Sumario

0. INTRODUCCIÓN

La **probabilidad** es la rama de las Matemáticas que **estudia el comportamiento de los sucesos aleatorios**. Se ocupa de asignar un cierto número a cada posible resultado que pueda ocurrir en un experimento aleatorio, con el fin de cuantificar dichos resultados y saber si un suceso es más probable que otro. Con este fin, introduciremos algunas definiciones.

¿Qué es un experimento, fenómeno o suceso aleatorio?

EXPERIMENTOS ALEATORIOS. ESPACIO MUESTRAL

Un **experimento** se llama **determinista** si se conoce su resultado de antemano y se llama **aleatorio** si no se conoce el resultado antes de realizarlo aunque se realice en las mismas condiciones.

Ejemplo 1:

a) Si se deja caer un objeto desde una altura, se puede saber de antemano que caerá al suelo, por ello es determinista.

Al no conocer el resultado final son experimentos aleatorios:

b) Lanzar una moneda al aire. No sabemos si saldrá cara o cruz.

c) El partido ganador en unas elecciones. No podemos afirmar que tal o cual partido va a ganar las elecciones, sin embargo, las encuestas nos permite avanzar el resultado con una "cierta seguridad".

d) Número de contagiados por coronavirus al final del 2021 en España. Si las condiciones no varían (nuevos confinamientos, vacunas, …) podremos estudiar e intentar predecir el número de contagios que se producirán antes del fin de 2021.

Si realizamos un experimento aleatorio, llamaremos ***espacio muestral*** del experimento al **conjunto de todos los posibles resultados de dicho experimento.** Al espacio muestral lo representaremos por **E** (o bien por la letra griega omega Ω).
A **cada elemento** que forma parte del espacio muestral se le denomina ***suceso elemental***.

Ejemplo 1:

b) Al tirar una moneda una vez los sucesos elementales son cara (C) y cruz (X), por tanto el espacio muestral es: $E = \{C, X\}$

c) Los sucesos elementales son los partidos PSOE, PP, VOX, SUMAR, ...que se presentan a las elecciones: E={PSOE, PP, VOX, SUMAR, …}

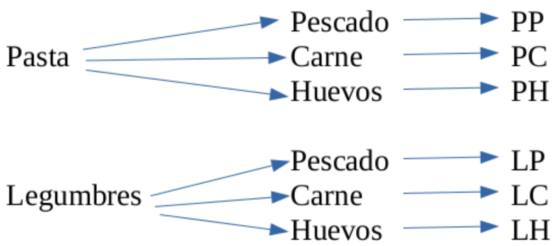
1. COMBINATORIA (NO ENTRA EN EXAMEN)

La ***combinatoria*** estudia diversos métodos de conteo, estrategias para determinar el espacio muestral de un experimento aleatorio.

1.1. Diagrama de árbol

El ***diagrama de árbol*** es un método gráfico de conteo que consiste en marcar, como si fueran ramas de un árbol, los posibles resultados de un experimento aleatorio. El espacio muestral se obtiene en las ramas finales.

Ejemplo 2: Determinar el espacio muestral con un diagrama de árbol. Eligiendo al azar un primer plato (pasta o legumbres) y un segundo plato (pescado, carne o huevos) de la carta de un restaurante, ¿cuáles son los posibles menús?



E= {PP, PC, PH, LP, LC, LH}

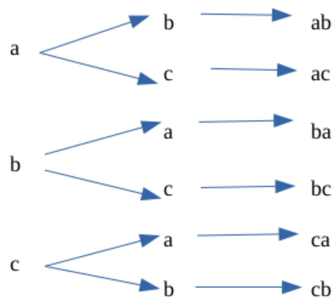
Ejercicio 1: Pablo escoge al azar entre sus camisetas (roja, azul o verde) y pantalones (negro o blanco). Escribe las diferentes posibilidades que tiene de vestirse.

Ejercicio 2: Para merendar unos amigos eligen al azar un bocadillo de jamón, chorizo, queso o tortilla, y un refresco de naranja, limón o cola. Escribe el espacio muestral.

1.2. Variaciones ordinarias o sin repetición.

Las **variaciones de n elementos tomados de m en m**, $\mathbf{V_{n,m}}$, se utilizan para contar los diferentes grupos de m elementos que se pueden formar en conjuntos de n elementos (m<n). Los elementos no se pueden repetir e influye el orden en que los colocamos.

Ejemplo 3:
Con las letras a, b, c forma todas las palabras que puedas de dos letras sin repetir ninguna.



$$V_{3,2} = 3\cdot 2 = 6$$

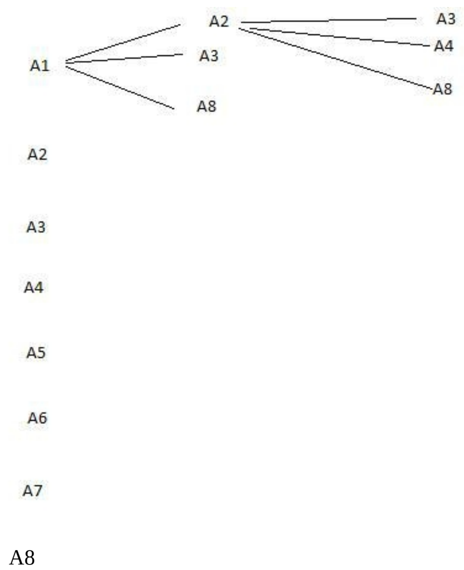
Se calculan por la fórmula: $\boxed{V_{n,m} = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}$

Teniendo en cuenta la definición de factorial de un número: $\boxed{n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}$

OBSERVACIÓN: Se define **0! = 1** también podemos utilizar la fórmula alternativa:

$$\boxed{V_{n,m}=\frac{n!}{(n-m)!}}$$

Ejemplo 4:
¿De cuántas formas distintas se puede formar el podio de una carrera de 100 metros lisos en la que corren 8 atletas?



8 x 7 x 6

$V_{8,3} = 8\cdot 7\cdot 6 = 336$

o bien,

$$V_{8,3}=\frac{8!}{(8-3)!}=\frac{8!}{5!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot\cancel{5\cdot 4\cdot\ldots\cdot 1}}{\cancel{5\cdot 4\ldots 1}}$$

Esta última fórmula puede calcularse utilizando la tecla x! de la calculadora

$$V_{8,3}=\frac{8!}{5!}=\frac{40320}{120}=336$$

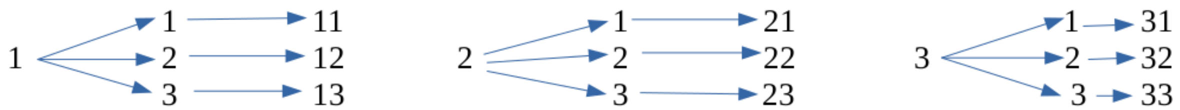
Ejercicio 3: ¿Cuántos números de 5 cifras se pueden escribir con los dígitos del 1 al 9 sin que se repita ninguna cifra?

