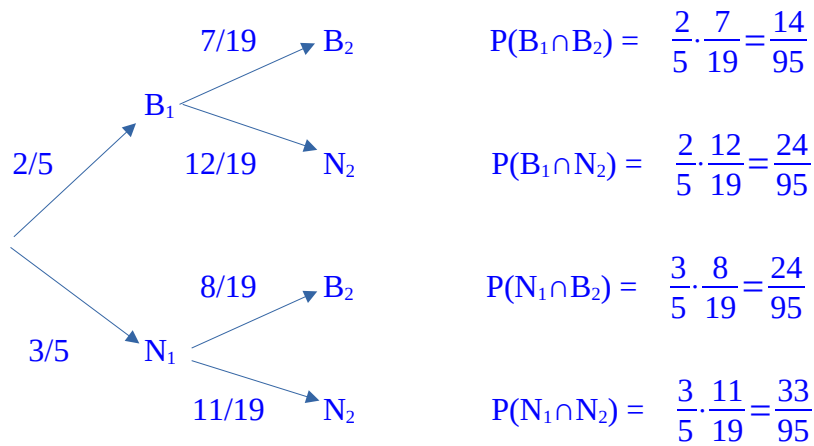


REPASO EXAMEN - TEMA 5: VARIABLES ALEATORIAS. BINOMIAL Y NORMAL

1. En una urna hay 8 bolas blancas y 12 bolas negras. Sea X la variable aleatoria que cuenta el número de bolas negras al extraer dos bolas de la urna (SIN REEMPLAZAMIENTO). Calcula:

- Su función de probabilidad y represéntala.
- Su función de distribución y represéntala.
- Su media, varianza y desviación típica.



k	$P(X=k)$ (Función de probabilidad)	$P(X \leq k)$ (Función de distribución)	$k \cdot P(X=k)$	$k^2 \cdot P(X=k)$
0	$P(X=0) = \frac{14}{95}$	$\frac{14}{95}$	0	0
1	$P(X=1) = \frac{48}{95}$	$\frac{62}{95}$	$\frac{48}{95}$	$\frac{48}{95}$
2	$P(X=2) = \frac{33}{95}$	1	$\frac{66}{95}$	$\frac{132}{95}$
	$\frac{95}{95} = 1$		$\mu = \frac{114}{95} = \frac{6}{5}$	$\frac{180}{95} = \frac{36}{19}$

(Representaciones)

c)

Media: $\mu = 6/5$

Varianza: $\sigma^2 = \sum_{i=1}^n i^2 \cdot P(X=i) - \mu^2 = 36/19 - (6/5)^2 = 216/475$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\frac{216}{475}} = \frac{6\sqrt{114}}{95}$

2. En un bombo tenemos 10 bolas idénticas numeradas del 0 al 9 y cada vez que hacemos una extracción devolvemos la bola al bombo.

- Si hacemos 5 extracciones, calcula la probabilidad de que el 7 salga menos de dos veces.
- Si hacemos 20 extracciones, calcula la probabilidad de que el 7 salga al menos 18 veces.

a) $X = n^\circ$ de bolas con el 7 $n = 5$ experimentos iguales e independientes $p = 1/10$
 Por lo tanto, $X \sim B(10, 1/10)$ $\rightarrow$

$$P(X < 2) = P(X=0) - P(X=1) = \binom{5}{0} \left(\frac{1}{10}\right)^0 \left(\frac{9}{10}\right)^{5-0} - \binom{5}{1} \left(\frac{1}{10}\right)^1 \left(\frac{9}{10}\right)^{5-1} = 0,5905 + 0,3281 = 0,9186$$

b) $X = n^\circ$ de bolas con el 7 $n = 20$ experimentos iguales e independientes $p = 1/10$
 Por lo tanto, $X \sim B(20, 1/10)$ $\rightarrow$

$$\begin{aligned} P(X \geq 18) &= P(X=18) + P(X=19) + P(X=20) = \\ &= \binom{20}{18} \left(\frac{1}{10}\right)^{18} \left(\frac{9}{10}\right)^{20-18} + \binom{20}{19} \left(\frac{1}{10}\right)^{19} \left(\frac{9}{10}\right)^{20-19} + \binom{20}{20} \left(\frac{1}{10}\right)^{20} \left(\frac{9}{10}\right)^{20-20} = \\ &= 1,539 \cdot 10^{-16} + 1,8 \cdot 10^{-18} + 10^{-20} = \mathbf{1,5571 \cdot 10^{-16}} \end{aligned}$$

