, P)^2 + d(P, B)^2 = 8$.

$d(A, P) = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 1)^2} =$
$= \sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 2y + 10}$

$d(B, P) = \sqrt{(x - 5)^2 + (y - 1)^2} =$
$= \sqrt{x^2 + y^2 - 10x - 2y + 26}$

$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 10 + x^2 + y^2 -$
$- 10x - 2y + 26 = 8 \rightarrow$
$\rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 2y + 14 = 0$

El lugar geométrico es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 14 = 0$.

50 Halla el lugar geométrico de los puntos del plano P cuya diferencia de cuadrados de las distancias a los puntos $A(-1, 0)$ y $B(3, 2)$ es 4. ¿De qué figura se trata?

Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico, entonces $d(A, P)^2 - d(P, B)^2 = 4$.

$d(A, P) = \sqrt{(x - (-1))^2 + y^2} =$
$= \sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 1}$

$d(B, P) = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 2)^2} =$
$= \sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13}$

$x^2 + y^2 + 2x + 1 -$
$- (x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13) = 4 \rightarrow$
$\rightarrow 2x + y - 4 = 0$

El lugar geométrico es la recta de ecuación $2x + y - 4 = 0$.

51 **RETO.** Se define la «distancia taxi» entre los puntos del plano $P(a, b)$ y $Q(c, d)$ mediante la expresión
$d_{taxi}(P, Q) = |a - c| + |b - d|$.
¿Qué figura determina el conjunto de puntos del plano cuya distancia taxi al origen es 2?

Sea $P(a, b)$ y $Q(0, 0)$, entonces $d_{taxi}(P, Q) = |a| + |b| = 2$.

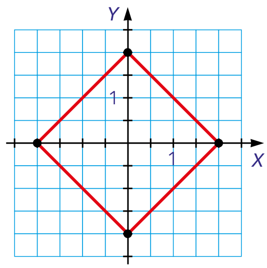
Si $a > 0$ y $b > 0 \rightarrow$
$\rightarrow d_{taxi}(P, Q) = a + b = 2$

Si $a < 0$ y $b > 0 \rightarrow$
$\rightarrow d_{taxi}(P, Q) = -a + b = 2$

Si $a > 0$ y $b < 0 \rightarrow$
$\rightarrow d_{taxi}(P, Q) = a - b = 2$

Si $a < 0$ y $b < 0 \rightarrow$
$\rightarrow d_{taxi}(P, Q) = -a - b = 2$

El conjunto de soluciones de $d_{taxi}(P, Q) = |a| + |b| = 2$ es:



Elipse

ACTIVIDADES FLASH

52 Halla la longitud de los ejes de estas elipses.

a) $\dfrac{x^2}{16} + y^2 = 1$

c) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{100} = 1$

b) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

d) $\dfrac{x^2}{49} + \dfrac{y^2}{36} = 1$

a) El eje mayor mide 8 u y el eje menor 2 u.

b) El eje mayor mide 6 u y el eje menor 4 u.

c) El eje mayor mide 20 u y el eje menor, 10 u.

d) El eje mayor mide 14 u y el eje menor, 12 u.

53 Indica el centro de las elipses.

a) $\dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

b) $(x+1)^2 + \dfrac{(y-3)^2}{9} = 1$

a) El centro de la elipse es $P(2, 0)$.

b) El centro de la elipse es $P(-1, 3)$.

54 Halla la ecuación de la elipse que cumple las condiciones en cada uno de los casos.

a) La distancia focal es 4 y el semieje menor es 3.

b) La semidistancia focal es 3 y el eje mayor es 10.

c) Pasa por el punto (8, 3) y su excentricidad es $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

d) Pasa por el punto $(-4, 1)$ y el eje menor es 6.

a) $c = 2$ y $b = 3$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = 13 \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{x^2}{13} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

b) $c = 3$ y $a = 5$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b^2 = 16 \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

c) $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow c = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow$

$\rightarrow b^2 = \dfrac{a^2}{4} \rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{\frac{a^2}{4}} = 1 \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{4y^2}{a^2} = 1$

Como (8, 3) es un punto de la elipse:

$\dfrac{8^2}{a^2} + \dfrac{4 \cdot 3^2}{a^2} = 1 \rightarrow a^2 = 100 \rightarrow$

$\rightarrow b^2 = \dfrac{a^2}{4} = 25 \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

d) Como $(-4, 1)$ es un punto de la elipse y $b = 3$:

$\dfrac{(-4)^2}{a^2} + \dfrac{1^2}{3^2} = 1 \rightarrow a^2 = 18 \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{x^2}{18} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

55 Encuentra las ecuaciones de las elipses que cumplen las siguientes condiciones.

a) La excentricidad es 0,6 y su eje mayor mide 20.

b) Los focos son (6, 0) y $(-6, 0)$ y su excentricidad es $\dfrac{1}{3}$.

c) Pasa por el punto (3, 2) y su eje mayor mide 10.

d) Sus focos están en (3, 0) y $(-3, 0)$ y dos de sus vértices son (5, 0) y $(-5, 0)$.

a) $2a = 20 \rightarrow a = 10$

Si $e = 0{,}6 \rightarrow c = 6$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b = 8 \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{64} = 1$

b) $c = 6$

Si $e = \dfrac{1}{3} \rightarrow a = 18$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b = 12\sqrt{2} \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{x^2}{324} + \dfrac{y^2}{288} = 1$

c) $2a = 10 \rightarrow a = 5$

Como (3, 2) es un punto de la elipse:

$$\frac{9}{25}+\frac{4}{b^2}=1 \to \frac{4}{b^2}=\frac{16}{25} \to$$
$$\to b^2=\frac{25}{4} \to b=\frac{5}{2} \to$$
$$\to \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{\frac{25}{4}}=1 \to x^2+4y^2=25$$

d) $c=4 \quad a=5$
Como $a^2=b^2+c^2 \to b=3 \to$
$$\to \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

56 **INVENTA.** Indica ecuaciones que cumplan las siguientes condiciones.

a) Una elipse que está centrada en el punto $(-3, 4)$.

b) Dos elipses concéntricas separadas por una unidad en los vértices.

c) Dos elipses que son tangentes en el punto $(0, 0)$.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\frac{(x+3)^2}{4}+\frac{(y-4)^2}{25}=1$

b) $E_1 \equiv \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$

$E_2 \equiv \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$

c) $E_1 \equiv \frac{(x+2)^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$

$E_2 \equiv \frac{(x-2)^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$

57 Determina los vértices, los focos y las excentricidades de las siguientes elipses.

a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

b) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$

c) $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{54}=6$

d) $\frac{x^2}{5}+5y^2=245$

e) $25x^2+16y^2=1600$

f) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

g) $9x^2+25y^2=900$

h) $x^2+2y^2=16$

a) $\begin{cases} a=5 \to A(5, 0) \quad A'(-5, 0) \\ b=3 \to B(0, 3) \quad B'(0, -3) \end{cases}$

Como $a^2=b^2+c^2 \to c=4 \to$
$\to F(4, 0) \quad F'(-4, 0)$

La excentricidad es: $e=\frac{4}{5}=0{,}8$.

b) $\begin{cases} b=4 \to B(4, 0) \quad B'(-4, 0) \\ a=5 \to A(0, 5) \quad A'(0, -5) \end{cases}$

Como $a^2=b^2+c^2 \to c=3 \to$
$\to F(0, 3) \quad F'(0, -3)$

La excentricidad es $e=\frac{3}{5}=0{,}6$.

c) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{324}=1 \to$
$\to \frac{x^2}{6^2}+\frac{y^2}{18^2}=1 \to$
$\to \begin{cases} b=6 \to B(6, 0) \quad B'(-6, 0) \\ a=18 \to A(0, 18) \quad A'(0, -18) \end{cases}$

Como $a^2=b^2+c^2 \to$
$\to c^2=288 \to c=12\sqrt{2} \to$
$\to F\left(0, 12\sqrt{2}\right) \quad F'\left(0, -12\sqrt{2}\right)$

La excentricidad es:
$$e=\frac{12\sqrt{2}}{18}=\frac{2\sqrt{2}}{3}=0{,}94$$

d) $\frac{x^2}{1\,225}+\frac{y^2}{49}=1 \to$
$\to \frac{x^2}{35^2}+\frac{y^2}{7^2}=1$
$a=35 \to A(35, 0) \quad A'(-35, 0)$
$b=7 \to B(0, 7) \quad B'(0, -7)$
Como $a^2=b^2+c^2 \to c^2=1\,176 \to$
$\to c=14\sqrt{6} \to$
$\to F\left(14\sqrt{6}, 0\right) \quad F'\left(-14\sqrt{6}, 0\right)$

La excentricidad es: $e=\frac{14\sqrt{6}}{35}=0{,}98$.

e) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1 \to$
$\to \begin{cases} b=8 \to A(8, 0) \quad A'(-8, 0) \\ a=10 \to B(0, 10) \quad B'(0, -10) \end{cases}$

$a^2=b^2+c^2 \to c=6 \to$
$\to F(0, 6) \quad F'(0, -6)$

La excentricidad es $e = \frac{6}{10} = 0{,}6$.

f) $\begin{cases} a = 5 \rightarrow A(5, 0) \quad A'(-5, 0) \\ b = 4 \rightarrow B(0, 4) \quad B'(0, -4) \end{cases}$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = 3 \rightarrow$
$\rightarrow F(3, 0) \quad F'(-3, 0)$

La excentricidad es $e = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

g) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1 \rightarrow$
$\rightarrow \begin{cases} a = 10 \rightarrow A(10, 0) \quad A'(-10, 0) \\ b = 6 \rightarrow B(0, 6) \quad B'(0, -6) \end{cases}$

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = 8 \rightarrow$
$\rightarrow F(8, 0) \quad F'(-8, 0)$

La excentricidad es $e = \frac{8}{10} = 0{,}8$.

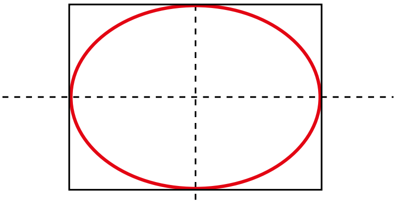
h) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1 \rightarrow$
$\rightarrow \begin{cases} a = 4 \rightarrow A(4, 0) \quad A'(-4, 0) \\ b = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \rightarrow B\left(0, 2\sqrt{2}\right) \\ \qquad B'\left(0, -2\sqrt{2}\right) \end{cases}$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = 2\sqrt{2} \rightarrow$
$\rightarrow F\left(2\sqrt{2}, 0\right) \quad F'\left(-2\sqrt{2}, 0\right)$

La excentricidad es:

$e = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707$

58 Una elipse es tangente a los lados del rectángulo definido por las rectas $y = 8$, $y = -8$, $x = 10$ y $x = -10$. Halla su ecuación y las coordenadas de cinco puntos.



$\begin{cases} a = 10 \\ b = 8 \end{cases} \rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$

Cinco puntos de la elipse son
$A(10, 0)$, $A'(-10, 0)$, $B(0, 8)$, $B'(0, -8)$
y $C\left(5, 4\sqrt{3}\right)$

59 Escribe la ecuación de la elipse con centro en el origen de coordenadas, los focos sobre el eje OX y que pasa por los puntos $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Como $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ es un punto de la elipse:

$\frac{1^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{b^2} = 1 \rightarrow 4b^2 + 3a^2 = 4a^2b^2$

Como $\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ es un punto de la elipse:

$\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{b^2} = 1 \rightarrow 8b^2 + 2a^2 = 4a^2b^2$

Igualamos las dos ecuaciones.
$4b^2 + 3a^2 = 8b^2 + 2a^2 \rightarrow a^2 = 4b^2$

Sustituimos en la primera ecuación.

$\begin{cases} \frac{1}{a^2} + \frac{3}{a^2} = 1 \rightarrow a^2 = 4 \\ b^2 = \frac{a^2}{4} \end{cases} \rightarrow b^2 = 1$

$\rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$

60 Halla la ecuación reducida de una elipse cuya distancia focal es 8 y el área del rectángulo construido sobre sus ejes es de $48\sqrt{5}$ unidades cuadradas.

$c = 4 \rightarrow 2a \cdot 2b = 48\sqrt{5} \rightarrow b = \frac{12\sqrt{5}}{a}$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow$
$\rightarrow a^2 = \left(\frac{12\sqrt{5}}{a}\right)^2 + 16 \rightarrow$
$\rightarrow a^4 - 16a^2 - 720 = 0 \rightarrow a^2 = 36$

Como $b^2 = \left(\frac{12\sqrt{5}}{a}\right)^2 \rightarrow b^2 = 20 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$

61 Considera una elipse centrada en el origen de focos F_1 y F_2. Se sabe que $\overline{F_1F_2} = 12$ y que cualquier punto P de la elipse cumple $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 20$.
Halla la ecuación de la elipse.

La ecuación de una elipse centrada en el origen es $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Por la definición de una elipse, ocurre que:
$d(P, F) + d(P, F') = 2a = 20 \rightarrow a = 10$

Por otro lado:
$d(F, F') = 2c = 12 \rightarrow c = 6$

Según la relación fundamental de una elipse: $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b = 8$

Luego la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1.$$

62 Dada la elipse
$4x^2 + 16y^2 + 40x - 64y + 100 = 0$:

a) Escribe su ecuación reducida.

b) Halla su centro.

c) Determina sus vértices.

d) Determina sus focos.

a) $4x^2 + 16y^2 + 40x - 64y = -100 \rightarrow$
$\rightarrow (4x^2 + 40x) + (16y^2 - 64y) = -100 \rightarrow$
$\rightarrow 4(x^2 + 10x) + 16(y^2 - 4y) = -100$

Completando cuadrados obtenemos:
$4(x^2 + 10x + 25) + 16(y^2 - 4y + 4) =$
$= -100 + 100 + 64 \rightarrow$
$\rightarrow 4(x+5)^2 + 16(y-2)^2 = 64 \rightarrow$
$\rightarrow \frac{4(x+5)^2 + 16(y-2)^2}{64} = \frac{64}{64}$

$$\frac{(x+5)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$$

b) El centro de la elipse es $C(-5, 2)$.

c) $a = 4 \rightarrow A(4, 0)$ y $A'(-4, 0)$
$b = 2 \rightarrow B(0, 2)$ y $B'(0, -2)$.

d) $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = \sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$

Los focos de la elipse son $F\left(2\sqrt{3}, 0\right)$ y $F'\left(-2\sqrt{3}, 0\right)$.

63 Escribe en forma reducida la ecuación de la elipse $4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$. Halla también sus focos y su excentricidad.

$4(x^2 - 2x) + 9(y^2 + 4y) + 4 = 0$

$4(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 + 4y + 4) + 4 = 4 +$
$+ 36 \rightarrow 4(x-1)^2 + 9(y+2)^2 = 36$

Forma general:

$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1 \rightarrow a = 3, b = 2,$
$C = (1, -2)$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c^2 = 5 \rightarrow c = \sqrt{5}$

La excentricidad es $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Como $C(1, -2)$ y $c = \sqrt{5} \rightarrow$
$\rightarrow F\left(1+\sqrt{5}, -2\right) \quad F'\left(1-\sqrt{5}, -2\right)$.

64 Escribe en forma reducida la ecuación de la siguiente elipse, encuentra sus focos y calcula su excentricidad.

$$x^2 + 400y^2 = 6x - 800y - 309$$

$(x^2 - 6x) + 400(y^2 + 2y) + 309 = 0$

$(x^2 - 6x + 9) + 400(y^2 + 2y + 1) + 309 =$
$= 9 + 400 \rightarrow (x-3)^2 + 400(y+1)^2 = 100$

Forma general:

$\frac{(x-3)^2}{100}+\frac{(y+1)^2}{\frac{1}{4}}=1 \rightarrow$

$\rightarrow a = 10, b = \frac{1}{2}$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c^2 = \frac{399}{4} \rightarrow$
$\rightarrow c = \frac{\sqrt{399}}{2}$

La excentricidad es $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{399}}{20}$.

Como $C(3, -1)$ y $c = \frac{\sqrt{399}}{2} \rightarrow$

$F\left(3+\frac{\sqrt{399}}{2}, -1\right) \quad F'\left(3-\frac{\sqrt{399}}{2}, -1\right) \rightarrow$

$\rightarrow F\left(\frac{6+\sqrt{399}}{2}, -1\right) \quad F'\left(\frac{6-\sqrt{399}}{2}, -1\right)$

65 Halla las ecuaciones que corresponden a los siguientes lugares geométricos.

a) Puntos cuya suma de distancias a los puntos $P(-4, 0)$ y $Q(4, 0)$ es 10.

b) Puntos cuya suma de distancias a los puntos $P(-5, 0)$ y $Q(5, 0)$ es 21.

a) Sea $R(x, y)$ un punto del lugar geométrico, entonces $d(P, R) + d(Q, R) = 10$.