Ejercicio 4: Calcula: a) $V_{10,4}$ b) $V_{4,2}$ c) $V_{12,5}$ d) $V_{4,4}$

1.3. Variaciones con repetición

Las **variaciones con repetición de n elementos tomados de m en m**, **$VR_{m,n}$**, son variaciones en las que los elementos se pueden repetir.

Ejemplo 5:
Con las ifras 1, 2, 3 escribe todos los números de dos cifras que puedas.



$$VR_{3,2} = 3\cdot 3 = 3^2 = 9$$

La fórmula para el cálculo de las variaciones con repetición es: $\boxed{VR_{n,m} = n^m}$

Ejercicio 5: Con las cifras 8 y 9 forma todos los números de tres cifras que sea posible.

1.4. Permutaciones ordinarias o sin repetición

Las **permutaciones de n elementos, P_n,** son variaciones en las que n = m: $P_n = V_{n,n} = n!$

Ejemplo 6: ¿De cuántas formas distintas se pueden sentar tres personas en un banco?

123 132 213 231 312 321

Hay que formar grupos de 3 personas con 3 personas: $P_3 = 3\,! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Ejercicio 6: Calcula: a) P_8 b) P_{10} c) P_5

Ejercicio 7: ¿Cuántas palabras distintas se pueden formar con las letras de la palabra RICO?

Ejercicio 8: ¿Cuántos números de 5 cifras pueden formarse con las cifras 5, 6, 7, 8 y 9?

1.5. Combinaciones ordinarias o sin repetición

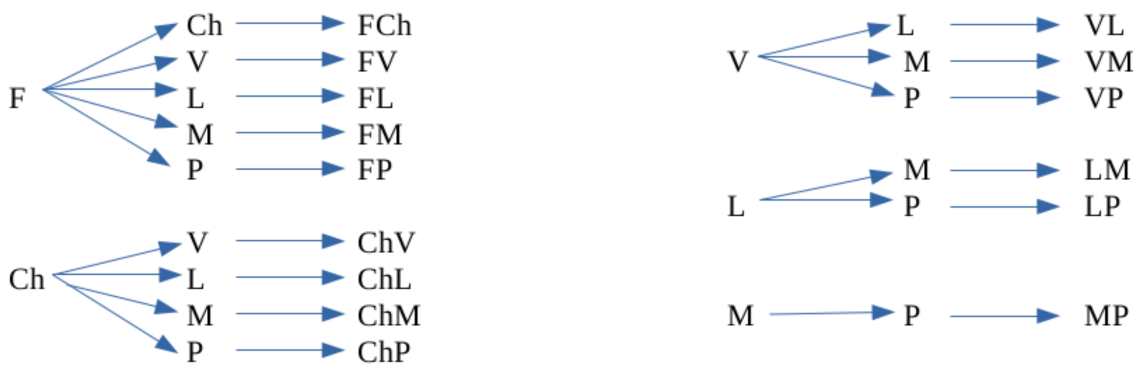
Las **combinaciones de n elementos tomados de m en m, $C_{n,m}$,** se utilizan para contar el número de grupos diferentes que se pueden formar con m elementos distintos, elegidos de un conjunto de n elementos. No influye el orden y ningún elemento puede estar repetido.

$$C_{n,m} = \binom{n}{m} = \frac{n\,!}{m\,! \cdot (n-m)\,!}$$

Ejemplo 7:

¿Cuántos helados de dos sabores diferentes se pueden servir en una heladería que dispone de seis sabores diferentes?

Supongamos que los sabores son: fresa, chocolate, vainilla, limón, mango y pistacho. Podemos resolver el problema realizando un diagrama de árbol:



$$C_{6,2} = \binom{6}{2} = \frac{6\,!}{2\,! \cdot 4\,!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4\,!}{2 \cdot 4\,!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$ podemos observar que es equivalente a $\frac{V_{6,2}}{P_2}$

Triángulo de Pascal y números combinatorios

Ejercicio 9: Calcula: a) $C_{6,4}$ b) $C_{10,9}$ c) $C_{4,2}$ d) $C_{20,3}$

Ejercicio 10: Un examen consta de 8 preguntas de las que hay que escoger 5, ¿de cuántas formas se pueden elegir?

Casos particulares: $\binom{n}{0}=1$ $\binom{n}{n}=1$ $\binom{n}{1}=n$

Propiedad de los números combinatorios: $\binom{n}{m}=\binom{n}{n-m}$ en consecuencia

$$\binom{n}{n-1}=\binom{n}{1}=n$$

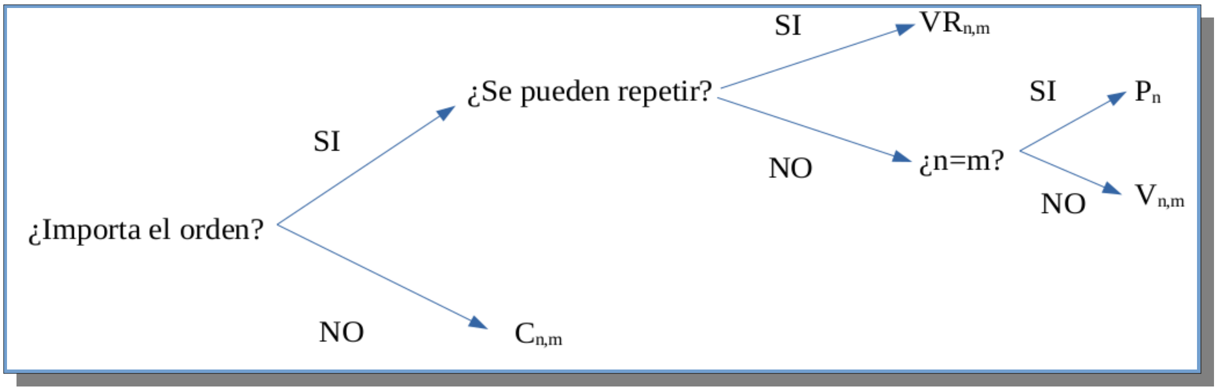
1.6. CUADRO RESUMEN DE FÓRMULAS COMBINATORIAS

	Fórmula	Ejemplo	Calculadora
Variaciones	$V_{n,m} = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)$	$V_{5,3} = 5\cdot4\cdot3 = 60$	nPr
Variaciones con repetición	$VR_{n,m} = n^m$	$VR_{6,2} = 6^2 = 36$	^ o x^y
Permutaciones	$P_n = n!$	$P_4=4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$	x!
Combinaciones	$C_{n,m} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$	$C_{7,4}=\binom{7}{4}=\frac{7!}{4!3!}=35$	nCr

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

La resolución de problemas de combinatoria se puede resumir como *el arte inteligente de contar*.