3. La probabilidad de que un determinado jugador de fútbol marque gol desde el punto de penalti es de 0,7. Si lanza 10 penaltis, calcula:

- La probabilidad de que no marque ningún gol.
- La probabilidad de que marque al menos 2 goles.
- La probabilidad de que marque 5 goles.
- ¿Cuántos goles cabe esperar que marque?

$X = n^\circ$ de goles marcados $n = 10$ experimentos iguales e independientes $p = 0,7$

Por lo tanto, $X \sim B(10, 0,7)$

$$a) P(X=0) = \binom{10}{0} (0,7)^0 \cdot (0,3)^{10-0} = 0,000005904$$

$$\begin{aligned} b) P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - \binom{10}{0} (0,7)^0 (0,3)^{10-0} - \binom{10}{1} (0,7)^1 (0,3)^{10-1} = \\ &= 1 - 0,000005904 - 0,000137781 = 0,999856 \end{aligned}$$

$$c) P(X=5) = \binom{10}{5} (0,7)^5 \cdot (0,3)^{10-5} = 0,1029$$

$$d) \mu = np = 10 \cdot 0,7 = 7 \text{ goles cabe esperar}$$

4. Sea X una v.a. binomial. Sabiendo que $\mu = 5$ y $\sigma^2 = 15/4$. Determina:

- Los parámetros n y p de la distribución binomial de X .
- La probabilidad del suceso $(X > 18)$.

$$a) np = 5 \quad npq = 15/4 \rightarrow 5q = 15/4 \rightarrow q = 3/4 \rightarrow p = 1/4$$

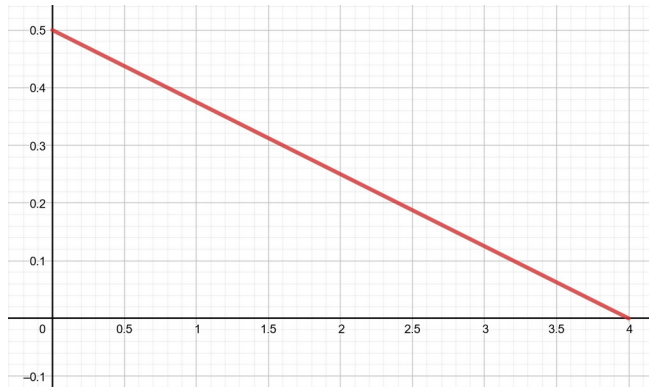
$$n/4 = 5 \rightarrow n = 20$$

$$\text{Por lo tanto, } X \sim B(20, 0,25)$$

$$b) \quad P(X > 18) = P(X = 19) + P(X = 20) = \binom{20}{19} \left(\frac{1}{4}\right)^{19} \left(\frac{3}{4}\right)^{20-19} + \binom{20}{20} \left(\frac{1}{4}\right)^{20} \left(\frac{3}{4}\right)^{20-20} = 5,5479 \cdot 10^{-11}$$

5. ¿Es $f(x)$ una función de densidad?

a)



b)



En caso afirmativo, calcula $P(X < 2)$, $P(X = 3)$, $P(X \geq 1)$ y $P(1 < X \leq 2)$.