$d(P, R) = \sqrt{(x-(-4))^2 + (y-0)^2}$

$d(Q, R) = \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2}$

$\sqrt{(x+4)^2 + y^2} + \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 10 \rightarrow$

$\sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 10 - \sqrt{(x-4)^2 + y^2} \rightarrow$

$\rightarrow (x+4)^2 + y^2 = 100 + (x-4)^2 +$

$+ y^2 - 20\sqrt{(x-4)^2 + y^2} \rightarrow$

$\rightarrow 20\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 100 - 16x \rightarrow$

$\rightarrow 400(x^2 + y^2 - 8x + 16) =$

$= 10\,000 - 3\,200x + 256x^2 \rightarrow$

$\rightarrow 144x^2 + 400y^2 = 3\,600$

El lugar geométrico es una elipse de ecuación: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

b) Sea $R(x, y)$ un punto del lugar geométrico, entonces $d(P, R) + d(Q, R) = 21$.

$d(P, R) = \sqrt{(x-(-5))^2 + (y-0)^2}$

$d(Q, R) = \sqrt{(x-5)^2 + (y-0)^2}$

$\sqrt{(x+5)^2 + y^2} + \sqrt{(x-5)^2 + y^2} = 21 \rightarrow$

$\rightarrow \sqrt{(x+5)^2 + y^2} = 21 -$

$- \sqrt{(x-5)^2 + y^2} \rightarrow$

$\rightarrow (x+5)^2 + y^2 = 21^2 + (x-5)^2 +$

$+ y^2 - 42\sqrt{(x-5)^2 + y^2} \rightarrow$

$\rightarrow 42\sqrt{(x-5)^2 + y^2} = 441 - 20x \rightarrow$

$\rightarrow 1764(x^2 + y^2 - 10x + 25) =$

$= 194\,481 - 17\,640x + 400x^2 \rightarrow$

$\rightarrow 1\,364x^2 + 1\,764y^2 = 150\,381$

El lugar geométrico es la elipse de ecuación: $\dfrac{4x^2}{441} + \dfrac{4y^2}{341} = 1$.

66 ●●○ Escribe la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a (0, −12) y a (0, 12) es 26.

$\sqrt{(x-0)^2 + (y+12)^2} +$

$+ \sqrt{(x-0)^2 + (y-12)^2} = 26 \rightarrow$

$\rightarrow \sqrt{x^2 + (y+12)^2} =$

$= 26 - \sqrt{x^2 + (y-12)^2} \rightarrow$

$\rightarrow x^2 + (y+12)^2 = 26^2 + x^2 +$

$+ (y-12)^2 - 52\sqrt{x^2 + (y-12)^2} \rightarrow$

$\rightarrow y^2 + 144 + 24y = 676 + y^2 +$

$+ 144 - 24y - 52\sqrt{x^2 + y^2 + 144 - 24y} \rightarrow$

$\rightarrow 52\sqrt{x^2 + y^2 + 144 - 24y} = 676 - 48y \rightarrow$

$\rightarrow 13\sqrt{x^2 + y^2 + 144 - 24y} = 169 - 12y \rightarrow$

$\rightarrow 169x^2 + 169y^2 + 24\,336 - 4\,056y =$

$= 28\,561 + 144y^2 - 4\,056y \rightarrow$

$\rightarrow 169x^2 + 25y^2 = 4\,225$

El lugar geométrico es la elipse de ecuación

$\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{169} = 1$.

67 ●●○ Halla la posición relativa de la elipse de ecuación $x^2 + 2y^2 = 3$ y la recta de ecuación $x + 2y - 1 = 0$.

$x + 2y - 1 = 0 \rightarrow x = 1 - 2y$

Sustituyendo en la ecuación de la elipse:

$(1 - 2y)^2 + 2y^2 = 3 \rightarrow 3y^2 - 2y - 1 = 0$

$\Delta = 16 > 0 \rightarrow$ La ecuación tiene dos soluciones; por tanto, la elipse y la recta son secantes.

68 ●●● Decide la posición relativa de cada una de las siguientes rectas respecto de la elipse:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

a) $2x + 3y - 5 = 0$

b) $-3x + 2y - 20 = 0$

c) $3x + 10y - 15\sqrt{5} = 0$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y - 5 = 0 \\ 9x^2 + 25y^2 = 225 \end{array}\right\} \rightarrow y = \dfrac{5 - 2x}{3}$

Sustituyendo, tenemos que:

$9x^2 + 25 \cdot \dfrac{25 - 20x + 4x^2}{9} = 225 \rightarrow$

$\rightarrow 81x^2 + 625 - 500x + 100x^2 = 2\,025 \rightarrow$

$\rightarrow 181x^2 - 500x - 1\,400 = 0$

$\Delta = 1\,263\,600 > 0 \rightarrow$ La ecuación tiene dos soluciones; por tanto, la elipse y la recta son secantes.

b) $\left.\begin{array}{r} -3x + 2y - 20 = 0 \\ 9x^2 + 25y^2 = 225 \end{array}\right\} \rightarrow y = \dfrac{3x + 20}{2}$

$9x^2 + 25 \cdot \dfrac{9x^2 + 120x + 400}{4} = 225 \rightarrow$

$\rightarrow 261x^2 + 3\,000x + 9\,100 = 0$

$\Delta = -500\,400 < 0 \rightarrow$ La ecuación no tiene solución; por tanto, la recta es exterior a la elipse.

c) $\left.\begin{array}{r} 3x + 10y - 15\sqrt{5} = 0 \\ 9x^2 + 25y^2 = 225 \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow y = \dfrac{15\sqrt{5} - 3x}{10}$

Sustituyendo, tenemos que:

$9x^2 + 25 \cdot \dfrac{1125 - 90\sqrt{5}x + 9x^2}{100} = 225 \rightarrow$

$\rightarrow 45x^2 - 90\sqrt{5}x + 225 = 0$

$\Delta = 0 \rightarrow$ La ecuación tiene una solución; por tanto, la elipse y la recta son tangentes.

Hipérbola

ACTIVIDADES FLASH

69 Halla el centro de la hipérbola cuyos focos son:

a) $F(-3, 0), F'(3, 0)$

b) $F(-2, 1), F'(2, 1)$

c) $F(-1, -1), F'(-1, 1)$

d) $F(2, -3), F'(2, 3)$

El centro de la hipérbola es el punto medio entre los dos focos.

a) $C(0, 0)$

b) $C(0, 1)$

c) $C(-1, 0)$

d) $C(2, 0)$

70 Halla el centro de la hipérbola cuyos vértices son:

a) $A(-1, 0), A'(1, 0)$

b) $A(-3, -1), A'(3, -1)$

c) $A(2, -2), A'(2, 2)$

d) $A(1, -3), A'(1, 3)$

a) $C(0, 0)$

b) $C(0, -1)$

c) $C(2, 0)$

d) $C(1, 0)$

71 Encuentra las ecuaciones de las hipérbolas que cumplen las siguientes condiciones.

a) Sus asíntotas son $y = 2x$ e $y = -2x$ y un foco tiene por coordenadas $\left(3\sqrt{5}, 0\right)$.

b) Los focos son $(-5, 0)$ y $(5, 0)$ y la distancia entre sus vértices es 8.

c) Las asíntotas son $y = \dfrac{1}{3}x$ e $y = -\dfrac{1}{3}x$ y pasa por el punto $\left(3\sqrt{29}, 5\right)$.

d) Un foco es $(6, 0)$ y su excentricidad es 1,2.

a) $\dfrac{b}{a} = 2 \rightarrow b = 2a \qquad c = 3\sqrt{5}$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 45 = a^2 + 4a^2 \rightarrow$
$\rightarrow a^2 = 9 \rightarrow a = 3 \qquad b = 6 \rightarrow$
$\rightarrow \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{36} = 1$

b) $c = 5 \qquad 2a = 8 \rightarrow a = 4$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 25 = 16 + b^2 \rightarrow$
$\rightarrow b^2 = 9 \rightarrow b = 3 \rightarrow \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

c) $\dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{3} \rightarrow a = 3b$

Como $\left(3\sqrt{29}, 5\right)$ es un punto de la hipérbola:

$\dfrac{261}{9b^2} - \dfrac{25}{b^2} = 1 \rightarrow \dfrac{36}{9b^2} = 1 \rightarrow$
$\rightarrow b^2 = 4 \rightarrow b = 2 \quad a = 6 \rightarrow$
$\rightarrow \dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

d) $c = 6 \qquad e = \dfrac{c}{a} = 1{,}2 \rightarrow a = 5$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b = \sqrt{11} \rightarrow$
$\rightarrow \dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{11} = 1$

72 Dadas las siguientes hipérbolas, determina sus focos, vértices, asíntotas y excentricidades.

a) $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

b) $\dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{16} = 1$

c) $16y^2 - 25x^2 = 1600$

d) $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

e) $9x^2 - 25y^2 = 900$

f) $x^2 - 2y^2 = 16$

a) $\begin{cases} a = 5 \to A(5, 0) \quad A'(-5, 0) \\ b = 3 \end{cases}$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \to c = \sqrt{34} \to$
$\to F\left(\sqrt{34}, 0\right) \quad F'\left(-\sqrt{34}, 0\right)$

La excentricidad es $e = \dfrac{\sqrt{34}}{5} = 1{,}16.$

Las asíntotas son: $r\colon y = \dfrac{3}{5}x$

$r'\colon y = -\dfrac{3}{5}x$

b) $\begin{cases} a = 5 \to A(0, 5) \quad A'(0, -5) \\ b = 4 \end{cases}$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \to c = \sqrt{41} \to$
$\to F\left(0, \sqrt{41}\right) \quad F'\left(0, -\sqrt{41}\right)$

La excentricidad es $e = \dfrac{\sqrt{41}}{5} = 1{,}28.$

Las asíntotas son de la forma: $y = \pm\dfrac{a}{b}x.$

$r\colon y = \dfrac{5}{4}x \qquad r'\colon y = -\dfrac{5}{4}x$

c) $16y^2 - 25x^2 = 1600 \to \dfrac{y^2}{100} - \dfrac{x^2}{64} = 1 \to$
$\to \begin{cases} a = 10 \to A(0, 10) \quad A'(0, -10) \\ b = 8 \end{cases}$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \to c = 2\sqrt{41} \to$
$\to F\left(0, 2\sqrt{41}\right) \quad F'\left(0, -2\sqrt{41}\right)$

La excentricidad es: $e = \dfrac{2\sqrt{41}}{10} = 1{,}28.$

Las asíntotas son de la forma: $y = \pm\dfrac{a}{b}x.$

$r\colon y = \dfrac{5}{4}x \qquad r'\colon y = -\dfrac{5}{4}x$

d) $\begin{cases} a = 5 \to A(5, 0) \quad A'(-5, 0) \\ b = 4 \end{cases}$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \to c = \sqrt{41} \to$
$\to F\left(\sqrt{41}, 0\right) \quad F'\left(-\sqrt{41}, 0\right)$

La excentricidad es: $e = \dfrac{\sqrt{41}}{5} = 1{,}28.$

Las asíntotas son: $r\colon y = \dfrac{4}{5}x$

$r'\colon y = -\dfrac{4}{5}x$

e) $\dfrac{x^2}{100} - \dfrac{y^2}{36} = 1 \to$
$\to \begin{cases} a = 10 \to A(10, 0) \quad A'(-10, 0) \\ b = 6 \end{cases}$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \to c = 2\sqrt{34} \to$
$\to F\left(2\sqrt{34}, 0\right) \quad F'\left(-2\sqrt{34}, 0\right)$

La excentricidad es $e = \dfrac{2\sqrt{34}}{10} = 1{,}16.$

Las asíntotas son: $r\colon y = \dfrac{3}{5}x$

$r'\colon y = -\dfrac{3}{5}x$

f) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{8} = 1 \to$
$\to \begin{cases} a = 4 \; A(4, 0) \quad A'(-4, 0) \\ b = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \end{cases}$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \to c = 2\sqrt{6} \to$
$\to F\left(2\sqrt{6}, 0\right) \quad F'\left(-2\sqrt{6}, 0\right)$

La excentricidad es $e = \dfrac{2\sqrt{6}}{4} = 1{,}22.$

Las asíntotas son: $r\colon y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x$

$r'\colon y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$

73 ●●○ Las siguientes hipérbolas no están centradas en el origen. Determina los focos, los vértices, las asíntotas y la excentricidad en cada caso.

a) $\dfrac{(x+5)^2}{10} - \dfrac{(y-4)^2}{9} = 1$

b) $\dfrac{(y+3)^2}{25} - \dfrac{x^2}{7} = 1$

c) $\dfrac{y^2}{11} - \dfrac{(x+4)^2}{9} = 1$

d) $\dfrac{(x-4)^2}{14} - \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1$

a) $C(-5, 4)$

$a^2 = 10 \to a = \sqrt{10} \to$
$\to A(-5 + \sqrt{10}, 4) \quad A'(-5 - \sqrt{10}, 4)$

$\begin{cases} b^2 = 9 \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{cases} \to$

$\to c^2 = 19 \to c = \sqrt{19} \to$
$\to F(-5 + \sqrt{19}, 4) \quad F'(-5 - \sqrt{19}, 4)$

La excentricidad es $e = \sqrt{\dfrac{19}{10}}$.

Las asíntotas son: $\begin{cases} r: y = \dfrac{3\sqrt{10}x}{10} \\ r': y = \dfrac{-3\sqrt{10}x}{10} \end{cases}$

b) $C(0, -3)$

$a^2 = 25 \to a = 5 \to$
$\to A(0, 2) \quad A'(0, -8)$

$\begin{cases} b^2 = 7 \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{cases} \to c^2 = 32 \to c = 4\sqrt{2} \to$

$F\left(0, -3 + 4\sqrt{2}\right) \quad F'\left(0, -3 - 4\sqrt{2}\right)$

La excentricidad es $e = \dfrac{4\sqrt{2}}{5}$.

Las asíntotas son: $\begin{cases} r: y = \dfrac{5\sqrt{7}}{7}x \\ r': y = -\dfrac{5\sqrt{7}}{7}x \end{cases}$,

c) $C(-4, 0)$

$a^2 = 11 \to a = \sqrt{11} \to$
$\to A\left(-4, \sqrt{11}\right) \quad A'\left(-4, -\sqrt{11}\right)$

$\begin{cases} b^2 = 9 \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{cases} \to c^2 = 20 \to c = 4\sqrt{5} \to$

$\to F\left(-4, 2\sqrt{5}\right) \quad F'\left(-4, -2\sqrt{5}\right)$

La excentricidad es: $e = \dfrac{2\sqrt{55}}{11}$

Las asíntotas son: $\begin{cases} r: y = \dfrac{\sqrt{11}}{3}x \\ r': y = -\dfrac{\sqrt{11}}{3}x \end{cases}$

d) $C(4, -1)$

$a^2 = 14 \to a = \sqrt{14} \to$
$\to A\left(4 + \sqrt{14}, -1\right) \quad A'\left(4 - \sqrt{14}, -1\right)$

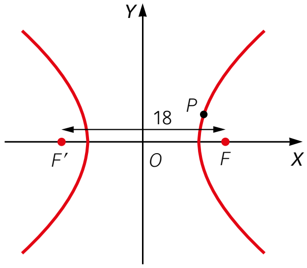
$\begin{cases} b^2 = 9 \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{cases} \to c^2 = 23 \to c = \sqrt{23} \to$

$\to F\left(4 + \sqrt{23}, -1\right) \quad F'\left(4 - \sqrt{23}, -1\right)$

La excentricidad es $e = \sqrt{\dfrac{23}{14}}$.

Las asíntotas son: $\begin{cases} r: y = \dfrac{3\sqrt{14}}{14}x \\ r': y = -\dfrac{3\sqrt{14}}{14}x \end{cases}$,

74 Encuentra la ecuación de una hipérbola cuyos focos distan 18 unidades y que pasa por el punto $P(15, 4)$.



$2c = 18 \to c = 9$

$c^2 = a^2 + b^2 \to 81 - a^2 = b^2$

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{81 - a^2} = 1 \to$

$\to \dfrac{225}{a^2} - \dfrac{16}{81 - a^2} = 1 \to$

$\to a^2 = 161 - 4\sqrt{481}$

$\dfrac{x^2}{161 - 4\sqrt{481}} - \dfrac{y^2}{4\sqrt{481} - 80} = 1$

75 Escribe la ecuación del lugar geométrico de los puntos tales que la diferencia de distancias a $(0, -12)$ y a $(0, 12)$ es 10.

$\sqrt{(x - 0)^2 + (y + 12)^2} -$
$- \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 12)^2} = 10 \to$

$\to \sqrt{x^2 + (y + 12)^2} =$
$= 10 + \sqrt{x^2 + (y - 12)^2} \to$

$\to x^2 + (y + 12)^2 =$
$= 10^2 + x^2 + (y - 12)^2 +$
$+ 20\sqrt{x^2 + (y - 12)^2} \to$

$\to 12y - 25 = 5\sqrt{x^2 + y^2 + 144 - 24y} \to$

$\to 144y^2 - 600y + 625 =$
$= 25x^2 + 25y^2 + 3\,600 - 600y \to$

$\to 119y^2 - 25x^2 = 2\,975 \to$

$\to \dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{119} = 1$

Se trata de una hipérbola centrada en el origen y con los focos en el eje OY.