Para ello podemos seguir el siguiente esquema:



Ejemplo 8: Con los dígitos impares, ¿cuántos números de tres cifras se pueden formar?

n = 5 porque hay cinco cifras impares {1, 3, 5, 7, 9} y m = 3
¿Importa el orden? Sí , no es igual 125 que 521.
¿Se pueden repetir? Sí, podemos formar el número 331.

Por lo tanto se trata de $VR_{5,3} = 5^3 = 125$.

1.7. EJERCICIOS DE COMBINATORIA

11. ¿Cuántas palabras (con o sin sentido) de 4 letras pueden formarse con las letras de la palabra MURCIA?

12. Se dispone de una baraja de 40 cartas y se extraen 3 cartas por dos procedimientos diferentes. Calcular el número de formas distintas de extraerlas:
   a) Sin devolución de la carta extraída.
   b) Con devolución en cada extracción.
Calcula también el número de formas distintas de obtener 4 cartas.

13. ¿Cuántos números naturales existen que sean mayores que 5000 y menores que 10000 con todas las cifras diferentes?

14. ¿Cuántos números capicúa hay de 4 cifras?¿Y de 7?
(Un número capicúa es aquel que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda, por ejemplo, 56765 es un número capicúa de 5 cifras).

15. ¿De cuántas formas puede elegirse un comité de 3 miembros entre 11 personas?

16. En una clase de 30 alumnos, se adjudican 3 premios : al mejor alumno en Matemáticas, Lengua e Inglés. ¿De cuántas formas distintas podrán repartirse? (Un mismo alumno puede recibir varios premios)

17. Resolver el problema anterior si un alumno no puede recibir más de un premio.

18. ¿Cuántos números de 3 cifras pueden formarse con los dígitos del 1 al 9 sin que se repita ninguna cifra?

19. La bandera de un país está formada por 3 franjas horizontales de igual anchura y distinto color. ¿Cuántas banderas distintas se pueden formar con los 7 colores del arco iris?

20. ¿De cuántas formas se pueden sentar 12 alumnos en 4 asientos de la primera fila de la clase? ¿Y si el primer asiento está reservado para el delegado?

21. Cuatro libros distintos de matemáticas y seis diferentes de física se colocan en un estante. De cuántas formas distintas es posible ordenarlos si los libros de cada asignatura deben estar todos juntos.

22. En el alfabeto Morse se utilizan 2 símbolos: el punto y la raya. ¿Cuántos caracteres diferentes es posible obtener en dicho alfabeto tomando, respectivamente, 1, 2, 3 o 4 de los símbolos citados?

23. ¿Cuántos números de 3 cifras se pueden formar con los dígitos del 0 al 9, pudiendo repetir las cifras? (los números del tipo 028 no se consideran de 3 cifras)

24. En un chiringuito de playa hacen mezclas con zumo de frutas. Disponen de 6 zumos de frutas diferentes y cada mezcla se hace con 2 de esos zumos. ¿Cuántos sabores distintos se consiguen? ¿Y si se mezclasen 3 zumos?

25. Como respuesta a un anuncio de trabajo se presentan 12 personas para cubrir 3 plazas iguales. ¿De cuántas maneras se pueden elegir?

26. Se lanzan 3 dados de distintos colores a la vez. ¿Cuántos resultados distintos podemos obtener?
27. En un Campeonato Mundial de ciclismo compiten los equipos de Francia, España, Alemania e Italia. Escribir todas las posibles clasificaciones del torneo (usar un diagrama de arbol). ¿Cuántas hay?

28. Una heladera dispone de 10 clases diferentes de helados. La copa especial de la casa consiste en 4 clases diferentes de helados a elegir por el cliente. ¿Cuántas copas especiales de la casa pueden servirse?

29. Un equipo de baloncesto dispone de 5 camisetas numeradas del 1 al 5 y solo tiene 5 jugadores. ¿De cuántas formas pueden distribuirse las camisetas entre los jugadores?

30. En una estantería hay 20 libros. Entre ellos te dejan elegir un lote de 7. ¿Cuántos lotes diferentes puedes llevarte?

31. En una reunión hay 8 personas. Si cada una estrecha la mano de las demás, ¿cuántos saludos se habrán dado?

32. En la Primera División de fútbol hay 20 equipos: cada uno juega contra todos los demás en campo propio y en campo ajeno. ¿De cuántos partidos consta el campeonato?

33. Se lanza una moneda 8 veces y se van anotando los ocho resultados posibles de cara o cruz. ¿Cuántos resultados diferentes pueden llegar a formarse?

34. Una secretaria ha escrito 12 cartas dirigidas a 12 personas distintas y sus correspondientes sobres. A la hora de meter las cartas en los sobres se despista y va metiendo al azar las cartas en los sobres. ¿De cuántas formas distintas podrá rellenar los sobres?
Una de esas cartas va dirigida a Luis Fernández, ¿en cuántas de las formas anteriores le llegará a Luis su carta?

35. He decidido ir al cine la próxima semana, pero no el día concreto. Además, dudo entre 3 películas. ¿Cuántas opciones distintas hay? Represéntalas en un diagrama de árbol.

36. ¿Cuántas posibles clasificaciones se pueden dar en una liga de futbol de 20 equipos?

37. En un curso de 30 alumnos, ¿de cuántas maneras distintas es posible elegir delegado y subdelegado?

38. Hay que colocar 7 caballos y 7 yeguas en los 14 cajones de salida de una carrera, de forma que los caballos ocupen los cajones impares. ¿De cuántas maneras distintas puede hacerse?

39. Con una baraja francesa (de 52 cartas), ¿ cuántas manos distintas de 5 cartas pueden darse?

40. En el menú del día de un restaurante, se ofrecen para elegir 3 primeros platos, 3 segundos y 4 postres. ¿Cuántos menús diferentes se pueden escoger?

41. Resuelve: $\binom{n}{n-1} = 15$ $\qquad$ $\binom{n}{n-2} = 45$

42. Las placas de matrícula de un coche en España se forman con un número de 4 cifras seguido de 3 letras. Si permitimos usar cualquier cifra y cualquier letra, ¿cuántos vehículos se pueden matricular en España? ¿Y si en vez de utilizar 3 letras solo utilizásemos 2?

