

Halla el primer número ~~1+1+...~~ $1+1+...+\underbrace{1+1+...+1}_n$ múltiplo de 45.

$$A(n) = 1 + 1 + \dots + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_n$$

$$9A(n) = 9 + 99 + \dots + 99\dots9 = 10 - 1 + 100 - 1 + \dots + 10^n - 1$$

$$= \frac{10(10^n - 1)}{9} - n$$

$$a_1 \dots a_n \text{ p.g. de razón } r \Rightarrow S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

$$\text{En nuestro caso } 10 + 100 + \dots + 10^n \Rightarrow S_n = \frac{10^n \cdot 10 - 10}{10 - 1} = \frac{10(10^n - 1)}{9}$$

$(r=10)$

$$\text{Por tanto, } A(n) = \frac{10 \cdot (10^n - 1)}{9 \cdot 9} - \frac{n}{9} = \frac{10 \cdot \overbrace{9 \dots 9}^n}{9 \cdot 9} - \frac{n}{9} =$$

$$= \frac{10 \cdot \cancel{9} \cdot \overbrace{1 \dots 1}^n}{9 \cdot 9} - \frac{n}{9} = \frac{10 \cdot (1 \dots 1) - n}{9}$$

$1 \dots 1$ es múltiplo de 9 si $1 + \dots + 1 = n$ es múltiplo de 9
 $\frac{n}{9}$ es múltiplo de 5 si n es múltiplo de 5 y de 9
 y exacto

$\Rightarrow n = 45, 90, \dots$ múltiplo de 45

El primero que cumple es $n = 45$:

$$n = 45 \Rightarrow A(45) = \frac{10 \cdot (10^{45} - 1) - 45}{9 \cdot 9} = \frac{\overbrace{99 \dots 90}^{45} - 45}{9 \cdot 9}$$

$$= \frac{\overbrace{99 \dots 9}^{44} 945}{9 \cdot 9} = \boxed{\frac{\overbrace{11 \dots 1}^{44} 1051}{9}}$$

$$= \frac{\overbrace{1 \dots 1}^{45} 10 - 45}{9 \cdot 9} = \frac{\overbrace{1 \dots 1}^{44} 165}{9}$$