76 ●●○ Sean los puntos $A(-5, -1)$ y $A'(-5, -11)$, ¿qué ecuación corresponde al lugar geométrico formado por los puntos cuya diferencia de distancias a A y A' es 8?

Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico, entonces $d(A, P) - d(A', P) = 8$.

$$\sqrt{(x+5)^2+(y+1)^2} - \sqrt{(x+5)^2+(y+11)^2} = 8 \rightarrow$$
$$\rightarrow (x+5)^2+(y+1)^2 = 8^2+(x+5)^2+(y+11)^2+16\sqrt{(x+5)^2+(y+11)^2} \rightarrow$$
$$\rightarrow -5y-46 = 4\sqrt{(x+5)^2+(y+11)^2} \rightarrow$$
$$\rightarrow (-5y-46)^2 = 16(x+5)^2+16(y+11)^2 \rightarrow$$
$$\rightarrow 9(y^2+12y)-16(x^2+10x)-220 = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow 9(y+6)^2-16(x+5)^2 = 144 \rightarrow$$
$$\rightarrow \frac{9(y+6)^2}{144} - \frac{16(x+5)^2}{144} = 1$$

El lugar geométrico es la hipérbola con eje paralelo a OY y de ecuación:

$$\frac{(y+6)^2}{16} - \frac{(x+5)^2}{19} = 1$$

Parábola

ACTIVIDADES FLASH

77 ●○○ Indica la distancia entre la directriz y el foco de estas parábolas.

a) $x^2 = 8y$
b) $x^2 = 6y$
c) $x^2 = 10y$
d) $x^2 = 11y$
e) $x^2 = 9y$
f) $x^2 = 5y$

La ecuación reducida de la parábola es $x^2 = 2py$.

La distancia entre la directriz y el foco de la parábola es $d(s, F) = p$.

a) $\left.\begin{array}{l} d(s, F) = p \\ 2p = 8 \rightarrow p = 4 \end{array}\right\} \rightarrow d(s, F) = 4$

b) $\left.\begin{array}{l} d(s, F) = p \\ 2p = 6 \rightarrow p = 3 \end{array}\right\} \rightarrow d(s, F) = 3$

c) $\left.\begin{array}{l} d(s, F) = p \\ 2p = 10 \rightarrow p = 5 \end{array}\right\} \rightarrow d(s, F) = 5$

d) $\left.\begin{array}{l} d(s, F) = p \\ 2p = 11 \rightarrow p = \frac{11}{2} \end{array}\right\} \rightarrow d(s, F) = \frac{11}{2}$

e) $\left.\begin{array}{l} d(s, F) = p \\ 2p = 9 \rightarrow p = \frac{9}{2} \end{array}\right\} \rightarrow d(s, F) = \frac{9}{2}$

f) $\left.\begin{array}{l} d(s, F) = p \\ 2p = 5 \rightarrow p = \frac{5}{2} \end{array}\right\} \rightarrow d(s, F) = \frac{5}{2}$

78 ●○○ Calcula el vértice de estas parábolas.

a) $(x-1)^2 = 8(y+2)$
b) $(x+2)^2 = 5(y-1)$
c) $(x-3)^2 = 6(y-4)$
d) $(x-5)^2 = 9(y+3)$

La ecuación de una parábola de vértice $V(h, k)$ con eje paralelo al eje OY es $(x-h)^2 = 2p(y-k)$.

a) $(x-1)^2 = 8(y+2) \rightarrow V(1, -2)$
b) $(x+2)^2 = 5(y-1) \rightarrow V(-2, 1)$
c) $(x-3)^2 = 6(y-4) \rightarrow V(3, 4)$
d) $(x-5)^2 = 9(y+3) \rightarrow V(5, -3)$

79 ●○○ **INVENTA.** Escribe la ecuación de tres parábolas que tengan estos vértices.

a) $V(0, 0)$
b) $V(1, 1)$
c) $V(2, -1)$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $V(0, 0) \rightarrow x^2 = 16y$
b) $V(1, 1) \rightarrow (x-1)^2 = 8(y-1)$
c) $V(2, -1) \rightarrow (x-2)^2 = 2(y+1)$

80 ●○○ Halla la ecuación de la parábola con vértice en el origen de coordenadas, que pasa por el punto $(3, -6)$ y cuyo eje coincide con el eje de abscisas.

La ecuación de la parábola con $V(0, 0)$ y que coincide con el eje OX es de la forma: $y^2 = 2px$.

Como $(3, -6)$ pertenece a la parábola:

$(-6)^2 = 2p3 \rightarrow p = 6 \rightarrow y^2 = 12x$

81 ●○○ Obtén la ecuación de la parábola en cada uno de los siguientes casos.

a) Foco en $(5, 0)$ y su directriz es $x = -5$.

b) Foco en $(0, 2)$ y su directriz es $y = -2$.

a) Sea $P(x, y)$ un punto de la parábola, entonces $d(P, F) = d(P, s)$

$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} = |x + 5| \rightarrow$
$\rightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 =$
$= x^2 + 10x + 25 \rightarrow$
$\rightarrow y^2 = 20x$

b) Sea $P(x, y)$ un punto de la parábola, entonces $d(P, F) = d(P, s) \rightarrow$

$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = |y + 2| \rightarrow$
$\rightarrow x^2 + y^2 - 4y + 4 = y^2 + 4y + 4 \rightarrow$
$\rightarrow x^2 = 8y$

82 ●○○ Encuentra la ecuación de la parábola que tiene su vértice en el punto $V(-1, 3)$, pasa por el punto $(2, -2)$ y su eje es paralelo al eje OY.

La ecuación es de la forma:

$(x + 1)^2 = 2p(y - 3)$.

Como $(2, -2)$ está en la parábola:

$$(2 + 1)^2 = 2p(-2 - 3) \rightarrow p = -\frac{9}{10} \rightarrow$$

$$\rightarrow (x + 1)^2 = -\frac{9}{5}(y - 3) \rightarrow$$

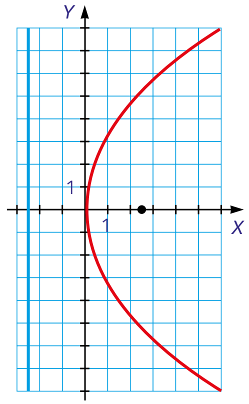
$$\rightarrow 5x^2 + 10x + 9y = 22$$

83 ●○○ Encuentra el foco y la directriz de las siguientes parábolas, y represéntalas gráficamente.

a) $y^2 = 10x$
b) $y^2 = 7x$
c) $x^2 = 6y$
d) $x^2 = y$
e) $y^2 = -10x$
f) $x^2 = -6y$

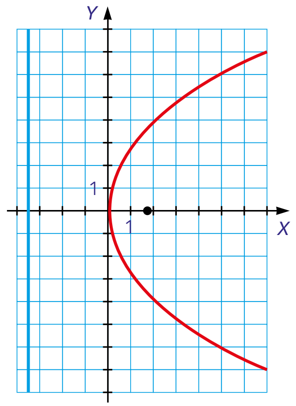
a) $2p = 10 \rightarrow p = 5 \rightarrow F\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

Directriz: $x = -\frac{5}{2}$



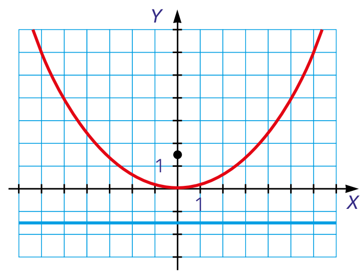
b) $2p = 7 \rightarrow p = \frac{7}{2} \rightarrow F \rightarrow \left(\frac{7}{4}, 0\right)$

Directriz: $x = -\frac{7}{2}$



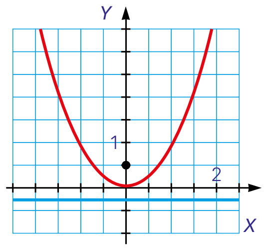
c) $2p = 6 \rightarrow p = 3 \rightarrow F\left(0, \frac{3}{2}\right)$

Directriz: $y = -\frac{3}{2}$



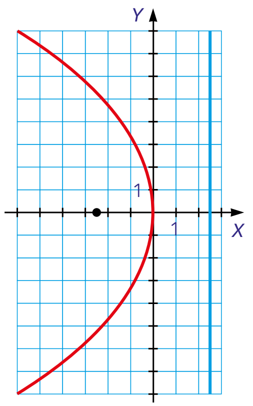
d) $2p = 1 \rightarrow p = \dfrac{1}{2} \rightarrow F\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$

Directriz: $y = -\dfrac{1}{4}$



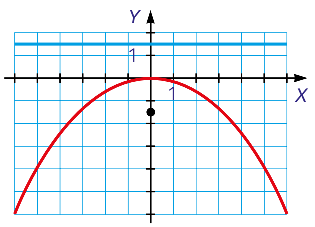
e) $2p = -10 \rightarrow p = -5 \rightarrow F\left(-\dfrac{5}{2}, 0\right)$

Directriz: $x = \dfrac{5}{2}$



f) $2p = -6 \rightarrow p = -3 \rightarrow F\left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$

Directriz: $y = \dfrac{3}{2}$



84 **INVENTA.** Indica tres puntos que pertenezcan a estas parábolas.

a) $x^2 = 6y$

b) $x^2 = 3y$

c) $x^2 = 10y$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $x^2 = 6y \rightarrow P(6, 6)$

b) $x^2 = 3y \rightarrow P(-9, 27)$

c) $x^2 = 10y \rightarrow P\left(2\sqrt{5}, 2\right)$

85 Obtén el vértice, foco y la directriz de cada una de las siguientes parábolas.

a) $(x-5)^2 = 14(y-3)$

b) $(y+6)^2 = 24(x-1)$

c) $(y+4)^2 = -8(x-6)$

d) $(x+4)^2 = -4(y+7)$

e) $(y-2)^2 = -18x$

f) $x^2 = -9(y+1)$

a) $V(5, 3)$

$2p = 14 \rightarrow p = 7 \rightarrow$

$\rightarrow$ Foco: $F\left(5, 3 + \dfrac{7}{2}\right) \rightarrow F\left(5, \dfrac{13}{2}\right)$

Directriz: $y = 3 - \dfrac{7}{2} \rightarrow y = -\dfrac{1}{2}$

b) $V(1, -6)$

$2p = 24 \rightarrow p = 12 \rightarrow$

$\rightarrow$ Foco: $F\left(1 + \dfrac{12}{2}, -6\right) \rightarrow F(7, -6)$

Directriz: $x = 1 - \dfrac{12}{2} \rightarrow x = -5$

c) $V(6, -4)$

$2p = -8 \rightarrow p = -4 \rightarrow$

$\rightarrow$ Foco: $F\left(6 + \dfrac{-4}{2}, -4\right) \rightarrow F(4, -4)$

Directriz: $x = 6 - \dfrac{-4}{2} \rightarrow x = 8$

d) $V(-4, -7)$

$2p = -4 \rightarrow p = -2 \rightarrow$

$\rightarrow$ Foco: $F\left(-4, -7 + \dfrac{-2}{2}\right) \rightarrow F(-4, -8)$

Directriz: $y = -7 - \dfrac{-2}{2} \rightarrow y = -6$

e) $V(0, 2)$

$2p = -18 \rightarrow p = -9 \rightarrow$

$\rightarrow$ Foco: $F\left(0 + \dfrac{-9}{2}, 2\right) \rightarrow F\left(-\dfrac{9}{2}, 2\right)$

Directriz: $x = 0 - \dfrac{-9}{2} \rightarrow x = \dfrac{9}{2}$

f) $V(0, -1)$

$2p = -9 \rightarrow p = -\frac{9}{2} \rightarrow$

$\rightarrow$ Foco: $F\left(0, -1 + \frac{-9}{4}\right) \rightarrow$

$\rightarrow F = \left(0, -\frac{13}{4}\right)$

Directriz: $y = -1 - \frac{-9}{2} \rightarrow y = \frac{5}{4}$

86 Halla la ecuación de la parábola en cada caso.

a) Vértice en $(-5, 8)$ y foco en $(-5, 2)$.

b) Vértice en $(3, 7)$ y foco en $(0, 7)$.

c) Foco en $(3, 5)$ y su directriz es $x = 10$.

d) Vértice en $(2, 3)$ y su directriz es $x = -3$.

a) $(x + 5)^2 = 2p(y - 8) \rightarrow$

$\rightarrow F\left(-5, 8 + \frac{p}{2}\right) \rightarrow 2 = 8 + \frac{p}{2} \rightarrow$
$\rightarrow p = -12 \rightarrow$

$\rightarrow (x + 5)^2 = 2(-12)(y - 8) \rightarrow$
$\rightarrow (x + 5)^2 = -24(y - 8) \rightarrow$
$\rightarrow x^2 + 10x + 24y - 167 = 0$

b) $(y - 7)^2 = 2p(x - 3) \rightarrow$

$\rightarrow F\left(3 + \frac{p}{2}, 7\right) \rightarrow 0 = 3 + \frac{p}{2} \rightarrow$

$p = -6 \rightarrow$
$\rightarrow (y - 7)^2 = 2(-6)(x - 3) \rightarrow$
$\rightarrow y^2 - 14y + 12x + 13 = 0$

c) Sea $P(x, y)$ un punto de la parábola, entonces $d(P, F) = d(P, s)$.

$\sqrt{(x - 3)^2 + (y - 5)^2} = |x - 10| \rightarrow$
$\rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 =$
$= x^2 - 20x + 100 \rightarrow$

$\rightarrow y^2 - 10y + 14x - 66 = 0$

d) $s: x = -3 \rightarrow (y - 3)^2 = 2p(x - 2)$

$-3 - 2 = -\frac{p}{2} \rightarrow p = 10 \rightarrow$

$\rightarrow (y - 3)^2 = 2 \cdot 10(x - 2) \rightarrow$
$\rightarrow (y - 3)^2 = 20(x - 2) \rightarrow$
$\rightarrow y^2 - 6y - 20x + 49 = 0$

87 Obtén la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje OY y que pasa por los puntos $A(2, -4)$, $B(-2, 4)$ y $C(-3, 2)$.

La parábola es de la forma $(x - h)^2 = 2p(y - k)$, siendo $V(h, k)$.

Como A, B y C pertenecen a la parábola:

$$\left.\begin{array}{r}(2 - h)^2 = 2p(-4 - k)\\(-2 - h)^2 = 2p(4 - k)\\(-3 - h)^2 = 2p(2 - k)\end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r}h^2 - 4h + 8p + 2pk + 4 = 0\\h^2 + 4h - 8p + 2pk + 4 = 0\\h^2 + 6h - 4p + 2pk + 9 = 0\end{array}\right\}$$

Se resta la primera ecuación a las otras dos.

$$\left.\begin{array}{r}8h - 16p = 0\\10h - 12p + 5 = 0\end{array}\right\} \rightarrow h = 2p \rightarrow$$

$\rightarrow 10 \cdot 2p - 12p + 5 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow p = -\frac{5}{8} \quad h = -\frac{5}{4}$

Se sustituyen p y h en la primera ecuación.

$$\left(\frac{-5}{4}\right)^2 - 4\left(\frac{-5}{4}\right) + 8\left(\frac{-5}{8}\right) +$$
$$+ 2\left(\frac{-5}{8}\right)\left(\frac{-5}{4}\right) + 4 = 0 \rightarrow k = \frac{89}{20} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = -\frac{5}{4}\left(y - \frac{89}{20}\right)$$

88 Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos que equidistan del punto $P(3, 1)$ y de la recta $r: 3x - 4y + 5 = 0$.