2. SUCESOS: OPERACIONES Y PROPIEDADES.

Dado un espacio muestral E, llamaremos ***suceso aleatorio*** a cualquier subconjunto de dicho espacio muestral. Un suceso de un experimento aleatorio es cualquier cosa que se nos ocurra afirmar sobre dicho experimento.

Así, si tiramos una moneda dos veces, serían sucesos todos los siguientes:

1. Sale al menos una cara.
2. Salen más caras que cruces.
3. La moneda cae de canto.
4. No sale ninguna cruz.

2.1. TIPOS DE SUCESOS

Suceso imposible al que no tiene ningún elemento y lo representaremos por $\varnothing$.
Suceso seguro al formado por todos los posibles resultados (es decir, al espacio muestral E).
Espacio de sucesos y lo representaremos por **S**, al conjunto de todos los sucesos aleatorios.

Ejemplo 9: En el experimento del **lanzamiento de una moneda** el espacio muestral es E=$\{$C, X$\}$, analicemos quién es el espacio de sucesos:

a) Sucesos con 0 elementos: $\varnothing$
b) Sucesos con 1 elemento: $\{C\},\{X\}$
c) Sucesos con 2 elementos:$\{C,X\}$
De modo que el espacio de sucesos es: S=$\{\varnothing,\{C\},\{X\},\{C,X\}\}$.

Ejemplo 10: En el experimento **lanzamiento de dos monedas**, si haces el diagrama de árbol obtienes el siguiente espacio muestral:

$$E = \{(C, C), (C,X), (X,C), (X,X)\}$$

El espacio de sucesos tiene ahora 16 elementos, que puedes intentar escribir, siguiendo el esquema anterior, desde los sucesos con 0 elementos hasta aquellos que tienen 4 elementos.
Si describimos los sucesos que poníamos antes como ejemplos, obtenemos:

a) Sale al menos una cara=$\{(C,C),(C,X),(X,C)\}$
b) Salen más caras que cruces=$\{(C,C)\}$
c) La moneda cae de canto=$\varnothing$
d) No sale ninguna cruz=$\{(C,C)\}$

Ejemplo 11: En el caso del **lanzamiento de un dado** el espacio de sucesos es mucho más amplio (64 elementos). Ejemplos de sucesos:

A= ”sacar un número par” formado por los sucesos elementales: A=$\{\{2\},\{4\},\{6\}\}$.
B = ”Sacar un número mayor que 5” → B = $\{\{6\}\}$.
C = ”Sacar un número par y menor que 5” → C = $\{\{2\},\{4\}\}$.

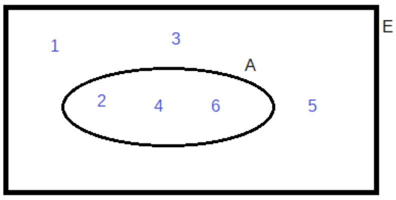
Ejercicio 43:
Una urna contiene dentro 4 bolas de las cuales 2 son blancas, 1 roja y otra azul. Se saca una bola de la urna.

a) Escribir el espacio muestral.
b) Escribir los sucesos “no sacar bola azul” y “sacar bola roja o blanca”.
c) Escribir el espacio de sucesos.

Propiedad:
Si el espacio muestral tiene n elementos, el espacio de sucesos tiene 2^n elementos.

DIAGRAMAS DE VENN:

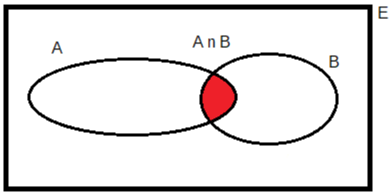
Los sucesos admiten una representación gráfica que facilita su interpretación, denominada diagramas de Venn. Por ejemplo, en el caso del dado y el suceso A = “ sacar número par ”:



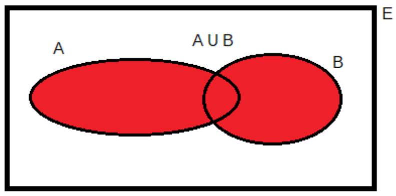
2.2. OPERACIONES CON SUCESOS

Si realizamos un experimento aleatorio y consideramos dos sucesos A y B de su espacio muestral, E. Podemos realizar varias operaciones entre ellos, las más importantes son:

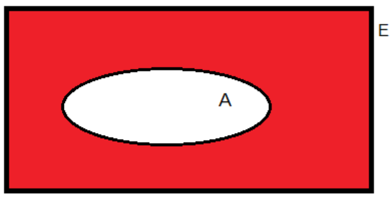
1. **Intersección de sucesos:** $\boldsymbol{A \cap B}$
Es el suceso “ocurren A y B a la vez”.
Está formado por los elementos que están en A y B a la vez.



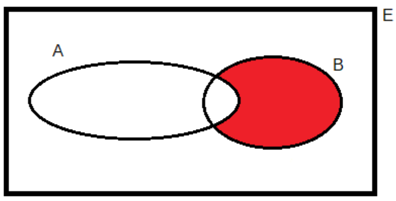
2. **Unión de sucesos:** $\boldsymbol{A \cup B}$
Es el suceso “ocurre A o bien ocurre B o bien ocurren ambos a la vez” o “ocurre alguno”.
Está formado por los elementos que están en ambos conjuntos (aunque no necesariamente en los dos a la vez).



3. **Suceso contrario a A:** $\overline{\boldsymbol{A}}$
Se representa también por A' o bien A^c
Es el suceso que ocurre cuando no ocurre A.
Está formado por los elementos que no pertenecen a A.



4. **Diferencia de sucesos:** $\boldsymbol{B-A}$
Es el suceso “ocurre B pero no ocurre A”.
Está formado por los elementos que están en B pero no están en A.
Se cumple que $\boxed{\boldsymbol{B-A=B-(A\cap B)=B\cap\overline{A}}}$



Ejemplo 12: Si tiramos un dado, ya sabemos que el espacio muestral asociado es E=$\{1,2,3,4,5,6\}$. Sean los sucesos A=“sacar un nº par”=$\{2,4,6\}$, y B=“sacar un número entre 2 y 4” = $\{2, 3, 4\}$.

$A \cap B$=“sacar un nº par y que esté entre 2 y 4 (inclusive)” = $\{2, 4\}$.

$A \cup B$=”sacar un nº par o un nº que esté entre 2 y 4 ”=$\{2,3,4,6\}$.

$\overline{A}$ = “ no sacar un nº par” = $\{1,3,5\}$

$\overline{B}$ = “no sacar un nº entre 2 y 4” = $\{1,5,6\}$.