SOLUCIÓN:

$$a) \text{ Es una función de densidad: } 1^\circ) f(x) \geq 0 \quad 2^\circ) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = \frac{4 \cdot 0,5}{2} = 1$$

$$f(x) \text{ es una recta de ecuación: } f(x) = \frac{-x+4}{8}, \text{ por lo tanto, } f(2) = 0,25 \text{ y } f(1) = \frac{3}{8}$$

$$P(X < 2) = 1 - P(X > 2) = 1 - \frac{2 \cdot 0,25}{2} = 0,75$$

$$P(X = 3) = 0 \quad P(X \geq 1) = \frac{3 \cdot \frac{3}{8}}{2} = \frac{9}{16}$$

$$P(1 < X \leq 2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 1) = \frac{3}{4} - \left(1 - \frac{9}{16}\right) = \frac{3}{4} - \frac{7}{16} = \frac{5}{16}$$

b) No es una función de densidad: 1º) $f(x) \geq 0$ 2º) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = \frac{6 \cdot 0,5}{2} = 1,5 \neq 1$

6. Calcula k para que $f(x) = k$, $0 \leq x \leq 8$ sea una función de densidad. Calcula la $P(X > 5)$.

Para que $f(x)$ sea una función de densidad debe ser positiva: $f(x) = k > 0$; y el área entre 0 y 8 tiene que ser 1: $8 \cdot k = 1 \rightarrow k = 1/8$

$$P(X > 5) = 3 \cdot 1/8 = 3/8$$

7. Una fábrica produce piezas cuyo grosor sigue una distribución normal de media 8 cm y desviación típica 0,01 cm.

a) Calcula la probabilidad de que una pieza tenga un grosor comprendido entre 7,98 y 8,02 cm.

b) Si las piezas de grosor menor de 7,9 cm o mayor de 8,1 cm se desechan, ¿qué porcentaje de piezas se desechan?

$X =$ grosor de una pieza en cm $X \sim N(8; 0,01)$ $\mu = 8$ $\sigma = 0,01$

a)

$$P(7,98 \leq X \leq 8,02) = P\left(\frac{7,98-8}{0,01} \leq Z \leq \frac{8,02-8}{0,01}\right) = P(-2 \leq Z \leq 2) = 2P(Z \leq 2) - 1 = 2 \cdot 0,9772 - 1 = 0,9544$$

tipificar

$$b) P(7,9 \leq X \leq 8,1) = P\left(\frac{7,9-8}{0,01} \leq Z \leq \frac{8,1-8}{0,01}\right) = P(-10 \leq Z \leq 10) = 2P(Z \leq 10) - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

tipificar

El 100% de las piezas tienen un grosor entre 7,9 y 8,1 cm; por lo tanto, se desecha el 0%.

8. La distribución de la duración de un embarazo en mujeres es aproximadamente normal con media 266 días y desviación típica 16 días. Calcular:

a) La probabilidad de que un embarazo dure más de 42 semanas.

b) El 80% de los embarazos duran menos de ¿cuántos días?

c) El 50% de los embarazos duran menos de ¿cuántos días?

$X =$ n.º de días de duración de un embarazo $X \sim N(266; 16)$

$$a) P(X > 294) = 1 - P(X < 294) = 1 - P\left(Z < \frac{294-266}{16}\right) = 1 - P(Z \leq 1,75) = 1 - 0,9599 = 0,0401$$

tipificar

La probabilidad de que un embarazo dure más de 42 semanas es de 0,0401.

$$b) P(X < d) = 0,8 \rightarrow P(X < d) = P\left(Z < \frac{d-266}{16}\right) = 0,8$$

Podemos calcular k tal que $P(Z < k) = 0,8$ e igual después el valor a $(d-266)/16$:

Buscamos en la tabla de la normal $P(Z < k) = 0,8 \rightarrow k = 0,84$

$$\text{Igualamos } (d - 266) / 16 = 0,84 \rightarrow d = 266 + 16 \cdot 0,84 = 279,44$$

El 80% de los embarazos duran menos de 279,44 días, casi 40 semanas.

$$c) P(X < d) = 0,5 \quad \text{por tanto, } d \text{ es la media.}$$

El 50% de los embarazos duran menos de 266 días, unas 38 semanas.