Sea $P(x, y)$ un punto de este lugar geométrico, entonces:

$$\sqrt{(x - 3)^2 + (y - 1)^2} = \frac{|3x - 4y + 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1} =$$
$$= \frac{|3x - 4y + 5|}{5}$$

$$\rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 =$$
$$= \frac{9x^2 + 16y^2 + 25 + 30x - 40y - 24xy}{25}$$

$\rightarrow 25x^2 - 150x + 225 + 25y^2 - 50y + 25 =$
$= 9x^2 + 16y^2 + 25 + 30x - 40y - 24xy$
$\rightarrow 16x^2 + 9y^2 + 24xy - 180x - 10y +$
$+ 225 = 0$

Circunferencia

ACTIVIDADES FLASH

89 En cada uno de los siguientes casos determina la ecuación de la circunferencia correspondiente.

a) $C(0, 0); r = \frac{3}{5}$

b) $C(0, 7); r = 14$

c) $C(5, 0); r = 7$

d) $C(7, -1); r = 5$

e) $C(2, -1); r = \frac{\sqrt{2}}{3}$

f) $C(6, 8); r = \sqrt{2}$

g) $C(12, 4); r = \frac{1}{2}$

h) $C(-4, -3); r = 8$

a) $x^2 + y^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \rightarrow$
$\rightarrow 25x^2 + 25y^2 = 9$

b) $x^2 + (y - 7)^2 = 14^2 \rightarrow$
$\rightarrow x^2 + y^2 - 14y - 147 = 0$

c) $(x - 5)^2 + y^2 = 7^2 \rightarrow$
$\rightarrow x^2 + y^2 - 10x - 24 = 0$

d) $(x - 7)^2 + (y + 1)^2 = 5^2 \rightarrow$
$\rightarrow x^2 + y^2 - 14x + 2y + 25 = 0$

e) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 \rightarrow$
$\rightarrow 9x^2 + 9y^2 - 36x + 18y + 43 = 0$

f) $(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \rightarrow$
$\rightarrow x^2 + y^2 - 12x - 16y + 98 = 0$

g) $(x - 12)^2 + (y - 4)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow$
$\rightarrow 4x^2 + 4y^2 - 96x - 32y + 639 = 0$

h) $(x + 4)^2 + (y + 3)^2 = 8^2 \rightarrow$
$\rightarrow x^2 + y^2 + 8x + 6y - 39 = 0$

90 Obtén la ecuación de la circunferencia en cada uno de los siguientes casos.

a) Centro en $(-2, -5)$ y pasa por $(6, 1)$.

b) Centro en $(7, 2)$ y pasa por $(0, 0)$.

c) Tangente al eje OY y con centro en $(4, -2)$.

d) Tangente al eje OX y con centro en $(0, -3)$.

e) Los extremos de un diámetro son $(5, -4)$ y $(-5, 1)$.

f) Los puntos $(7, -6)$ y $(1, 3)$ son diametralmente opuestos.

a) $(x + 2)^2 + (y + 5)^2 = r^2$
Como $(6, 1)$ está en la circunferencia:
$(6 + 2)^2 + (1 + 5)^2 = r^2 \rightarrow r = 10$
$(x + 2)^2 + (y + 5)^2 = 10^2 \rightarrow$
$\rightarrow x^2 + y^2 + 4x + 10y - 71 = 0$

b) $(x - 7)^2 + (y - 2)^2 = r^2$
Como $(0, 0)$ está en la circunferencia:
$(-7)^2 + (-2)^2 = r^2 \rightarrow r = \sqrt{53}$
$(x - 7)^2 + (y - 2)^2 = \left(\sqrt{53}\right)^2 \rightarrow$
$\rightarrow x^2 + y^2 - 14x - 4y = 0$

c) $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = r^2$
$d(C, OY) = 4 = r$
$(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 4^2 \rightarrow$
$\rightarrow x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0$

d) $x^2 + (y + 3)^2 = r^2$
$d(C, OX) = 3 = r \rightarrow$
$\rightarrow x^2 + (y + 3)^2 = 3^2 \rightarrow x^2 + y^2 + 6y = 0$

e) Longitud del diámetro:
$d((5, -4), (-5, 1)) =$
$= \sqrt{(-5 - 5)^2 + (1 + 4)^2} = 5\sqrt{5} \rightarrow$
$\rightarrow r = \frac{5\sqrt{5}}{2}$
$\left(\frac{5 + (-5)}{2}, \frac{-4 + 1}{2}\right) = \left(0, -\frac{3}{2}\right) \rightarrow$
$\rightarrow C\left(0, -\frac{3}{2}\right)$
$x^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{5\sqrt{5}}{2}\right)^2 \rightarrow$
$\rightarrow 4x^2 + 4y^2 + 12y - 116 = 0$

f) Longitud del diámetro:
$d((7, -6), (1, 3)) =$
$= \sqrt{(1 - 7)^2 + (3 + 6)^2} = 3\sqrt{13} \rightarrow$
$\rightarrow r = \frac{3\sqrt{13}}{2}$
$\left(\frac{7 + 1}{2}, \frac{-6 + 3}{2}\right) = \left(4, -\frac{3}{2}\right) \rightarrow$

$\rightarrow C\left(4, -\frac{3}{2}\right)$

$(x - 4)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3\sqrt{13}}{2}\right)^2 \rightarrow$

$\rightarrow 4x^2 + 4y^2 - 32x + 12y - 44 = 0$

91 Determina la ecuación de una circunferencia con centro en $(-1, 6)$ y que pasa por el punto $(3, -3)$. ¿Está el punto $(-2, -8)$ situado en esa circunferencia?

$(x + 1)^2 + (y - 6)^2 = r^2$

Como pasa por el punto $(3, -3)$:
$(3 + 1)^2 + (-3 - 6)^2 = 97 \rightarrow r = \sqrt{97}$

La ecuación simplificada es:
$x^2 + y^2 + 2x - 12y - 60 = 0$

Sustituimos:
$(-2)^2 + (-8)^2 + 2(-2) - 12(-8) - 60 =$
$= 100 \neq 0$
$(-2, -8)$ no pertenece a la circunferencia.

92 El segmento de extremos $(-5, 0)$ y $(25, 0)$ es el diámetro de una circunferencia. Si el punto $(x, 15)$ pertenece a la circunferencia, ¿cuánto vale x?

Sean $A(-5, 0)$ y $B(25, 0)$:
$d(A, B) = 30 \rightarrow r = 15$

El punto medio del diámetro es el centro de la circunferencia: $C(10, 0)$.

$d((x, 15), C) = \sqrt{(x - 10)^2 + 15^2} = 15 \rightarrow$
$\rightarrow x^2 + 100 - 20x + 225 = 225 \rightarrow$
$\rightarrow x^2 - 20x + 100 = 0 \rightarrow x = 10$

93 Escribe la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(-3, 7)$ y $(11, 3)$ y tiene radio de 2 unidades.

La distancia entre los dos puntos es mayor que 4, por lo tanto, no pueden estar los dos puntos en una circunferencia de diámetro 4 u.

94 Estudia si las siguientes ecuaciones corresponden a circunferencias. En caso afirmativo, calcula su centro y su radio.

a) $x^2 + y^2 - 9x + 6y + 41 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 3 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 10x + 12y + 33 = 0$
d) $x^2 + y^2 - x + 12y + 41 = 0$

a) $\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + (y + 3)^2 = -\frac{47}{4} \rightarrow$
$\rightarrow$ No es una circunferencia.

b) $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 38 \rightarrow$
$\rightarrow$ Corresponde a una circunferencia con $C(-4, 5)$ y $r = \sqrt{38}$.

c) $(x + 5)^2 + (y + 6)^2 = 28 \rightarrow$
$\rightarrow$ Corresponde a una circunferencia con $C(-5, -6)$ y $r = 2\sqrt{7}$.

d) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 6)^2 = -\frac{19}{4} \rightarrow$
$\rightarrow$ No es una circunferencia.

95 **INVESTIGA.** Considera la circunferencia centrada en el origen que pasa por el punto $A(2, 1)$. Sea r una recta tangente a la circunferencia en el punto A, determina la ecuación de la recta r.

El vector director de la recta es perpendicular al radio de la circunferencia. $\vec{u}(2, 1)$ es el vector que va desde el centro de la circunferencia hasta A y $\vec{v}(1, -2)$ es el vector director de la recta tangente a la circunferencia en A, y su pendiente es -2.

La ecuación de la recta buscada es
$y - 1 = -2(x - 2)$.

96 Considera la circunferencia $x^2 + (y - 1)^2 = 2$ que corta el eje OX en dos puntos. Sea A aquel punto con abscisa positiva. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en A?

Necesitamos calcular el punto A y el vector director de la recta.

La ecuación de una circunferencia de centro $C(a, b)$ es: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

El centro es $C(0, 1)$ y el radio mide $\sqrt{2}$ u.

Los puntos de corte de la circunferencia con el eje X son $A(1, 0)$ y $B(-1, 0)$.

$\overrightarrow{CA} = (1, 0) - (0, 1) = (1, -1)$

El vector director de la recta es perpendicular a $\overrightarrow{CA} \to \vec{u} = (-1, -1) \to$ $\to$ La pendiente es 1.

Por tanto, la ecuación de la recta buscada es $y = x - 1$.

97 Halla en cada caso la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A, B y C.

a) $A(2, 8)$, $B(2, -5)$ y $C(0, 0)$

b) $A(4, 0)$, $B(-1, -2)$ y $C(1, 4)$

c) $A(0, 2)$, $B(1, 7)$ y $C(-3, -4)$

a) $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Como D, E, F están en la circunferencia:

$2^2 + 8^2 + D2 + E8 + F = 0 \to$
$\to 2D + 8E + F + 68 = 0$

$2^2 + (-5)^2 + D2 + E(-5) + F = 0 \to$
$\to 2D - 5E + F + 29 = 0$

$F = 0$

$$\left.\begin{array}{r} 2D + 8E + 68 = 0 \\ 2D - 5E + 29 = 0 \end{array}\right\}$$

Restamos la segunda ecuación a la primera: $13E + 39 = 0 \to E = -3$

Sustituimos en la primera:
$2D + 8 \cdot (-3) + 68 = 0 \to D = -22$

$x^2 + y^2 - 22x - 3y = 0$

b) $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Como D, E, F están en la circunferencia:

$4^2 + 0 + 4D + 0 + F = 0 \to$
$\to 4D + F + 16 = 0 \to F = -4D - 16$

$(-1)^2 + (-2)^2 + D(-1) + E(-2) + F = 0$
$\to -D - 2E + F + 5 = 0$

$1 + 4^2 + D + E4 + F = 0 \to$
$\to D + 4E + F + 17 = 0$

Sustituimos en las dos ecuaciones:

$D - 2E - 4D - 16 + 5 = 0 \to$
$\to -5D - 2E - 11 = 0$

$D + 4E - 4D - 16 + 17 = 0 \to$
$\to -3D + 4E + 1 = 0$

$D = -\dfrac{21}{13} \qquad F = \dfrac{124}{13} \qquad E = -\dfrac{19}{13}$

$x^2 + y^2 - \dfrac{21x}{13} - \dfrac{19y}{13} - \dfrac{124}{13} = 0 \to$

$\to 13x^2 + 13y^2 - 21x - 19y - 124 = 0$

c) $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Como D, E, F están en la circunferencia:

$0 + 2^2 + 0 + E2 + F = 0 \to$
$\to 2E + F + 4 = 0 \to F = -2E - 4$

$1 + 7^2 + D + E7 + F = 0 \to$
$\to D + 7E + F + 50 = 0$

$(-3)^2 + (-4)^2 + D(-3) + E(-4) + F = 0$
$\to -3D - 4E + F + 25 = 0$

Sustituimos en las dos ecuaciones:

$D + 7E - 2E - 4 + 50 = 0 \to$
$\to D + 5E + 46 = 0$

$E = -\dfrac{53}{3} \to F = \dfrac{94}{3}$

$-3D - 4E - 2E - 4 + 25 = 0 \to$
$\to -3D - 6E + 21 = 0 \qquad D = \dfrac{127}{3}$

$x^2 + y^2 + \dfrac{127x}{3} - \dfrac{53y}{3} + \dfrac{94}{3} = 0 \to$

$\to 3x^2 + 3y^2 + 127x - 53y + 94 = 0$

98 Determina el punto de la circunferencia de centro (2, 8) y cuyo radio mide 5 unidades que esté más próximo a cada uno de los siguientes puntos.

a) $P(7, 18)$

b) $Q(-1, 6)$

c) $R(5, 4)$

La ecuación de la circunferencia es:
$(x - 2)^2 + (y - 8)^2 = 25 \to$
$\to x^2 + y^2 - 4x - 16y + 43 = 0$

a) La recta que pasa por P y el centro de la circunferencia es: $2x - y + 4 = 0$.

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 4x - 16y + 43 = 0 \\ y = 2x + 4 \end{array}\right\} \to$$

$\to x^2 - 4x - 1 = 0 \to x = 2 \pm \sqrt{5}$

Las coordenadas del punto más próximo son $\left(2 + \sqrt{5}, 8 + 2\sqrt{5}\right)$.

b) La recta que pasa por Q y el centro de la circunferencia es $2x - 3y + 20 = 0$.

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 4x - 16y + 43 = 0 \\ y = \dfrac{2x + 20}{3} \end{array}\right\} \to$$

$\to 13x^2 - 52x - 173 = 0 \to$

$\to x = \dfrac{26 \pm 15\sqrt{13}}{13}$

Las coordenadas del punto más próximo son $\left(\dfrac{26-15\sqrt{13}}{13}, \dfrac{104-10\sqrt{13}}{13}\right)$.

c) $5^2+4^2-4\cdot 5-16\cdot 4+43=0$

Como R pertenece a la circunferencia, coincide con el punto pedido.

99 Dada la ecuación de la circunferencia:

$$x^2+y^2+4x+2y-20=0$$

halla la ecuación de las rectas tangente y normal en el punto (2, 2).

$A=4 \rightarrow a=-2 \qquad B=2 \rightarrow b=-1$

El centro es el punto $(-2, -1)$

$\begin{cases} C=-20 \\ C=a^2+b^2-r^2 \rightarrow r=5 \end{cases}$

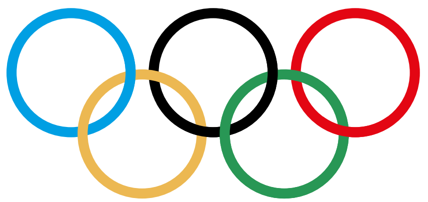
La recta normal pasa por el punto (2, 2) y por el centro $(-2, -1) \rightarrow$

$\rightarrow \; 3x-4y+2=0$

La recta tangente pasa por el punto (2, 2) y es perpendicular a la normal. $\rightarrow$

$\rightarrow 4x+3y-14=0$

100 **INVENTA.** El logotipo de los Juegos Olímpicos son cinco anillos entrelazados que representan los cinco continentes.

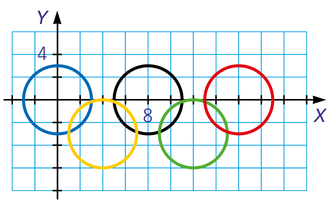


a) Indica cinco ecuaciones para representar cada una de las circunferencias.

b) Determina en qué puntos se cortan el anillo verde y el anillo negro.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a)



Azul: $x^2+y^2=9$

Negro: $(x-8)^2+y^2=9$

Rojo: $(x-16)^2+y^2=9$

Amarillo: $(x-4)^2+(y+3)^2=9$

Verde: $(x-12)^2+(y+3)^2=9$

b) $\left.\begin{array}{r}(x-8)^2+y^2=9 \\ (x-12)^2+(y+3)^2=9\end{array}\right\} \rightarrow$

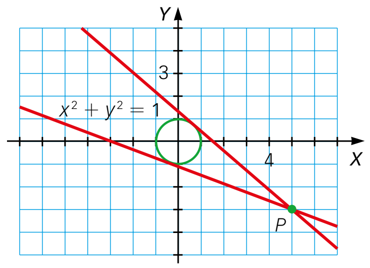
$\rightarrow (x-12)^2+\left(\sqrt{9-(x-8)^2}+3\right)^2=9 \rightarrow$

$\rightarrow 100x^2-2\,000x+9\,901=0 \rightarrow$

$\rightarrow x_1=10{,}99 \qquad x_2=9{,}01$

El anillo verde y el negro se cortan en los puntos $A(10{,}99; -0{,}17)$ y $B(9{,}01; -2{,}83)$.

101 Obtén la ecuación de las rectas que pasan por el punto $P(5, -3)$ y que son tangentes a la circunferencia cuya ecuación es $x^2+y^2=1$.



La ecuación de la tangente es de la forma: $y=Ax+B$.

Como es tangente a la circunferencia, la intersección entre la recta y la circunferencia es un único punto.