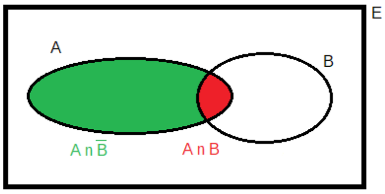
$B - A = \{3\}$.

2.3. SUCESOS INCOMPATIBLES

Dos sucesos A y B son **incompatibles** si NO tienen elementos en común: $\boldsymbol{A \cap B = \emptyset}$

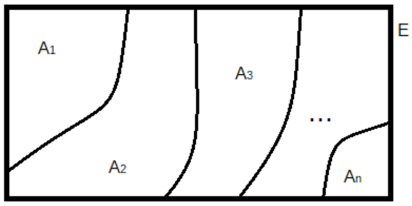
Si los sucesos sí tienen elementos en común, diremos que son **compatibles**.

Todo suceso A puede expresarse como unión de dos sucesos incompatibles $A \cap B$ y $A \cap \overline{B}$



$$\boxed{A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})}$$

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son sucesos incompatibles 2 a 2, cuya unión es el espacio muestral $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E$, se denomina ***sistema completo de sucesos*** y este sistema "divide el espacio muestral en partes que no se solapan".



Ejemplo 13: En el lanzamiento del dado si consideramos los sucesos $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{3, 4\}$ y $A_3 = \{5, 6\}$ tenemos un sistema completo de sucesos.

Son sucesos incompatibles entre sí que cumplen $E = A_1 \cup A_2 \cup A_3$

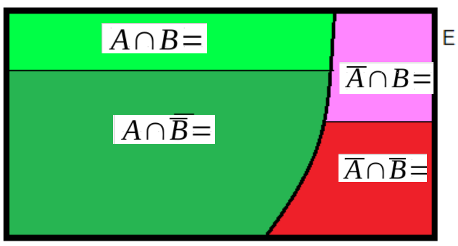
Ejemplo 14: En un instituto se imparten matemáticas y latín de modo que un alumno sólo puede asistir a una de las materias. El 80% de los alumnos estudian matemáticas y el resto latín. El 30% de los alumnos de matemáticas y el 40% de los alumnos de latín cursan francés.

E="todos los estudiantes del instituto" es el espacio muestral. Los estudiantes no estudian matemáticas y latín a la vez, por lo tanto son sucesos incompatibles:

A= "estudiar matemáticas" $\overline{A}$ = "estudiar latín" –> $E = A \cup \overline{A}$

B="estudiar francés" $\overline{B}$ ="no estudiar francés" –> $E = B \cup \overline{B}$

Podemos elegir el sistema completo de sucesos de otra forma, en cuatro sucesos incompatibles:



$A \cap B =$ "estudiantes de matemáticas que estudian francés"

$A \cap \overline{B} =$ "estudiantes de matemáticas que NO estudian francés"

$\overline{A} \cap B =$ "estudiantes de latín que estudian francés"

$\overline{A} \cap \overline{B} =$ "estudiantes de latín que NO estudian francés"

Ejercicio 44: Sea el experimento lanzar un dado y los sucesos A = "salir número par", B = " salir menor que 5 ", C = " salir un 6 ". Halla:

a) A, B y C
b) $A \cap B,\ A \cup B, A \cap C,\ A \cup C$
c) $\overline{A}, \overline{B}$ y $\overline{C}$
d) $B \cap A,\ B \cup A, B \cap C,\ B \cup C$
e) $A \cap \overline{A},\ A \cup \overline{A}, A \cap \overline{B},\ A \cup \overline{C}$
f) ¿Son B y C compatibles?

Actividad: Practica con los ejercicios en Geogebra con diagramas de Venn:

Para 2 sucesos: https://www.geogebra.org/m/HfXGUtGN

Para 3 sucesos: https://www.geogebra.org/m/KSuUb2TR

2.4. PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES CON SUCESOS

Las operaciones con sucesos tienen las siguientes propiedades:

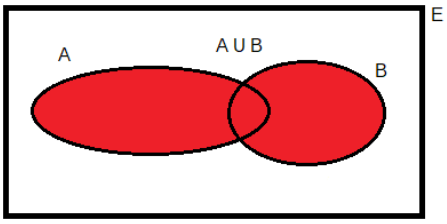
	Intersección	Unión
Conmutativa	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Asociativa	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Idempotente	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
Simplificación	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$
Distributiva	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Elemento neutro	$A \cap E = A$	$A \cup \varnothing = A$
Absorción	$A \cup \varnothing = A$	$A \cup E = A$

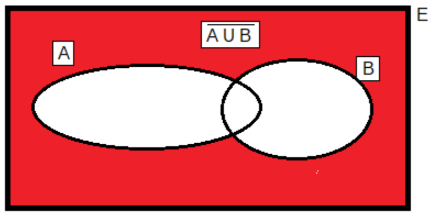
Las operaciones con sucesos tienen otras dos propiedades muy importantes:

Leyes de De Morgan: Si A y B son dos sucesos, se verifican: $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

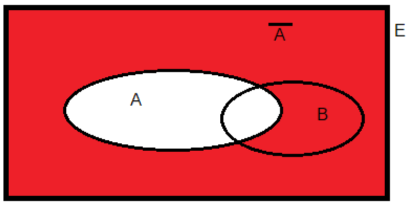
Demostración: Demostraremos la primera de las igualdades.

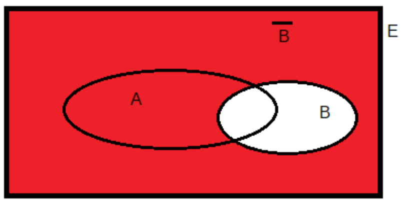
Primero representamos $A \cup B$ en un diagrama de Venn, y luego su contrario $\overline{A\cup B}$:

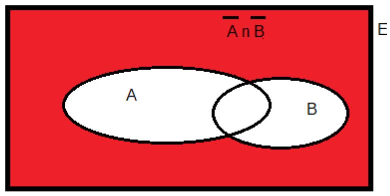




Ahora, representaremos en otro diagrama $\overline{A}$ y $\overline{B}$, y luego su intersección $\overline{A}\cap\overline{B}$:







Observando los dos resultados, vemos que las partes sombreadas son iguales, por lo que la igualdad es cierta. Mediante un procedimiento similar, demuestra la segunda ley de De Morgan.