9. Sea T la temperatura media de agosto en Ferrol. Si se distribuye según una normal de media 20°C y varianza 4°C, calcula:

a) Probabilidad de que la temperatura media de un mes de agosto supere los 25°C.

b) Probabilidad de que la temperatura media de un mes de agosto se sitúe entre 18°C y 22°C.

c) Percentil 95.

$$T = \text{temperatura media de un día de agosto en Ferrol} \quad T \sim N(20; 2)$$

$$a) P(T > 25) = 1 - P(T < 25) = 1 - P\left(Z < \frac{25-20}{2}\right) = 1 - P(Z < 2,5) = 1 - 0,9938 = 0,0062$$

$$b) P(18 < T < 22) = P\left(\frac{18-20}{2} < Z < \frac{22-20}{2}\right) = P(-1 < Z < 1) = 2P(Z < 1) - 1 = 2 \cdot 0,8413 - 1 = 0,6826$$

$$c) P(T < g) = 0,95 \rightarrow P(T < g) = P\left(Z < \frac{g-20}{2}\right) = 0,95 \rightarrow \frac{g-20}{2} = 1,645$$

$$g = 20 + 2 \cdot 1,645 = 23,29^\circ\text{C}$$

El 95% de los días de agosto no superan una temperatura media de 23,29°C

PROBLEMAS ABAU 2024

10. Una máquina que distribuye agua en botellas echa una cantidad de agua que sigue una distribución normal con media igual a 500 mililitros y desviación típica igual a 4 mililitros.

a) Si elegimos al azar una de las botellas, ¿cuál es la probabilidad de que lleve entre 499 y 502 mililitros?

b) ¿Cuál es la cantidad de agua, en mililitros, excedida por el 97,5% de estas botellas?

$$X = \text{cantidad de agua en ml} \quad X \sim N(500; 4)$$

$$\begin{aligned} a) P(499 < X < 502) &= P(X < 502) - P(X < 499) = P\left(Z < \frac{502-500}{4}\right) - P\left(Z < \frac{499-500}{4}\right) = \\ &\quad \text{tipificar} \\ &= P(Z \leq 0,5) - P(Z \leq -0,25) = 0,6915 - (1 - P(Z < 0,25)) = 0,6915 - 1 + 0,5987 = 0,2902 \end{aligned}$$

La probabilidad de que una botella lleve entre 499 y 502 mililitros es de 0,2902.

$$b) P(X > d) = 0,975 \rightarrow P\left(Z > \frac{d-500}{4}\right) = 0,975$$

Podemos calcular k tal que $P(Z > k) = 0,975$ e igualar después el valor a $(d-500)/4$:

Buscamos en la tabla de la normal $P(Z > k) = 0,975$ que tiene que ser negativo $\rightarrow P(Z > k) = 0,975 = P(Z < -k) \rightarrow -k = 1,96$

$$\text{Igualamos } (d - 500)/4 = -1,96 \rightarrow d = 500 - 1,96 \cdot 4 = 492,16$$

El 97,5% de las botellas tiene más de 492,16 mililitros.

11. La durabilidad de un determinado aparato electrónico sigue una distribución normal de media 20000 horas y desviación típica 2500 horas.

a) Si elegimos al azar uno de estos aparatos, ¿cuál es la probabilidad de que dure menos de 17000 horas?

b) ¿Cuál es la durabilidad, en horas, excedida por el 98,5% de estos aparatos?

$$X = \text{durabilidad en horas} \quad X \sim N(20000; 2500)$$

$$a) P(X < 17000) = P\left(Z < \frac{17000-20000}{2500}\right) = P(Z \leq -1,2) = 1 - P(Z < 1,2) = 1 - 0,8849 = 0,1151$$

La probabilidad de que dure menos de 17000 horas es de 0,1151.

$$b) P(X > d) = 0,985 \rightarrow P\left(Z > \frac{d-20000}{2500}\right) = 0,985$$

Podemos calcular k tal que $P(Z > k) = 0,985$ e igualar después el valor a: $(d-20000)/2500$

Buscamos en la tabla de la normal $P(Z > k) = 0,985$ que tiene que ser negativo $\rightarrow P(Z > k) = 0,985 = P(Z < -k) \rightarrow -k = 2,17$

$$\text{Igualamos } (d - 20000)/2500 = -2,17 \rightarrow d = 20000 - 2,17 \cdot 2500 = 14575$$

El 98,5% de los aparatos dura más de 14575 horas.