$x^2+(Ax+B)^2=1 \rightarrow$

$\rightarrow (1+A^2)x^2+2ABx+B^2-1=0$

$\Delta=(2AB)^2-4(1+A^2)(B^2-1)=0 \rightarrow$

$\rightarrow -B^2+A^2+1=0$

Como $P(5, -3)$ pertenece a la tangente:

$-3=A5+B \rightarrow B=-3-5A$

Sustituyendo B en la ecuación del discriminante se tiene $12A^2+15A+4=0$, y resolviendo esta ecuación se obtiene:

$$A=\frac{-15+\sqrt{33}}{24} \rightarrow B=\frac{3-5\sqrt{33}}{24}$$

$$A=\frac{-15-\sqrt{33}}{24} \rightarrow B=\frac{3+5\sqrt{33}}{24}$$

Rectas tangentes:

$$y=\frac{-15+\sqrt{33}}{24}x+\frac{3-5\sqrt{33}}{24} \rightarrow$$

$$\rightarrow 24y=\left(-15+\sqrt{33}\right)x+\left(3-5\sqrt{33}\right)$$

$$y = \frac{-15 - \sqrt{33}}{24}x + \frac{3 + 5\sqrt{33}}{24} \rightarrow$$
$$\rightarrow 24y = \left(-15 - \sqrt{33}\right)x + \left(3 + 5\sqrt{33}\right)$$

102 De una circunferencia que tiene centro $C(2, -3)$ se sabe que es tangente a la recta $t: x + y - 3 = 0$.

a) Calcula la distancia entre el centro de la circunferencia y la recta t.

b) ¿Qué posición relativa tienen la recta tangente y el radio que determina el punto de tangencia?

c) ¿Cuánto mide el radio de la circunferencia?

d) Escribe la ecuación de la circunferencia.

a) $d(C, t) = \dfrac{|2 - 3 - 3|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ u

b) La recta tangente y el radio en el punto de tangencia son perpendiculares.

c) $r = d(C, t) = 2\sqrt{2}$ u

d) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 8$

103 Determina la ecuación de la circunferencia de centro $(1, -3)$ que es tangente a la recta cuya ecuación es $3x + y - 2 = 0$.

$$r = d(C, t) = \frac{|3 - 3 - 2|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = \frac{2}{5} \rightarrow$$
$$\rightarrow 5x^2 + 5y^2 - 10x + 30y + 48 = 0$$

104 Determina la ecuación de la circunferencia tangente a la recta $x + y + 5 = 0$ en $(-3, -2)$ y cuyo centro está sobre el eje OY.

$$C(0, k) \rightarrow r = d(C, t) = \frac{|0 + k + 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} =$$
$$= \frac{|k + 5|}{\sqrt{2}} = \frac{|k + 5|\sqrt{2}}{2}$$

$$x^2 + (y - k)^2 = \frac{2(k + 5)^2}{4} \rightarrow$$
$$\rightarrow x^2 + (y - k)^2 = \frac{(k + 5)^2}{2}$$

Como $(-3, -2)$ está en la circunferencia:

$$(-3)^2 + (-2 - k)^2 = \frac{(k + 5)^2}{2} \rightarrow k = 1 \rightarrow$$
$$\rightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 18 \rightarrow$$
$$\rightarrow x^2 + y^2 - 2y - 17 = 0$$

105 Determina la ecuación de la circunferencia de centro $(4, -2)$ que es tangente a la recta $x - 3y = -5$.

$$r = d(C, t) = \frac{|4 + 6 + 5|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{15}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

$$(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = \frac{45}{2} \rightarrow$$
$$\rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 16x + 8y - 5 = 0$$

106 Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(3, 9)$ y $B(8, 4)$ y tiene su centro en la recta cuya ecuación es $2x - 5y + 14 = 0$.

El centro equidista de los puntos A y B, por lo que se encuentra en la mediatriz del segmento AB. Sea $P(x, y)$ un punto de esa mediatriz, entonces $d(A, P) = d(B, P)$.

$$\sqrt{(x - 3)^2 + (y - 9)^2} =$$
$$= \sqrt{(x - 8)^2 + (y - 4)^2} \rightarrow$$
$$\rightarrow x^2 - 6x + y^2 - 18y + 90 =$$
$$= x^2 - 16x + y^2 - 8y + 80 \rightarrow$$
$$\rightarrow x - y + 1 = 0$$

El centro es la intersección de esa recta y la recta dada.

$$\left.\begin{aligned} x - y + 1 &= 0 \\ 2x - 5y + 14 &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow C(3, 4) \rightarrow$$
$$\rightarrow r^2 = (3 - 3)^2 + (4 - 9)^2 = 25$$
$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25 \rightarrow$$
$$\rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$$

107 Determina la ecuación de la circunferencia tangente a la recta $3x - 2y + 4 = 0$ en $(2, 5)$ y cuyo centro está sobre el eje OX.

$$C(h, 0) \rightarrow r = d(C, t) = \frac{|3h + 4|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} =$$
$$= \frac{|3h + 4|}{\sqrt{13}}$$

$$(x - h)^2 + y^2 = \frac{(3h + 4)^2}{13}$$

Como (2, 5) está en la circunferencia:

$(2-h)^2+5^2=\dfrac{(3h+4)^2}{13} \rightarrow h=\dfrac{19}{2}$

$\left(x-\dfrac{19}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{4\,225}{52} \rightarrow$

$\rightarrow 52x^2+52y^2-988x+468=0$

108 Halla los puntos de intersección de la circunferencia $x^2+y^2-4x+6y-28=0$ con estas rectas.

a) $r: x+9y-16=0$

b) $s: x+y+2=0$

c) $t: 4x-5y-23=0$

d) $u: x-y-4=0$

a) $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2-4x+6y-28=0 \\ x+9y-16=0 \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow y^2-3y+2=0$

Puntos de intersección: (7, 1) y (−2, 2).

b) $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2-4x+6y-28=0 \\ x+y+2=0 \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow x^2-3x-18=0$

Puntos de intersección: (6, −8) y (−3, 1).

c) $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2-4x+6y-28=0 \\ 4x-5y-23=0 \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow x^2-4x-21=0$

Puntos de intersección: (7, 1) y (−3, −7).

d) $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2-4x+6y-28=0 \\ x-y-4=0 \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow 2y^2+10y-28=0$

Puntos de intersección (6, 2) y (−3, −7).

109 Halla los puntos de intersección de las siguientes circunferencias.

a) $c_1: x^2+y^2-6x-6y+13=0$
$c_2: x^2+y^2-8x+11=0$

b) $c_1: x^2+y^2+6x-4y+8=0$
$c_2: x^2+y^2+4x-10y+24=0$

a) $c_1: (x-3)^2+(y-3)^2=5 \rightarrow$
$\rightarrow C_1(3, 3)$ y $r_1=\sqrt{5}$

$c_2: (x-4)^2+y^2=5 \rightarrow C_2(4, 0)$ y $r_2=\sqrt{5}$

$d(C_1, C_2)=\sqrt{(4-3)^2+(0-3)^2}=$
$=\sqrt{10}<r_1+r_2$ y $\sqrt{10}>r_1-r_2 \rightarrow$
$\rightarrow$ Secantes (dos puntos de intersección).

Se resuelve el sistema formado por c_1 y c_2.

$x-3y+1=0 \rightarrow x=3y-1$

$(3y-1)^2+y^2-8(3y-1)+11=0 \rightarrow$
$\rightarrow y^2-3y+2=0 \rightarrow y_1=1, y_2=2 \rightarrow$
$\rightarrow x_1=2, x_2=5$

Puntos de intersección: (2, 1) y (5, 2)

b) $c_1: (x+3)^2+(y-2)^2=5 \rightarrow$
$\rightarrow C_1(-3, 2)$ y $r_1=\sqrt{5}$

$c_2: (x+2)^2+(y-5)^2=5 \rightarrow$
$\rightarrow C_2(-2, 5)$ y $r_2=\sqrt{5}$

$d(C_1, C_2)=\sqrt{(-2+3)^2+(5-2)^2}=$
$=\sqrt{10}<r_1+r_2$ y $\sqrt{10}>r_1-r_2 \rightarrow$
$\rightarrow$ Secantes (dos puntos de intersección).

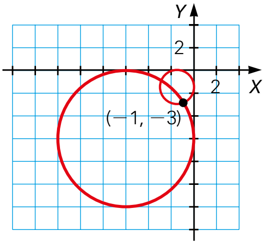
Se resuelve el sistema formado por c_1 y c_2.

$x+3y-8=0 \rightarrow x=-3y+8$

$(8-3y)^2+y^2+$
$+6(8-3y)-4y+8=0 \rightarrow$
$\rightarrow y^2-7y+12=0 \rightarrow y_1=3, y_2=4 \rightarrow$
$\rightarrow x_1=-1, x_2=-4$

Puntos de intersección: (−1, 3) y (−4, 4)

110 Obtén la ecuación de las circunferencias tangentes a los ejes de coordenadas que pasan por el punto (−1, −3).



Los centros de las circuferencias se encuentran en la bisectriz del primer cuadrante: $x=y$, así que, por tanto, los centros serán de la forma $C(h, h)$.

La ecuación de la circunferencia es de la forma: $(x-h)^2+(y-h)^2=r^2$

La intersección de las circunferencias con los ejes es un único punto.

Con el eje Y:
$x=0 \rightarrow (0-h)^2+(y-h)^2=r^2 \rightarrow$
$\rightarrow y^2-2hy+2h^2-r^2=0$

Como la solución es única, el discriminante de esta ecuación de segundo grado ha de ser cero: $4h^2 - 4(2h^2 - r^2) = 0 \rightarrow h^2 = r^2$

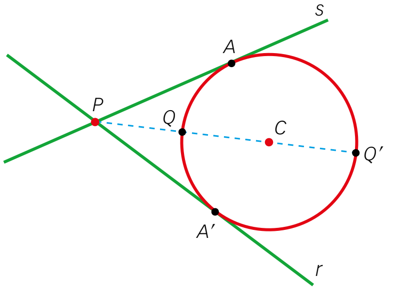
$x^2 + y^2 - 2hx - 2hy + h^2 = 0$

$P(-1, -3)$ pertenece a la circunferencia:
$(-1)^2 + (-3)^2 - 2h(-1) - 2h(-3) + h^2 = 0$
$\rightarrow h = r = -4 \pm \sqrt{6}$

c_1: $\left(x + 4 + \sqrt{6}\right)^2 + \left(y + 4 + \sqrt{6}\right)^2 =$
$= \left(-4 - \sqrt{6}\right)^2$

c_2: $\left(x + 4 - \sqrt{6}\right)^2 + \left(y + 4 - \sqrt{6}\right)^2 =$
$= \left(-4 + \sqrt{6}\right)^2$

111 Dadas las rectas r: $3x + 4y - 10 = 0$, s: $5x - 12y + 2 = 0$ y la circunferencia $x^2 + y^2 - 20x + 84 = 0$.



a) Comprueba que las dos rectas, r y s, son tangentes a la circunferencia.

b) Halla el punto P de intersección de ambas rectas, el punto C, que es centro de la circunferencia, y los puntos A y A', en los que las rectas son tangentes a la circunferencia.

c) Si d es la distancia que separa P de C, entonces la distancia de P a Q es $d - r$, y la distancia de P a Q' es $d + r$. Demuestra que $|\overline{PQ}| \cdot |\overline{PQ'}| = |\overline{PA}|^2$.

a) $\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 20x + 84 = 0 \\ 3x + 4y - 10 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow 25x^2 - 380x + 1\,444 = 0$

$\Delta = 0 \rightarrow$ La ecuación tiene una solución; por tanto, la recta es tangente a la circunferencia.

$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 20x + 84 = 0 \\ 5x - 12y + 2 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow 169x^2 - 2\,860x + 12\,100 = 0$

$\Delta = 0 \rightarrow$ La ecuación tiene una solución; por tanto, la recta es tangente a la circunferencia.

b) $\left.\begin{array}{r} 3x + 4y - 10 = 0 \\ 5x - 12y + 2 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 9x + 12y - 30 = 0 \\ 5x - 12y + 2 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow P(2, 1)$

$x^2 + y^2 - 20x + 84 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow (x - 10)^2 + y^2 = 16 \rightarrow C(10, 0)$

$25x^2 - 380x + 1\,444 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow x = \dfrac{38}{5} \rightarrow A\left(\dfrac{38}{5}, -\dfrac{16}{5}\right)$

$169x^2 - 2\,860x + 12\,100 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow x = \dfrac{110}{13} \rightarrow A'\left(\dfrac{110}{13}, \dfrac{48}{13}\right)$

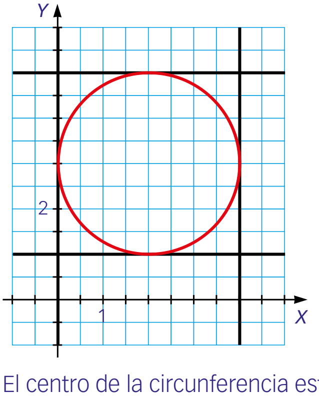
c) $x^2 + y^2 - 20x + 84 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow (x - 10)^2 + y^2 = 16 \rightarrow r = 4$

$d = \sqrt{(10 - 2)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{65}$

$\overline{PQ} \cdot \overline{PQ'} = \left(\sqrt{65} - 4\right) \cdot \left(\sqrt{65} + 4\right) =$
$= 65 - 16 = 49$

$\overline{PA}^2 = \left(\dfrac{38}{5} - 2\right)^2 + \left(-\dfrac{16}{5} - 1\right)^2 =$
$= \dfrac{784}{25} + \dfrac{441}{25} = 49$

112 **INVESTIGA.** Considera el cuadrado definido por las condiciones $0 \leq x \leq 4$ y $1 \leq y \leq 5$. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia inscrita en este cuadrado?



El centro de la circunferencia está a la misma distancia de todas las rectas, por tanto es el punto $C(2, 3)$ y su radio mide 2 u.
$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$

113 **RETO.** Sea la circunferencia $(x-5)^2+(y-4)^2=4$, determina cuál es el punto sobre ella más cercano a la circunferencia $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

Los puntos más cercanos y los más lejanos son los puntos de intersección entre las circunferencias y la recta que une los centros.

$$r \equiv \begin{cases} C_1(5,4) \\ C_2(1,1) \end{cases} \to \overrightarrow{C_1C_2} = \vec{v} = (4,3) \to$$

$$\to r \equiv \begin{cases} x = 1+4\lambda \\ y = 1+3\lambda \end{cases}$$

Calculamos los puntos de corte de la primera circunferencia con la recta que une los centros de ambas circunferencias.

$$\left.\begin{array}{l} (x-5)^2+(y-4)^2=4 \\ x=1+4\lambda \\ y=1+3\lambda \end{array}\right\} \to$$

$$\to 25\lambda^2-50\lambda+21=0 \to$$

$$\to \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{7}{5} \to P_1\left(\dfrac{33}{5}, \dfrac{26}{5}\right) \\ \lambda_2 = \dfrac{3}{5} \to P_2\left(\dfrac{17}{5}, \dfrac{14}{5}\right) \end{cases}$$

El punto más próximo a la circunferencia de centro $(1, 1)$ es P_2.

También podemos calcular los puntos de corte de la recta con la segunda circunferencia, si queremos hallar la medida de la distancia mínima entre las circunferencias.

$$\left.\begin{array}{l} (x-1)^2+(y-1)^2=1 \\ x=1+4\lambda \\ y=1+3\lambda \end{array}\right\} \to 25\lambda^2=1 \to$$

$$\to \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{1}{5} \to Q_1\left(\dfrac{9}{5}, \dfrac{8}{5}\right) \\ \lambda_2 = -\dfrac{1}{5} \to Q_2\left(\dfrac{1}{5}, \dfrac{2}{5}\right) \end{cases}$$

Los puntos más cercanos entre sí son P_2 y Q_1. La distancia entre ellos será:

$$d(P_2, Q_1) = \left|\overrightarrow{P_2Q_1}\right| = \sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2+\left(\frac{6}{5}\right)^2} = 2 \text{ u}$$

2. Estudia posiciones relativas y realiza intersecciones entre rectas y cónicas

114 Considera la circunferencia $(x-2)^2+y^2=1$ y la recta $y=mx$.

a) Sustituye el valor de y de la recta en la ecuación de la circunferencia en el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} y = mx \\ (x-2)^2+y^2=1 \end{array}\right\}$$

para obtener una ecuación de segundo grado con una sola incógnita, x.

b) Indica para qué valores de m existe una única solución del sistema y, por tanto, la recta y la circunferencia son tangentes.

c) Estudia para qué valores de m existen dos soluciones y, por tanto, la recta es secante a la circunferencia.

d) Determina para qué valores de m la recta es exterior a la circunferencia.

a) $(x-2)^2+(mx)^2=1 \to$
$\to (m^2+1)x^2-4x+3=0$

b) Vemos para qué valores de m es nulo el discriminante.

$16-12(m^2+1)=0 \to$

$$\to m_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad m_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

c) $16-12(m^2+1)>0 \to$

$$\to m \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

d) $16-12(m^2+1)<0 \to$

$$\to m \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$$

115 Estudia la posición relativa de la recta $y=mx+2$ respecto de la circunferencia $(x-3)^2+(y-2)^2=4$ según el valor de m.

$(x-3)^2+(mx+2-2)^2=4 \to$
$\to (1+m^2)x^2-6x+5=0$
$\Delta = 36-4\cdot(1+m^2)\cdot 5 =$
$= 16+20m^2$

$16 - 20m^2 = 0 \rightarrow m^2 = \frac{4}{5} \rightarrow m = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$

La recta y la circunferencia son tangentes.

$16 - 20m^2 < 0 \rightarrow m < -\frac{2\sqrt{5}}{5} \rightarrow$

$\rightarrow m > \frac{2\sqrt{5}}{5} \rightarrow$ exterior.

$16 - 20m^2 > 0 \rightarrow -\frac{2\sqrt{5}}{5} < m < \frac{2\sqrt{5}}{5} \rightarrow$

La recta y la circunferencia son secantes.

116 Determina la posición relativa de la recta $y = mx + 2$ respecto de la circunferencia $x^2 + 4x + y^2 - 6y - 12 = 0$ en función del valor que tome m.

$x^2 + 4x + (mx + 2)^2 - 6(mx + 2) - 12 =$
$= 0 \rightarrow (1 + m^2)x^2 - (4 - 2m)x - 20 = 0$

$\Delta = (4 - 2m)^2 - 4 \cdot (-20) \cdot (1 + m^2) =$
$= 84m^2 - 16m + 96$

$84m^2 - 16m + 96 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow$ No tiene solución.