Ejercicio 45: En una urna tenemos 9 bolas numeradas del 1 al 9. Sacamos una y anotamos su número. Sean los sucesos: A=”sacar un nº primo” B=“sacar un nº cuadrado” (por ejemplo 4 es un número cuadrado, porque $4=2^2$). Se pide:

a) Describir el espacio muestral.

b) Calcula $A \cap B$ y $A \cup B$.

c) ¿Son A y B compatibles o incompatibles?

d) Calcula $\overline{A\cap B}$ y . $\overline{A}\cup\overline{B}$

e) Si C=“sacar un número impar”, calcula $A \cap C$, $B \cap C$, $\overline{A\cap C}$, $\overline{A}\cup\overline{C}$, $\overline{B\cup C}$, $\overline{B}$ $\cap$ $\overline{C}$.

Ejercicio 46: Consideramos el fenómeno aleatorio extraer una carta de una baraja de 40 y anotarla . Sean los sucesos A= “sacar oro”, B= “sacar rey”, C= “sacar el rey de bastos”.

a) Determina los sucesos: $A\cap B, A\cup B, B\cup C, A\cap\overline{C}$, $A\cap B\cap C$, $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$, $\overline{A}\cup\overline{B}$

b) Indica cuales de estos sucesos son incompatibles y compatibles 2 a 2.

3. DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD

Hay muchas maneras de asignar probabilidades. La más sencilla e intuitiva la dio el matemático francés Pierre Simon Laplace (1749-1827), quién enunció la regla que lleva su nombre:

3.1. REGLA DE LAPLACE:

Si realizamos un experimento aleatorio en el que hay n sucesos elementales, todos igualmente probables, entonces si A es un suceso, la probabilidad de que ocurra el suceso A es:

$$P(A)=\frac{n^o \text{ de casos favorables al suceso } A}{n^o \text{ de casos posibles}}$$

Ejemplo 15: Lanzamos un dado normal al aire. Consideramos el suceso A= “sale par”. Calcula P(A).

Hay 6 casos posibles, pues E={1,2,3,4,5,6} y casos favorables al suceso A={2,4,6}:

$$P(A) = 3/6 = 1/2 = 0{,}5.$$

Observa que la probabilidad siempre es un número entre 0 y 1. Siendo 0 la probabilidad del suceso imposible y 1 la del suceso seguro.

El inconveniente que plantea la definición de Laplace es que necesariamente los sucesos elementales tienen que tener la misma probabilidad de ocurrir. Observemos un caso tan sencillo como el siguiente:

Ejemplo 16: De una urna que contiene 8 bolas rojas, 5 amarillas y 7 verdes se extrae una bola al azar. Calcula la probabilidad de que la bola extraída sea :

a) roja b) verde c) amarilla

El espacio muestral en este caso sería: E={R,V,A}, que consta sólo de tres elementos, pero sería un poco ingenuo asignar las probabilidades mediante la regla de Laplace,

$P(R) = 1/3$ $P(V) = 1/3$ $P(A) = 1/3$

porque ya intuitivamente se ve que hay más posibilidades, por ejemplo, de que salga una bola roja que de que salga una bola amarilla, de modo que ¿cómo asignar probabilidades?

Fue el matemático ruso Kolmogorov (1903 – 1987) quién dio una definición axiomática, mucho más precisa y rigurosa desde el punto de vista matemático, aunque bastante menos intuitiva desde el punto de vista práctico:

3.2. DEFINICIÓN AXIOMÁTICA DE PROBABILIDAD

Una probabilidad P es una función que asocia a cada suceso A del espacio de sucesos S , un número real P(A), es decir: $P : S \to \mathbb{R}$, y que cumple las propiedades:

1. $\mathbf{0 \le P(A) \le 1}$, (es decir, cualquier suceso tiene probabilidad positiva y menor o igual que 1).

2. $\mathbf{P(E) = 1}$ (la probabilidad del suceso seguro es 1).

3. **Si A y B son incompatibles, es decir $A \cap B = \varnothing$,** entonces $\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$. (la probabilidad de la unión es la suma de las probabilidades si los sucesos tienen intersección vacía).

Ejemplo de asignación de probabilidad:
Sea un experimento aleatorio cualquiera y definamos en S (espacio de sucesos) la siguiente probabilidad:

$$\boxed{P(A)=\frac{n^o \text{ de elementos del conjunto } A}{n^o \text{ total de elementos}}}$$

Ejemplo 17: En el ejemplo de la urna que contiene 8 bolas rojas, 5 amarillas y 7 verdes y se extrae una bola al azar. Asignaríamos las probabilidades de cada suceso elemental:

$P(R) = 8/20 = 2/5 = 0,4$ $P(A) = 5/20 = 1/4 = 0,25$ $P(V) = 7/20 = 0,35$

Si el suceso B es " salir una bola roja o amarilla" la probabilidad que le asignaríamos es:

P(B) = 13/20

Ejemplo 18: Comprobar si las siguientes funciones definidas para los sucesos elementales son probabilidad, siendo E=*{*a,b,c,d*}* el espacio muestral del experimento aleatorio:

a) $P(a) = 1/2$, $P(b) = 1/3$, $P(c) = 1/4$, $P(d) = 1/5$

1) $0 \leq P(a), P(b), P(c), P(d) \leq 1$

2) P(E) = P({a, b, c, d}) = $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{30+20+15+12}{60}=\frac{77}{60}$ > **1** luego P **NO** es probabilidad.

Ejemplo 19: Comprobar si las siguientes funciones definidas para los sucesos elementales son probabilidad, siendo E=*{*a,b,c,d*}* el espacio muestral del experimento aleatorio:

b) $P(a) = 1/4$, $P(b) = 1/2$, $P(c) = 0$, $P(d) = 1/4$

1) $0 \leq P(a), P(b), P(c), P(d) \leq 1$

2) P(E) = P({a, b, c, d}) = $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+0+\frac{1}{4}=\frac{1+2+0+1}{4}=\frac{4}{4}$ = **1** luego P **SÍ** es probabilidad.

Ejercicio 47: Extraemos una carta de una baraja española. Halla las siguientes probabilidades:
a) Que sea un rey o un as. b) Que sea un rey o una copa c) Que sea un rey y una copa

Ejercicio 48: Se tiene un dado trucado con los resultados que se recogen en la tabla siguiente:

Resultado	1	2	3	4	5	6
Probabilidad		0,15		0,25		0,3

a) Completa la tabla, si se sabe que los números impares tienen la misma probabilidad de salir.

b) Se lanza una vez el dado. Calcular la probabilidad de que no salga un número par.

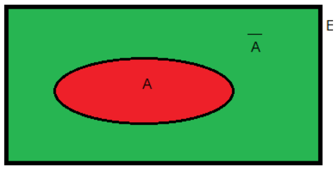
Ejercicio 49: A una reunión llegan Carmen, Lola, Mercedes, Juan, Fernando y Luis. Se eligen dos personas al azar sin importar el orden:

a) Obtén el espacio muestral de este experimento.

b) Calcula la probabilidad de que las dos personas sean del mismo sexo.