$84m^2 - 16m + 96 < 0 \rightarrow$
$\rightarrow$ No tiene solución.

$84m^2 - 16m + 96 > 0$ para cualquier valor de m. Por tanto, la recta es secante a la circunferencia para cualquier valor de m.

117 Estudia la posición relativa de los siguientes pares de circunferencias.

a) C_1: $x^2 + y^2 - 8x + 5y - 7 = 0$
C_2: $x^2 + y^2 - 8x + 5y - 15 = 0$

b) C_1: $x^2 + y^2 - 7x - 11y - 3 = 0$
C_2: $x^2 + y^2 - 7x - 10y + 2 = 0$

c) C_1: $x^2 + y^2 + 8x + 4y - 11 = 0$
C_2: $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$

d) C_1: $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 4 = 0$
C_2: $x^2 + y^2 - 2x - 8y - 32 = 0$

e) C_1: $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 15 = 0$
C_2: $x^2 + y^2 - 12x - 10y + 45 = 0$

f) C_1: $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 18 = 0$
C_2: $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 22 = 0$

a) C_1: $(x - 4)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{117}{4} \rightarrow$
$\rightarrow C_1\left(4, -\frac{5}{2}\right)$ y $r_1 = \frac{\sqrt{117}}{2}$

C_2: $(x - 4)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{149}{4} \rightarrow$
$\rightarrow C_2\left(4, -\frac{5}{2}\right)$ y $r_2 = \frac{\sqrt{149}}{2}$

$C_1 = C_2$ y $r_2 > r_1 \rightarrow$ Son concéntricas.

b) C_1: $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{2}\right)^2 = \frac{182}{4} \rightarrow$
$\rightarrow C_1\left(\frac{7}{2}, \frac{11}{2}\right)$ y $r_1 = \frac{\sqrt{182}}{2}$

C_2: $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + (y - 5)^2 = \frac{141}{4} \rightarrow$
$\rightarrow C_2\left(\frac{7}{2}, 5\right)$ y $r_2 = \frac{\sqrt{141}}{2}$

$d(C_1, C_2) = \sqrt{0 + \left(5 - \frac{11}{2}\right)^2} =$
$= \frac{1}{2} < r_1 - r_2 \rightarrow$ Son interiores.

c) C_1: $(x + 4)^2 + (y + 2)^2 = 31 \rightarrow$
$\rightarrow C_1(-4, -2)$ y $r_1 = \sqrt{31}$

C_2: $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4 \rightarrow$
$\rightarrow C_2(3, 4)$ y $r_2 = 2$

$d(C_1, C_2) = \sqrt{(-4 - 3)^2 + (-2 - 4)^2} =$
$= \sqrt{85} > r_1 + r_2 \rightarrow$ Son exteriores.

d) C_1: $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 1 \rightarrow$
$\rightarrow C_1(-2, -1)$ y $r_1 = 1$

C_2: $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 49 \rightarrow$
$\rightarrow C_2(1, 4)$ y $r_2 = 7$

$d(C_1, C_2) = \sqrt{(1 + 2)^2 + (4 + 1)^2} =$
$= 5{,}83 < r_2 - r_1 \rightarrow$ Son interiores.

e) C_1: $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 20 \rightarrow$
$\rightarrow C_1(-2, 1)$ y $r_1 = 2\sqrt{5}$

C_2: $(x - 6)^2 + (y - 5)^2 = 16 \rightarrow$
$\rightarrow C_2(6, 5)$ y $r_2 = 4$

$d(C_1, C_2) = \sqrt{(6 + 2)^2 + (5 - 1)^2} =$
$= 4\sqrt{5} > r_2 + r_1 \rightarrow$ Son exteriores.

f) C_1: $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 2 \rightarrow$
$\rightarrow C_1(-4, 2)$ y $r_1 = \sqrt{2}$

C_2: $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 32 \rightarrow$
$\rightarrow C_2(1, -3)$ y $r_2 = \sqrt{32}$

$d(C_1, C_2) = \sqrt{(1 + 4)^2 + (-3 - 2)^2} =$
$= 5\sqrt{2} = r_2 + r_1 \rightarrow$
$\rightarrow$ Son tangentes exteriores.

118 Calcula el valor que debe tener k para que la recta r y la circunferencia c sean tangentes.

a) $r: 3x + 2y + k = 0$
$c: x^2 + y^2 - 6x + 8y - 6 = 0$

b) $r: 4x + 2y + k = 0$
$c: x^2 + y^2 + 6x + 10y - 1 = 0$

a) $x = -\dfrac{2y + k}{3}$

$\left(\dfrac{2y+k}{3}\right)^2 + y^2 + 6\left(\dfrac{2y+k}{3}\right) +$
$+ 8y - 6 = 0 \rightarrow 13y^2 + (108 + 4k)y +$
$+ k^2 + 18k - 54 = 0$

Para que sean tangentes la solución debe ser única.

$(108 + 4k)^2 - 4 \cdot 13 \cdot (k^2 + 18k - 54) = 0$
$\rightarrow k = -1 \pm \sqrt{403}$

b) $x = -\dfrac{2y + k}{4}$

$\left(-\dfrac{2y+k}{4}\right)^2 + y^2 + 6\left(-\dfrac{2y+k}{4}\right) +$
$+ 10y - 1 = 0 \rightarrow 20y^2 +$
$+ (112 + 4k)y + k^2 - 24k - 16 = 0$

Para que sean tangentes la solución debe ser única.

$(112 + 4k)^2 - 4 \cdot 20 \cdot (k^2 - 24k - 16) = 0$
$\rightarrow k = 22 \pm 10\sqrt{7}$

119 Obtén el valor del coeficiente C en la circunferencia $x^2 + y^2 + 10x + 2y + C = 0$ para que sea tangente a la recta $2x + 3y = 0$.

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + 10x + 2y + C &= 0 \\ 2x + 3y &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow 13x^2 + 78x + 9C = 0$

Para que sean tangentes la solución debe ser única.

$6084 - 468C = 0 \rightarrow C = 13$

120 Estudia la posición relativa del punto $P(-3, 2)$ respecto de la circunferencia $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = k$ según sea el valor de k.

$C(1, -3) \qquad r = \sqrt{k}$

$d(P, C) = \sqrt{(1 + 3)^2 + (-3 - 2)^2} = \sqrt{41}$

Si $k = 41 \rightarrow P$ está en la circunferencia.

Si $k > 41 \rightarrow P$ es interior.

Si $0 < k < 41 \rightarrow P$ es exterior.

121 Calcula la ecuación de la recta que pasa por los puntos de corte de estas circunferencias.

$$x^2 - 4x + y^2 - 2y = 0$$
$$x^2 + 2x + y^2 + 2y = 18$$

$6x + 4y = 18 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - 4x + \left(\dfrac{9 - 3x}{2}\right)^2 - (9 - 3x) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 13x^2 - 58x + 45 = 0 \rightarrow$

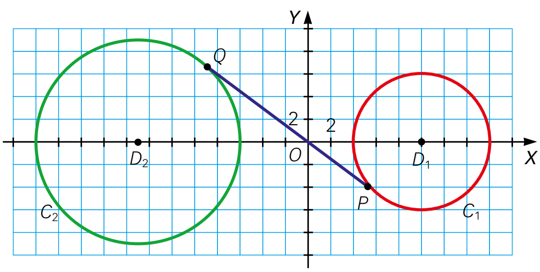
$\rightarrow x_1 = 1 \qquad x_2 = \dfrac{45}{13}$

Los puntos de corte son $P(1, 3)$ y $Q\left(\dfrac{45}{13}, -\dfrac{9}{13}\right)$.

$\overrightarrow{PQ} = \left(\dfrac{32}{13}, -\dfrac{48}{13}\right) \rightarrow$

$\rightarrow y - 3 = -\dfrac{3}{2}(x - 1)$

122 **INVESTIGA.** Sean $C_1 = (x - 10)^2 + y^2 = 36$ y $C_2 = (x + 15)^2 + y^2 = 81$, averigua cuánto mide el menor segmento PQ que sea tangente a C_1 en P y tangente a C_2 en Q.



Consideramos los triángulos:

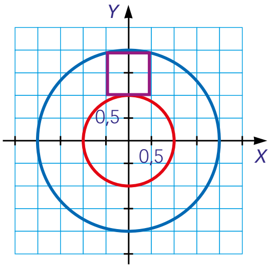
- $\widehat{PD_1O}$, que es rectángulo en P, de hipotenusa 10 u y cateto $\overline{PD_1} = r_1 = 6$ u $\rightarrow$ $\rightarrow$ La longitud del segundo cateto es $\overline{PO} = 8$ u.

- $\widehat{QD_2O}$, rectángulo en Q, de hipotenusa 15 u y cateto $\overline{QD_2} = r_2 = 9$ u $\rightarrow$ La longitud del segundo cateto es $\overline{QO} = 12$ u.

Por tanto, el segmento mide 20 u.

123 ●●● El lado CD del cuadrado $ABCD$ es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en el punto (0, 1). Por otra parte, los vértices A y B están sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$.

¿Cuánto mide el lado del cuadrado?



Si llamamos z a la medida del lado del cuadrado, las coordenadas de A y B son

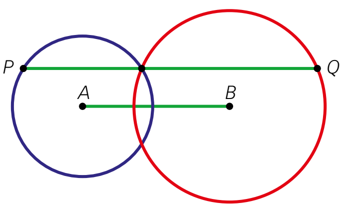
$$A = \left(-\frac{z}{2}, 1 + z\right) \text{ y } B = \left(\frac{z}{2}, 1 + z\right).$$

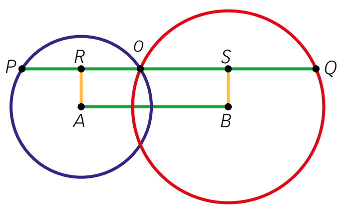
Como B pertenece a la circunferencia de radio 2:

$$\left(\frac{z^2}{4}\right) + 1 + z^2 + 2z = 4 \rightarrow$$

$$\rightarrow 5z^2 + 8z - 12 = 0 \rightarrow z = 0{,}944 \text{ u}$$

124 ●●● **INVESTIGA.** Teniendo en cuenta que el segmento AB mide 3 cm y es paralelo a PQ, ¿cuánto mide el segmento PQ?





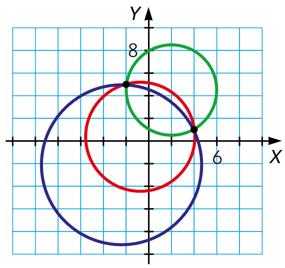
$$\begin{cases} \overline{PR} = \overline{RO} \\ \overline{OS} = \overline{SQ} \end{cases} \rightarrow \overline{AB} = \overline{RS} = \overline{RO} + \overline{OS} \rightarrow$$

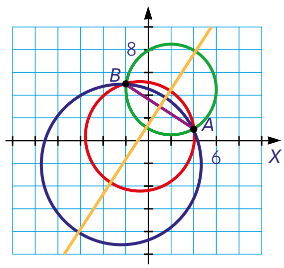
$$\rightarrow \overline{PQ} = \overline{PR} + \overline{RO} + \overline{OS} + \overline{SQ} =$$

$$= 2\overline{RO} + 2\overline{OS} = 2(\overline{RO} + \overline{OS}) = 2\overline{AB} \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{PQ} = 2 \cdot 3 = 6 \text{ cm}$$

125 ●○○ Halla el lugar geométrico de los puntos que son los centros de las circunferencias que pasan, a la vez, por (4, 1) y (−2, 5). ¿De qué figura se trata?





El lugar geométrico buscado será la mediatriz del segmento AB.

Sea $P(x, y)$ un punto de la mediatriz entonces $d(A, P) = d(B, P) \rightarrow$

$$\rightarrow \sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2} =$$

$$= \sqrt{(x+2)^2 + (y-5)^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow -12x + 8y - 12 = 0$$

126 ●○○ Calcula la longitud de la cuerda que forma la recta $x + 2y - 5 = 0$ sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$.

Calculamos la intersección de la recta y la circunferencia:

$$x = 5 - 2y$$

$$(5 - 2y)^2 + y^2 = 25 \rightarrow y^2 - 4y = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow y_1 = 0, y_2 = 4 \rightarrow x_1 = 5, x_2 = -3$$

Los puntos de intersección de la recta y la circunferencia son $A(5, 0)$ y $B(-3, 4)$.

Longitud de la cuerda:

$$d(A, B) = \sqrt{(5+3)^2 + (0+4)^2} = 4\sqrt{5} \text{ u}$$

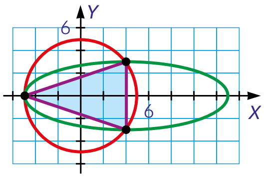
127 Calcula el área de la circunferencia que viene dada por la siguiente ecuación.

$$x^2 + y^2 - 3x + 5y - 14 = 0$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{90}{4} \rightarrow r^2 = \frac{45}{2}$$

$$A = \pi r^2 = \frac{45\pi}{2}\ \text{u}^2$$

128 Sean las circunferencias $(x - 4)^2 + 9y^2 = 81$ y $x^2 + y^2 = 25$, ¿cuál es el área delimitada por los puntos donde se intersecan las dos cónicas?



Circunferencia: $C(0, 0)$ y $r = 5$

Elipse: $(x - 4)^2 + 9y^2 = 81 \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{(x-4)^2}{81} + \frac{y^2}{9} = 1 \rightarrow a = 9 \qquad b = 3$$

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + 16 - 8x + 9y^2 = 81 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow y^2 = 25 - x^2 \rightarrow -x^2 - x + 20 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} A(-5, 0) \\ B(4, 3) \\ C(4, -3) \end{array}\right.$$

Los tres puntos determinan un triángulo.

$$A = \frac{6 \cdot 9}{2} = \frac{54}{2} = 27\ \text{u}^2$$

129 **MATEMÁTICAS Y... ARQUITECTURA.** La plaza de San Pedro está situada en la Ciudad del Vaticano. Tiene forma de elipse y mide 240 × 320 m. En los focos de la elipse encontramos las fuentes de Bernini y de Maderno.

a) Indica una ecuación de la elipse.

b) ¿A qué distancia están las fuentes del punto A?

c) ¿Y del obelisco central?

a) $a = 160$ m $\qquad b = 120$ m

$$\frac{x^2}{160^2} + \frac{y^2}{120^2} = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{x^2}{25\,600} + \frac{y^2}{14\,400} = 1$$

b) $$\left.\begin{array}{l} d(F, A) + d(F', A') = 2a \\ d(F, A) = d(F', A') \end{array}\right\}$$

$$d(F, A) = d(F', A') = a = 160 \text{ m}$$

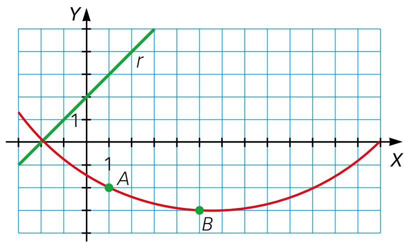
c) $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow$

$$\rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 160^2 - 120^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow c = 105{,}8 \text{ m}$$

Esta actividad puede utilizarse para trabajar el ODS 9, industria, innovación e infraestructura.

130 Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(1, -2)$ y $B(5, -3)$ y tiene su centro en la recta $r: x - y + 2 = 0$.



Como el centro equidista de los puntos, se encuentra en la mediatriz de $\overline{AB}$.

Sea $P(x, y)$ un punto de la mediatriz, entonces $d(A, P) = d(B, P)$.

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} =$$

$$= \sqrt{(x-5)^2 + (y+3)^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow 8x - 2y - 29 = 0$$

El centro es el punto de intersección de la mediatriz y la recta dada.

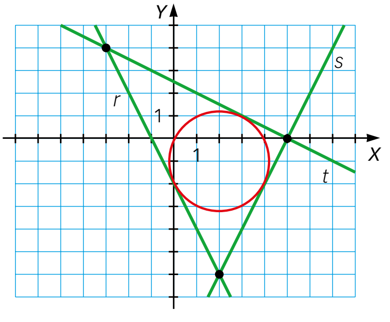
$$\left.\begin{array}{r} 8x - 2y - 29 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x = y - 2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 8(y - 2) - 2y - 29 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow y = \frac{15}{2} \rightarrow x = \frac{11}{2} \rightarrow C\left(\frac{11}{2}, \frac{15}{2}\right)$$

$$r = d(A, C) = \sqrt{\left(\frac{11}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{15}{2} + 2\right)^2} =$$
$$= \sqrt{\frac{442}{4}}$$
$$\left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{15}{2}\right)^2 = \frac{221}{2}$$

131 Dado un triángulo que tiene sus lados sobre las rectas cuyas ecuaciones son $r: 2x + y + 2 = 0$, $s: 2x - y - 10 = 0$ y $t: x + 2y - 5 = 0$, halla la ecuación de la circunferencia inscrita en este triángulo.



El centro de la circunferencia es la intersección de las bisectrices de los ángulos del triángulo formado por las rectas.

Sea $P(x, y)$ un punto de la bisectriz del ángulo formado por las rectas r y t, entonces $d(P, r) = d(P, t)$.

$$\frac{|2x + y + 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|x + 2y - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

La solución son dos ecuaciones. Se elige la recta que pasa por la circunferencia.

$2x + y + 2 = -x - 2y + 5 \rightarrow$
$\rightarrow x + y - 1 = 0$

Sea $P(x, y)$ un punto de la bisectriz del ángulo formado por las rectas s y t, entonces $d(P, s) = d(P, t)$.

$$\frac{|2x - y - 10|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|x + 2y - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

La solución son dos ecuaciones. Se elige la recta que pasa por la circunferencia:

$2x - y - 10 = x + 2y - 5 \rightarrow$
$\rightarrow x - 3y - 5 = 0$

Intersección de las dos rectas:

$$\left.\begin{array}{l} x + y - 1 = 0 \\ x - 3y - 5 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x = 2, y = -1 \rightarrow C(2, -1)$$

$$r = d(C, t) = \frac{|2 - 2 - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5 \rightarrow$
$\rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$

132 Escribe la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo de vértices $A(1, 0)$, $B(-3, 1)$ y $C(5, 2)$.

Encuentra las coordenadas del circuncentro del triángulo $\widehat{ABC}$.

La ecuación es de la forma:

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

Como $A(1, 0)$ pertenece a la circunferencia:
$1 + 0 + A + C = 0 \rightarrow A + C + 1 = 0$

Como $B(-3, 1)$ pertenece a la circunferencia:
$9 + 1 - 3A + B + C = 0 \rightarrow$
$\rightarrow -3A + B + C + 10 = 0$

Como $C(5, 2)$ pertenece a la circunferencia:
$25 + 4 + 5A + 2B + C = 0 \rightarrow$
$\rightarrow 5A + 2B + C + 29 = 0$

Se resuelve el sistema formado por estas tres ecuaciones.

$$A = -\frac{5}{6}$$
$$B = -\frac{37}{3}$$
$$C = -\frac{1}{6}$$

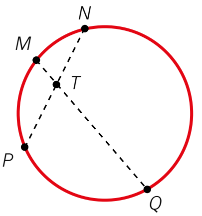
Ecuación de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 - \frac{5}{6}x - \frac{37}{3}y - \frac{1}{6} = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow 6x^2 + 6y^2 - 5x - 74y - 1 = 0$$

El circuncentro del triángulo es el centro de la circunferencia.

$$\left(x - \frac{5}{12}\right)^2 + \left(y - \frac{37}{6}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{12}\right)^2 + \left(\frac{37}{12}\right)^2 \rightarrow$$
$$\rightarrow \left(x - \frac{5}{12}\right)^2 + \left(y - \frac{37}{6}\right)^2 = \frac{709}{72}$$
$$\rightarrow C\left(\frac{5}{12}, \frac{37}{6}\right)$$

133 **INVESTIGA.** Si dibujas cuatro puntos sobre una circunferencia y los unes, según se observa en la figura, se cumple la siguiente igualdad.



$|TM| \cdot |TQ| = |TN| \cdot |TP|$

Compruébalo tomando los puntos $M(5, 1)$, $N(4, 2)$, $P(-3, -5)$ y $Q(-2, 2)$ y demostrando que están sobre la misma circunferencia. Para ello, determina la ecuación de la circunferencia y, después, calcula el punto T y prueba que se verifica la igualdad inicial.

Hallamos en primer lugar la ecuación de la circunferencia.

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

$$\left.\begin{array}{r} 25 + 1 + 5A + B + C = 0 \\ 16 + 4 + 4A + 2B + C = 0 \\ 9 + 25 - 3A - 5B + C = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 5A + B + C = -26 \\ 4A + 2B + C = -20 \\ 3A + 5B - C = 34 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 4 \\ C = -20 \end{cases}$$

$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$

Como $(-2)^2 + 2^2 - 2(-2) + 4 \cdot 2 - 20 = 0$, Q pertenece también a la circunferencia.

La recta que pasa por M y Q es

$$\frac{x-5}{-7} = \frac{y-1}{1} \rightarrow x + 7y - 12 = 0$$

La recta que pasa por N y P es

$$\frac{x-4}{-7} = \frac{y-2}{-7} \rightarrow x - y - 2 = 0$$

Calculamos la intersección de ambas.

$$\left.\begin{array}{r} x + 7y - 12 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow T\left(\frac{13}{4}, \frac{5}{4}\right)$$

$$\overline{TM} \cdot \overline{TQ} = \sqrt{\left(5 - \frac{13}{4}\right)^2 + \left(1 - \frac{5}{4}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(-2 - \frac{13}{4}\right)^2 + \left(2 - \frac{5}{4}\right)^2} = \frac{75}{2}$$

$$\overline{TN} \cdot \overline{TP} = \sqrt{\left(4 - \frac{13}{4}\right)^2 + \left(2 - \frac{5}{4}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(-3 - \frac{13}{4}\right)^2 + \left(-5 - \frac{5}{4}\right)^2} = \frac{75}{2}$$

134 Halla los puntos de intersección de las siguientes cónicas.

a) La elipse $2x^2 - 3y^2 = 6$ y la hipérbola $6x^2 + y^2 = 58$.

b) Las parábolas $y^2 = 9x$, $x^2 = \frac{1}{3}y$.

c) La elipse $x^2 + y^2 = 1$ y la parábola $y^2 = 2x + 3$.

d) La parábola $y^2 = x - 1$ y la hipérbola $9x^2 - y^2 = 9$.

a) $\begin{cases} y^2 = 58 - 6x^2 \\ 2x^2 - 3y^2 = 6 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow 2x^2 - 3(58 - 6x^2) = 6 \rightarrow$

$\rightarrow 20x^2 - 180 = 0 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow$

$\rightarrow x_1 = -3 \qquad x_2 = -3$

Los puntos de corte son $(3, 2)$, $(-3, 2)$, $(3, -2)$, $(-3, -2)$.

b) $\left.\begin{array}{r} y^2 = 9x \\ 3x^2 = y \end{array}\right\} \rightarrow 9x^4 - 9x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x(x^3 - 1) = 0$

Los puntos de corte son $(0, 0)$ y $(1, 3)$.

c) $\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 = 2x + 3 \end{array}\right\} \rightarrow x^2 + 2x + 2 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow$ No tiene solución.

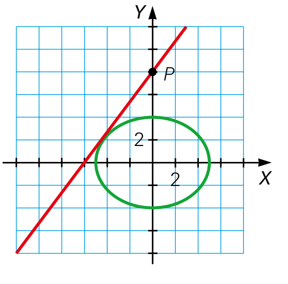
No hay puntos de corte.

d) $\left.\begin{array}{r} y^2 = x - 1 \\ 9x^2 - y^2 = 9 \end{array}\right\} \rightarrow 9x^2 - x - 8 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x_1 = 1 \qquad x_2 = -\frac{8}{9}$

El punto de corte es $(1, 0)$.

135 Calcula la recta tangente a la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ que pasa por el punto $P(0, 8)$.



Las rectas que pasan por (0, 8) tienen como ecuación $y = mx + 8$.

$$\left.\begin{array}{r} 16x^2 + 25y^2 = 400 \\ y = mx + 8 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow (16 + 25m^2)x^2 + 400mx + 1\,200 = 0$$

La recta es tangente a la elipse si la ecuación tiene solo una solución, es decir, si el discriminante de la ecuación es igual a cero.

$$\Delta = 160\,000m^2 - 4\,800(16 + 25m^2) =$$
$$= 40\,000m^2 - 76\,800 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow m = \pm\frac{4\sqrt{3}}{5}$$

Hay dos rectas tangentes a la elipse que pasan por el punto (0, 8).

r_1: $4\sqrt{3}x - 5y + 40 = 0$

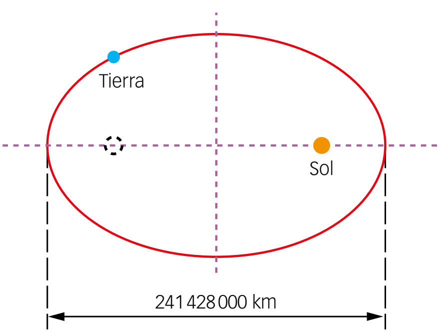
r_2: $4\sqrt{3}x + 5y - 40 = 0$

INTERNET

136 ●●○ **MATEMÁTICAS Y... ASTRONOMÍA.** El equipo de investigación de la NASA pretende enviar un satélite espacial a la Luna. El departamento de ingeniería ha determinado que el mejor momento para lanzar la sonda es cuando la Tierra está en su punto más lejano del Sol.

a) Determina la máxima distancia entre la Tierra y el Sol si se sabe que la órbita terrestre alrededor del Sol es una elipse, con el Sol en uno de sus focos, que la longitud del eje mayor es de 241 428 000 km y que la excentricidad de la órbita es 0,016.

b) Escribe también la ecuación reducida de la elipse que corresponde a la órbita de la Tierra.



a) $2a = 241\,428\,000 \rightarrow a = 120\,714\,000$

$$e = 0{,}016 = \frac{c}{a} \rightarrow$$

$$\rightarrow c = 0{,}016 \cdot 120\,714\,000 = 1\,931\,424$$

La distancia máxima entre la Tierra y el Sol se alcanza cuando la Tierra se sitúa en el eje focal.

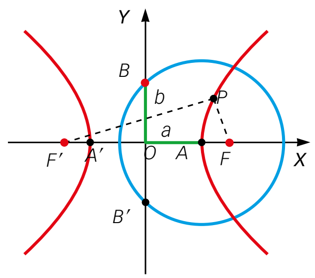
$a + c = 122\,645\,424$ km

b) $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow$

$$\rightarrow b^2 = 14\,568\,139\,397\,332\,224$$

$$\frac{x^2}{14\,571\,869\,796\,000\,000} +$$
$$+ \frac{y^2}{14\,568\,139\,397\,332\,224} = 1$$

137 ●●○ Una hipérbola es equilátera si cumple que $a = b$. Si tiene su centro en (0, 0) y el eje focal es horizontal, calcula su ecuación y halla las coordenadas de los focos en función de a. Determina las ecuaciones de sus asíntotas.



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \rightarrow x^2 - y^2 = a^2$$

$$\left.\begin{array}{l} a = b \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{array}\right\} \rightarrow c = \sqrt{2}a \rightarrow$$

$$\rightarrow F\left(\sqrt{2}a, 0\right) \quad F'\left(-\sqrt{2}a, 0\right)$$

Las asíntotas son: $y = -x$

138 ●●● Comprueba que la hipérbola cuyos focos son $\left(4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\right)$ y $\left(-4\sqrt{2}, -4\sqrt{2}\right)$ y su constante es $8\sqrt{2}$ es equilátera. Comprueba que (8, 2) está situado en esa hipérbola. Obtén su ecuación.

$$\sqrt{\left(-4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\right)^2 + \left(-4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\right)^2} = 16$$

$$\left.\begin{array}{l} c = 8 \\ a = 4\sqrt{2} \end{array}\right\} \rightarrow b = 4\sqrt{2}$$

Al ser $a = b$, la hipérbola es equilátera.

Calculamos su ecuación.

$$\sqrt{\left(x-4\sqrt{2}\right)^2+\left(y-4\sqrt{2}\right)^2}-$$
$$-\sqrt{\left(x+4\sqrt{2}\right)^2+\left(y+4\sqrt{2}\right)^2}=8\sqrt{2}\rightarrow$$
$$\rightarrow x+y+4\sqrt{2}=$$
$$=-\sqrt{\left(x+4\sqrt{2}\right)^2+\left(y+4\sqrt{2}\right)^2}\rightarrow$$
$$\rightarrow x^2+y^2+2xy+8\sqrt{2}x+8\sqrt{2}y+32=$$
$$=x^2+8\sqrt{2}x+32+y^2+8\sqrt{2}y+32\rightarrow$$
$$\rightarrow 2xy=32\rightarrow xy=16$$

$8 \cdot 2 = 16 \rightarrow (8, 2)$ está en la hipérbola.

139 **RETO.** ¿Para cuántos valores de k se cumple que las gráficas de $x^2 + y^2 = k^2$ y $xy = k$ no se cortan?

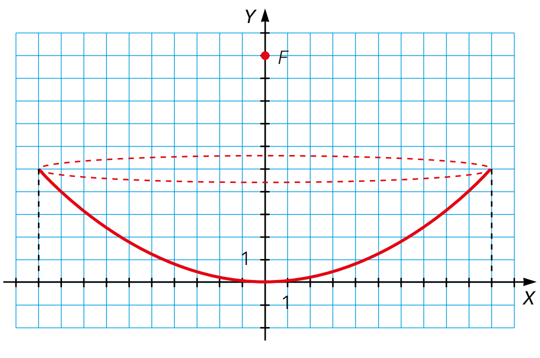
$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=k^2 \\ xy=k \end{array}\right\} \rightarrow \left(\frac{k}{y}\right)^2+y^2=k^2\rightarrow$$
$$\rightarrow k^2+y^4=k^2y^2\rightarrow$$
$$\rightarrow y^4-k^2y^2+k^2=0\rightarrow$$
$$\rightarrow t^2-k^2t+k^2=0$$

Para que no se corten las gráficas, el discriminante debe ser negativo.

$k^4 - 4k^2 < 0 \rightarrow (k^2 + 2k)(k^2 - 2k) < 0$

Esto sucede para $k \in (-2, 0) \cup (0, 2)$.

140 Al diseñar una antena parabólica de 20 m de diámetro para rastrear espacios se desea ubicar el foco 10 m por encima del vértice.

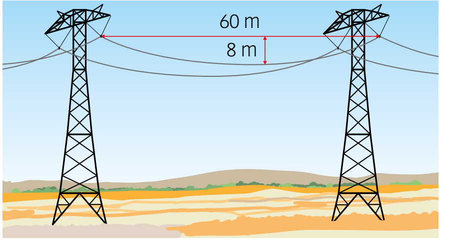


Escribe la ecuación de la parábola que forma la sección de la antena.

$x^2 = 2py$

$F(0, 10) \rightarrow p = 20 \rightarrow x^2 = 40y$

141 Entre cada dos torres, los cables del tendido eléctrico forman una catenaria. Si fuera una parábola, como se pensó hasta el siglo XVII, ¿cuál sería su ecuación colocando el origen en el punto más bajo del cable si la altura de las torres es igual?



Consideramos el origen $O(0, 0)$ en el vértice de la parábola.

$x^2 = 2py$

Son puntos de la parábola $(30, 8)$, y $(-30, 8) \rightarrow$

$\rightarrow 30^2 = 2p8 \rightarrow p = \dfrac{225}{4} \rightarrow x^2 = \dfrac{225}{2}y$

142 Halla los focos, los vértices y las directrices de las siguientes parábolas.

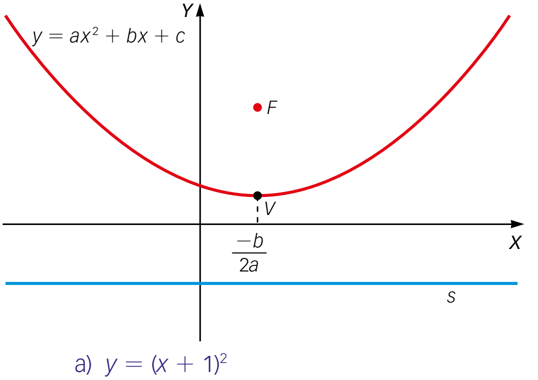
a) $y = x^2 + 2x + 1$

b) $4y = -x^2 + 8x - 6$

c) $y = 4x^2 - 8x + 12$

d) $y = 6x^2 + 9x - 10$

(Recuerda que, en una parábola del tipo $y = ax^2 + bx + c$, la directriz es horizontal y el vértice es un punto de abscisa $-\dfrac{b}{2a}$).



a) $y = (x + 1)^2$

$v(-1, 0)$

$2p = 1 \rightarrow p = \dfrac{1}{2} \rightarrow F\left(-1, \dfrac{1}{4}\right)$

Directriz: $y = -\frac{1}{4}$

b) $4y - 10 = -(x^2 - 8x + 16) \rightarrow$

$\rightarrow -4\left(y - \frac{5}{2}\right) = (x - 4)^2$

$V\left(4, \frac{5}{2}\right)$

$2p = -4 \rightarrow p = -2 \rightarrow F\left(4, \frac{3}{2}\right)$

Directriz: $y = \frac{7}{2}$

c) $y - 8 = 4(x^2 - 2x + 1) \rightarrow$

$\rightarrow \frac{1}{4}(y - 8) = (x - 1)^2$

$V(1, 8)$

$2p = \frac{1}{4} \rightarrow p = \frac{1}{8} \rightarrow F\left(1, \frac{129}{16}\right)$

Directriz: $y = \frac{127}{16}$

d) $y + \frac{107}{8} = 6\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \frac{1}{6}\left(y + \frac{107}{8}\right) = \left(x + \frac{3}{4}\right)^2$

$V\left(-\frac{3}{4}, -\frac{107}{8}\right)$

$2p = \frac{1}{6} \rightarrow p = \frac{1}{12} \rightarrow F\left(-\frac{3}{4}, -\frac{40}{3}\right)$

Directriz: $y = \frac{-161}{12}$

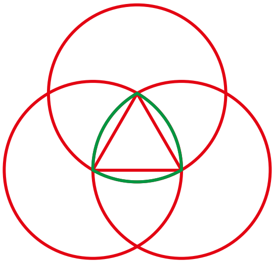
INTERNET

143 **MATEMÁTICAS Y... URBANISMO.** La forma redonda de las alcantarillas evita que la tapa se pueda caer por el agujero. Se dice que tiene anchura constante porque la distancia entre dos puntos opuestos del borde es constante. En un cuadrado, la diagonal es más larga que sus lados; por tanto, no tiene anchura constante y la tapa se nos podría escurrir por el agujero.