3.3. CONSECUENCIAS DE LA DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD.

1. $\boxed{\mathbf{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}}$



E = $A \cup \overline{A}$ con A y $\overline{A}$ son incompatibles, por la propiedad 3)

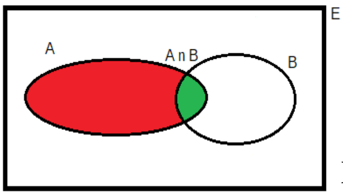
$$p(E) = p(A \cup \overline{A}) = p(A) + p(\overline{A})$$

Por la propiedad 2), p(E)=1, luego $1 = p(A) + p(\overline{A})$ y por tanto $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

2. $\boxed{\boldsymbol{P(\varnothing) = 0}}$

Como $\overline{E} = \varnothing$, resulta que: $p(\overline{E}) = p(\varnothing) = 1 - p(E) = 1 - 1 = 0$

3. Si A y B son dos sucesos cualesquiera, $\boxed{\boldsymbol{P(A) = P(A-B) + P(A \cap B)}}$

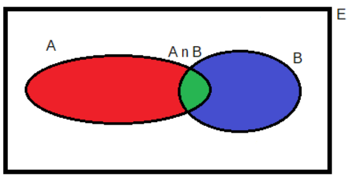


El suceso A es la unión de los sucesos incompatibles

$$A = (A-B) \cup (A \cap B) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$$

por la 3ª propiedad $P(A) = P(A-B) + P(A \cap B) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B)$

4. Si A y B son dos sucesos cualesquiera, $\boxed{\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}}$



Podemos expresar A ∪ B como unión de sucesos incompatibles:

$$A \cup B = (A-B) \cup B$$

por la 3ª propiedad $P(A \cup B) = P(A-B) + P(B)$

Por otra parte $P(A) = P(A-B) + P(A \cap B) \Rightarrow P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$

Uniendo ambas igualdades, $P(A \cup B) = P(A-B) + P(B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B)$

5. Si A, B y C son tres sucesos cualesquiera,

$$\boxed{\boldsymbol{P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)}}$$

Ejercicio 50: En una comunidad autónoma se editan tres periódicos “La Voz de Galicia”, “El Correo Gallego” y “El Faro de Vigo”. Se sabe que “La Voz de Galicia” lo leen el 40% de los habitantes; “El Correo Gallego” , el 22%, y “El Faro de Vigo” el 19%. Se sabe que el 8% lee “La Voz de Galicia” y “El Correo Gallego”, el 6% “La Voz de Galicia” y “El Faro de Vigo”, el 4% “El Correo Gallego” y “El Faro de Vigo”, y finalmente el 2% lee los tres periódicos. Si elegimos un habitante al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que lea sólo el periódico “La Voz de Galicia”?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que lea un sólo periódico?

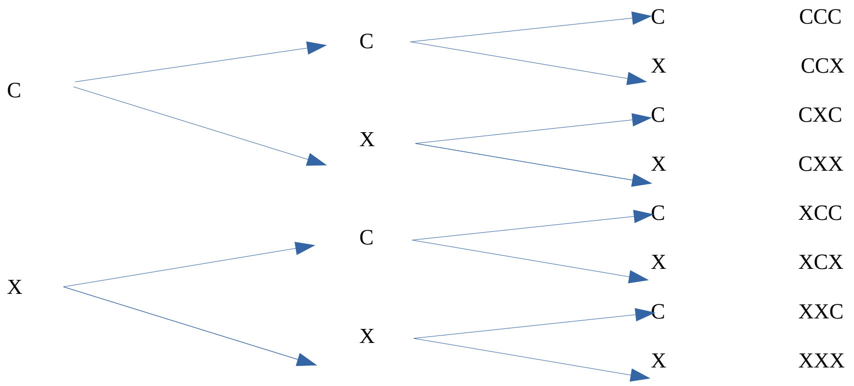
c) ¿Cuál es la probabilidad de que lea únicamente “La Voz de Galicia” y “El Correo Gallego”?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que no lea ninguno de los tres periódicos?

Ejemplo 20: Se tira una moneda 3 veces. Calcular la probabilidad de obtener alguna cara.

Los problemas de este tipo, en los que se pide la probabilidad de obtener "alguna" cosa, se suelen resolver muy bien por paso al complementario. En este caso concreto, A = "obtener alguna cara".
$\overline{A}$ = "no obtener ninguna cara"= {XXX}

Entonces, $P(\overline{A}) = 1/8$, pues hay 8 casos posibles y sólo uno favorable (XXX, 3 cruces), por tanto:
$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 1/8 = 7/8$



Ejemplo 21: Se lanza un dado dos veces y se suman las dos caras. Sea A el suceso A= "la suma de resultados es mayor o igual que 10" y B= "la suma de los resultados es múltiplo de 6". Calcular P(A), P(B), $P(A \cap B)$ y P(A∪ B).

Hay 36 posibles resultados al lanzar dos veces un dado que podemos ver en esta tabla:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

¿Cuántos de ellos suman 10 o más?

Que sumen 10: (4,6), (5,5), (6,4)
Que sumen 11: (5,6), (6,5) Por tanto, $P(A) = 6/36 = 1/6$.
Que sumen 12: (6,6)

¿Cuántos hay que sumen múltiplo de 6?

Que sumen 6: (1,5), (2,4),(3,3), (4,2), (5,1)
Que sumen 12: (6,6) Por tanto, $P(B) = 6/36 = 1/6$.

En cuanto a $A \cap B = \{(6, 6)\}$, luego $P(A \cap B) = 1/36$.

El suceso unión será "la suma es mayor o igual que 10 o es múltiplo de 6" que está formado por todos los elementos de A y todos los de B, como (6,6) aparece en los dos el número de elementos es de 11. Por tanto, $P(A \cup B) = 11/36$

O podemos utilizar $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 6/36 + 6/36 - 1/36 = 11/36$

Ejercicio 51: El duque de Toscana le preguntó un día a Galileo: ¿por qué cuando se lanzan 3 dados se obtiene más veces la suma 10 que la suma 9, aunque se obtenga de 6 maneras diferentes cada una?
¿Cuál fue la respuesta de Galileo? **Simulación de Galileo y los tres dados**

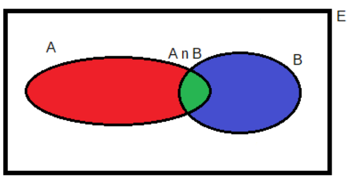
Ejercicio 52: Una bolsa contiene 8 bolas numeradas. Se extrae una bola y anota su número. Sean los sucesos A= "salir par", B= "salir impar", C= "salir múltiplo de 4".
Calcular las probabilidades de $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ y $\overline{A \cup C}$.