La anchura constante se define como la distancia entre dos rectas paralelas y tangentes a la figura. Partiendo de un triángulo, ¿eres capaz de encontrar otra figura que tenga anchura constante?

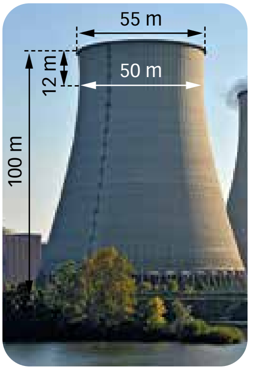
Respuesta abierta. Por ejemplo:

El triángulo de Reuleaux es otra curva de anchura constante. Lo vemos en la forma de algunos lapiceros, en la de algunos caramelos, en logotipos y también en las alcantarillas de algunas ciudades.



Esta actividad puede utilizarse para trabajar el ODS 11, ciudades y comunidades sostenibles.

144 **MATEMÁTICAS E... INDUSTRIA.** Las torres de refrigeración son estructuras diseñadas para disminuir la temperatura del agua y otros materiales. Se pueden ver en centrales de energía y suelen tener una estructura hiperboloide.



Escribe una ecuación que modelice los lados de la torre de la imagen.

La silueta de la torre de refrigeración es una hipérbola.

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$a = 25$ m y $b = 12$ m $\rightarrow \frac{x^2}{25^2} - \frac{y^2}{12^2} = 1$

145 **RETO.** ¿Cuánto mide el camino más corto que, partiendo del punto $A(2, 5)$, pasa por el eje de abscisas y acaba en algún punto perteneciente a la circunferencia $(x + 6)^2 + (y - 10)^2 = 16$?

La circunferencia tiene centro $C(-6, 10)$ y radio 4.

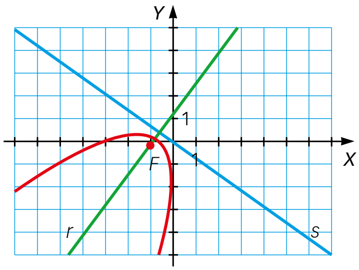
Consideramos el punto simétrico de A respecto del eje OX, $A'(2, -5)$, y un punto B en la circunferencia.

El camino más corto, partiendo de A, que pasa por OX y acaba en B mide lo mismo que el camino más corto partiendo de A', que pasa por OX y acaba en B.

Este camino mide 4 menos que el segmento $A'C$, ya que B está en la circunferencia.

$$|\overline{A'C}| - 4 =$$
$$= \sqrt{(2+6)^2 + (-5-10)^2} - 4 = 13 \text{ u}$$

146 Como la parábola es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta llamada directriz y un punto denominado foco, emplea la definición para calcular la ecuación de esta parábola.



$F(-1, 0)$

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \frac{|3x+4y|}{\sqrt{3^2+4^2}} \rightarrow$$
$$\rightarrow \sqrt{x^2 + 2x + 1 + y^2} = \frac{|3x+4y|}{5}$$
$$\rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 = \frac{9x^2 + 16y^2 + 24xy}{25}$$
$$\rightarrow 25x^2 + 50x + 25 + 25y^2 =$$
$$= 9x^2 + 16y^2 + 24xy$$
$$\rightarrow 16x^2 + 9y^2 - 24xy + 50x + 25 = 0$$

147 Decide qué tipo de cónica es, halla sus elementos y haz una representación gráfica aproximada.

a) $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$

b) $x^2 - 4y^2 + 16y - 32 = 0$

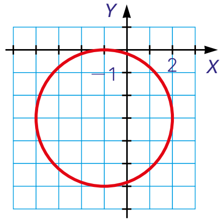
c) $16x^2 + 9y^2 - 32x + 54y - 47 = 0$

d) $x^2 + 6x - 4y + 17 = 0$

e) $x^2 - 2x + 4y + y^2 - 20 = 0$

a) $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 9$

Es una circunferencia de centro $C(-1, -3)$ y radio 3.



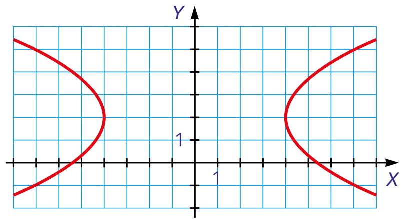
b) $x^2 - 4(y-2)^2 = 16 \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

Es una hipérbola de centro $C(0, 2)$.

$$a^2 = 16 \rightarrow a = 4 \rightarrow \begin{cases} A(4, 2) \\ A'(-4, 2) \end{cases}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c = \sqrt{20} \rightarrow$$
$$\rightarrow F\left(\sqrt{20}, 2\right) \quad F'\left(-\sqrt{20}, 2\right)$$



c) $16(x-1)^2 + 9(y+3)^2 = 144$

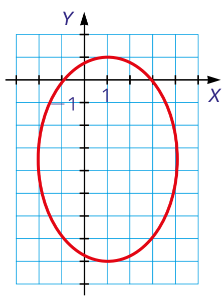
$$\rightarrow \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$$

Es una elipse de centro $C(1, -3)$

$$a^2 = 16 \rightarrow a = 4 \rightarrow \begin{cases} A(1, 1) \\ A'(1, -7) \end{cases}$$

$$b^2 = 9 \rightarrow b = 3 \rightarrow \begin{cases} B(-2, -3) \\ B'(4, -3) \end{cases}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = \sqrt{7} \rightarrow$$
$$\rightarrow F\left(1, -3+\sqrt{7}\right) \quad F'\left(1, -3-\sqrt{7}\right)$$



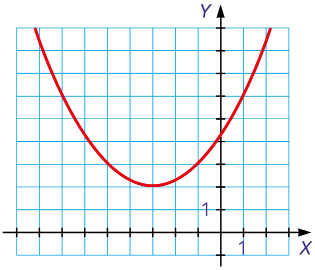
d) $(x+3)^2 = 4(y-2)$

$\rightarrow y - 2 = \dfrac{1}{4}(x+3)^2$

Es una parábola de vértice $V(-3, 2)$.

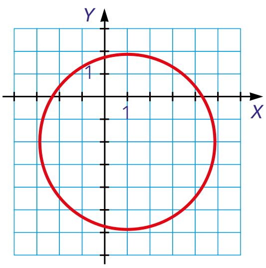
$2p = \dfrac{1}{4} \rightarrow p = \dfrac{1}{8} \rightarrow F\left(-3, \dfrac{17}{8}\right)$

La directriz es la recta $y = \dfrac{15}{8}$.



e) $x^2 - 2x + 4y + y^2 - 20 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 15$

Es una circunferencia de centro $C(1, -2)$ y radio $\sqrt{15}$.



148 ●●○ Un puente de arco es un puente que consta de un gran arco parabólico que descansa en sus extremos. Si su longitud es de 320 m, y la altura del arco a 128 m del centro del puente, medida desde el apoyo de los pilares, es de 32 m, ¿cuál es la altura del arco que forma el puente en su centro?

Consideramos el origen $O(0, 0)$ en el vértice de la parábola $x^2 = 2py$.

Los puntos $(160, -h)$ y $(128, 32 - h)$ pertenecen a la parábola, por tanto:

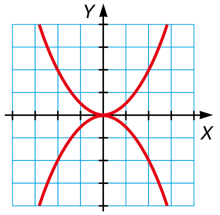
$$\begin{cases} 160^2 = 2p(-h) \\ 128^2 = 2p(32-h) \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} p = \dfrac{25\,600}{-2h} = -\dfrac{12\,800}{h} \\ p = \dfrac{16\,384}{2(32-h)} = \dfrac{8\,192}{32-h} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{12\,800}{h} = -\frac{8\,192}{32-h} \rightarrow$$

$$\rightarrow 409\,600 = 4\,608h \rightarrow h \approx 89 \text{ m}$$

149 ●●● **INVESTIGA.** ¿Cuál de las siguientes funciones describe mejor la gráfica de la figura?



a) $y = |x|^2$

b) $y^2 = x$

c) $|y| = x^2$

d) $y^2 = x^2$

La gráfica de la figura no representa una función.

FAKE NEWS

5G hasta en la cocina

Cientos de manifestantes acampan en una de las plazas más céntricas de Gijón para protestar contra la proliferación de antenas 5G.

El colectivo de reciente creación «NO MÁS ANTENAS» asegura que el número de nuevas antenas 5G colocadas con respecto a las antenas 4G ya existentes es hasta 25 veces mayor.

«Esto solo puede tener oscuras intenciones», declara uno de los acampados.

Tecnología	Radio de alcance de cada antena
4G	5-10 km
5G	< 1 km

Y tú, ¿qué opinas?

Suponemos que una antena da cobertura a una superficie circular cuyo centro ocupa. Cada antena 5G da cobertura a un área de aproximadamente 3,14 km^2, mientras que una antena 4G da cobertura a un área de entre 78,5 km^2 y 314 km^2. Por tanto, habrá que colocar como mínimo, 25 antenas 5G por cada antena 4G.

En realidad, para poder ubicar las antenas de forma que optimizaran la región del plano a la que dar cobertura, se utilizan los diagramas de Voronoi, que permiten parcelar el espacio colocando las antenas a la distancia máxima para acceder a todos los puntos y minimizando así el número de antenas.

PROBLEMAS APARENTEMENTE DISTINTOS

150 Se sabe que una elipse pasa por los puntos (100, 0), (−100, 0), (0, 250) y (0, −250).

a) Indica las coordenadas de los focos.

b) Halla la distancia de los focos al centro de la elipse.

c) Calcula la distancia focal.

Se trata de una elipse con focos en el eje de ordenadas y semiejes $a = 250$ m y $b = 100$ m.

a) $250^2 = 100^2 + c^2 \to c = 229{,}3 \to$
$\to F(0;\ 229,\ 3) \qquad F'(0;\ -229{,}3)$

b) $d(F,\ C) = c = 229{,}3$ u

c) $2c = 458{,}6$

151 Un parque elíptico mide 200 m de ancho y 500 m de largo. En los focos de la elipse hay dos estatuas.

a) ¿Cuál es la posición de las estatuas?

b) Calcula la distancia de las estatuas al centro.

c) ¿Qué distancia separa las estatuas?

Se trata de una elipse con focos en el eje de ordenadas y semiejes $a = 250$ m y $b = 100$ m.

a) $250^2 = 100^2 + c^2 \to c = 229{,}3 \to$
$\to F(0;\ 229{,}3) \qquad F'(0;\ -229{,}3)$

Tomando el origen en el centro de la elipse, las estatuas están en los puntos (0; 229,3) y (0; −229,3).

b) $d(F,\ C) = c = 229{,}3$

La distancia desde cada estatua al centro de la elipse es 229,3 m.

c) $2c = 458{,}6$

La distancia que separa las estatuas es de 458,6 m.

152 Halla la distancia entre los vértices de una hipérbola centrada en (0, 0), sabiendo que:

- Su excentricidad es 2,5.
- La distancia del foco al vértice es de 30 unidades.

$$\begin{cases} e = \dfrac{c}{a} = 2{,}5 \\ d(F,\ A) = 30 = c - a \end{cases} \to$$

$\to 2{,}5a = a + 30 \to a = 20$

La distancia entre los vértices es $2a = 40$ u.

153 Se está construyendo un edificio cuya sección vertical es una hipérbola. Los vértices de la hipérbola están a 30 metros de los focos, y su excentricidad es 2,5. ¿Cuánto mide el tramo más estrecho de la sección del edificio?

$$\begin{cases} e = \dfrac{c}{a} = 2{,}5 \\ d(F,\ A) = 30 = c - a \end{cases} \to$$

$\to 2{,}5a = a + 30 \to a = 20 \to 2a = 40$

El tramo más estrecho mide 40 m.

154 Sean las circunferencias c_1, de centro (−2, −3) y radio 3, y c_2, de centro (4, 1) y radio 4.

a) Calcula la distancia que separa los centros.

b) Estudia la posición relativa de ambas circunferencias.

c) ¿Cuál es la distancia del punto $P(0, 0)$ al centro de cada circunferencia? Indica la posición relativa de P respecto de las dos circunferencias.

d) Estudia la posición relativa del punto $(-1, -1)$ con respecto de cada circunferencia.

a) $d(C_1, C_2) = \sqrt{36 + 16} = 2\sqrt{13}$ u

b) $d(C_1, C_2) > 3 + 4 \rightarrow$
$\rightarrow$ Las circunferencias c_1 y c_2 son exteriores.

c) $d(P, C_1) = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} > 3 \rightarrow$
$\rightarrow$ P es exterior a c_1.
$d(P, C_2) = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17} > 4 \rightarrow$
$\rightarrow$ P es exterior a c_2.

d) $d(Q, C_1) = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} < 3 \rightarrow$
$\rightarrow$ Q es interior a c_1.
$d(Q, C_2) = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29} > 4 \rightarrow$
$\rightarrow$ Q es exterior a c_2.

155 Dos antenas de telefonía están en las coordenadas $(-2, -3)$ y $(4, 1)$. Tienen un alcance de cobertura de 3 y 4 km, respectivamente.

a) Calcula la distancia que separa las dos antenas.

b) ¿Se tiene cobertura en toda la trayectoria que une las dos antenas?

c) Una persona está en el punto $(0, 0)$, ¿tendrá cobertura?

d) Y si se moviera al punto $(-1, -1)$, ¿cambiaría su situación?

a) $d(C_1, C_2) = \sqrt{36 + 16} = 2\sqrt{13}$

b) $d(C_1, C_2) > 3 + 4 \rightarrow$
$\rightarrow$ Las circunferencias son exteriores. Por lo tanto, hay zonas en las que no habrá cobertura.

c) Sea $P(0, 0)$.
$d(P, C_1) = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} > 3 \rightarrow$
$\rightarrow$ P es exterior a c_1.
$d(P, C_2) = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17} > 4 \rightarrow$
$\rightarrow$ P es exterior a c_2.
Como P es exterior a ambas circunferencias., una persona ubicada en ese punto no tendrá cobertura.

d) Sea $Q(-1, -1)$.
$d(Q, C_1) = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} < 3 \rightarrow$
$\rightarrow$ Q es interior a c_1.
$d(Q, C_2) = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29} > 4 \rightarrow$
$\rightarrow$ Q es exterior a c_2.
Si se moviera a Q, tendría cobertura por la primera antena.

¿PARA QUÉ SIRVE…?

1 ¿Qué es una antena parabólica y cuáles son sus usos?

Una antena parabólica es una superficie metálica con forma de paraboloide de revolución que sirve de reflector de las señales y un elemento radiante situado en el foco que recibe las señales reflectadas.

Tiene múltiples usos, por ejemplo: televisión vía satélite.

2 Explica cómo se forma un paraboloide de revolución. ¿Es una figura plana?

Se forma al girar una parábola alrededor de un eje.

No es una figura plana, es tridimensional.

3 Explica la propiedad que permite a las antenas parabólicas recibir y emitir de manera óptima señales vía satélite.

Al ser parabólicas reflejan las señales transmitidas que inciden paralelas al eje y se concentran en el foco, donde son convertidas al formato adecuado por un receptor.

INTERNET

4 Enumera algunas ventajas e inconvenientes de usar antenas parabólicas para conectarse a internet.

- Ventajas: inalámbrico; accesible para personas que no pueden optar a otra tecnología.
- Inconvenientes: la recepción puede alterarse según las condiciones meteorológicas; la velocidad puede ser más lenta si se envía o recibe señal a largas distancias; pueden ser algo más caras que otras tecnologías.

5 Si una antena parabólica mide 1 m de diámetro en su abertura y el receptor, ubicado en el foco, está a 25 cm del vértice, ¿qué profundidad tiene?

La ecuación de la parábola es de la forma $x^2 = 2py$.

$F(0, 25) \rightarrow p = 50 \rightarrow x^2 = 100y$

Como el diámetro es 1 m = 100 cm, uno de los extremos es $x = 50$ cm.

$50^2 = 100y \rightarrow y = 25$ cm

La profundidad de la parábola es de 25 centímetros.

6 Dibuja la gráfica de la parábola que genera la antena de la actividad anterior al girar sobre su eje.