3.4. PROBLEMAS DE PROBABILIDAD CON CONTEXTO

Ejemplo 22: En una clase de primaria el 50% de los niños practica natación, el 20% practica baloncesto y el 5% ambos deportes
a) Calcula la probabilidad de que un niño elegido al azar no practique ni natación ni baloncesto.
b) Calcula la probabilidad de que un niño practique natación pero no practique baloncesto.
c) Calcula la probabilidad de que un niño practique natación o baloncesto.

Definimos los sucesos A="Practica natación" B= "Practica baloncesto"

El espacio muestral queda dividido en cuatro sucesos incompatibles que se pueden representar con diagramas de Venn y cuyas probabilidades se pueden representar en una tabla de contingencia:



	B	$\overline{B}$	
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \overline{B})$	P(A)
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
	P(B)	$P(\overline{B})$	1

Para nuestro ejemplo:

	B	$\overline{B}$	
A	$P(A \cap B)$ = 5\100 = 0,05	$P(A \cap \overline{B})$ = 0,5 – 0,05 = 0,45	P(A) = 50\100 = 0,5
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B)$ = 0,2 – 0,05 = 0,15	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$ = 0,5 – 0,15 = 0,35	$P(\overline{A})$ = 1 – 0,5 = 0,5
	P(B) = 20\100=0,2	$P(\overline{B})$ = 1 – 0,2 = 0,8	1

a) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,35$

b) $P(A \cap \overline{B}) = 0,45$

c) $P(A \cup B)= P(A) + P(B) – P(A \cap B) = 0,5 + 0,2 – 0,05 = 0,65$

Otra alternativa es usar las leyes de De Morgan: $P(A \cup B)= 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1- P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0,35$

Ejercicio 53: Se realizaron dos debates electorales, uno el lunes y otro el martes. Se hizo una encuesta a 1500 personas para estimar la audiencia, de las cuales: 1100 personas vieron el debate del lunes, 1000 vieron el debate del martes y 300 no vieron ninguno. Eligiendo al azar a uno de los encuestados:
a) Calcula la probabilidad de que viera los dos debates.
b) Calcula la probabilidad de que viera alguno de los debates.

Ejercicio 54: En el mes de abril de 2020 se realizó una encuesta a los estudiantes de segundo de bachillerato de un centro a cerca de los dispositivos con los que seguían las clases online. El 80% disponía de ordenador, el 15% disponía de móvil y el 10% disponía de ambos dispositivos. Nos hemos encontrado por casualidad en la calle con un estudiante de este centro:

a) Halla la probabilidad de que el estudiante dispusiese de alguno de los dos dispositivos.
b) Halla la probabilidad de que el estudiante no dispusiese de ninguno de los dispositivos mencionados.
c) Halla la probabilidad de que el estudiante dispusiese de alguno de los dos dispositivos pero no de ambos.

3.5. PROBLEMAS DE PROBABILIDAD SIN CONTEXTO

Ejemplo 22: Si P(A)=0,35, P(B)= 0,24 y $P(A \cap B)$=0,13, calcula las probabilidades: $P(A \cup B)$, $P(A \cup \overline{B})$, $P(\overline{A} \cup B)$, $P(A \cap \overline{B})$, $P(\overline{A} \cap B)$, $P(\overline{A} \cup \overline{B})$

MÉTODO 1: Utilizaremos estas tres propiedades de la probabilidad:

1. $\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$
2. Si A y B son dos sucesos cualesquiera, $\boxed{P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})}$
3. Si A y B son dos sucesos cualesquiera, $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

Y las leyes de sucesos de De Morgan: $\boxed{\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}}$

Fíjate: Todas las probabilidades deben estar entre 0 y 1

Calculamos la probabilidad de los sucesos contrarios a los del enunciado:

P(A)=0,35 → $P(\overline{A})$= 1 – P(A) = 1 - 0,35 =**0,65** P(B)= 0,24 → $P(\overline{B})$= 1 – P(B) = 1 – 0,24 = **0,76**

$P(\overline{A \cap B})$= 1- $P(A \cap B)$ = 1 - 0,13 = 0,87 por las leyes de De Morgan $P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A} \cup \overline{B})$ = **0,87**

Calculamos $P(A \cup B)$= P(A) + P(B) – $P(A \cap B)$ = 0,35 + 0,24 – 0,13 = **0,46**

$P(A \cap \overline{B})$ = P(A) – $P(A \cap B)$ = 0,35 – 0,13 = **0,22**

$P(\overline{A} \cap B)$ = P(B) – $P(A \cap B)$ = 0,24 – 0,13 = **0,11**

Calculamos ahora las probabilidades que faltan:

$P(A \cup \overline{B})$ = P(A) + $P(\overline{B})$ – $P(A \cap \overline{B})$ = 0,35 + 0,76 – 0,22 = **0,89**

$P(\overline{A} \cup B)$ = $P(\overline{A})$ + P(B) – $P(\overline{A} \cap B)$ = 0,65 + 0,24 – 0,11 = **0,78**

MÉTODO 2: Utilizamos la tabla de contingencia:

	B	$\overline{B}$	
A	0,13	0,22	0,35
$\overline{A}$	0,11	0,54	0,65
	0,24	0,76	1

$P(A \cap \overline{B})$ = **0,22** $P(\overline{A} \cap B)$ = **0,11**

$P(A \cup B)$ = 1 - $P(\overline{A} \cap \overline{B})$) = 1 – 0,54 = **0,46**

o se calcula la probabilidad de las unión por la fórmula como en el apartado anterior

Ejercicio 55: Conociendo las probabilidades P(A)=0,5, P(B)=0,4 y P(A ∪ B) = 0,85 calcula:

a) P(A ∩ B) b) $P(A \cap \overline{B})$ c) $P(\overline{A} \cap B)$ d) $P(\overline{A})$ e) $P(\overline{A \cup B})$

Ejercicio 56: De los sucesos A y B de un experimento aleatorio se sabe que $P(A)=\frac{2}{5}$, $P(B)=\frac{1}{3}$ y $P(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{1}{3}$. Calcula: a) P(A ∪ B) b) P(A ∩ B) c) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$

d) ¿Son A y B incompatibles?

Ejercicio 57: De los sucesos A y B de un experimento aleatorio se sabe que P(A)=0,4, P(B)=0,3 y $P(A\cap B)=0{,}1$. Calcula: a) P(A ∪ B) b) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ c) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$

Ejercicio 58: En un experimento aleatorio, sean A y B dos sucesos tales que $P(\overline{A})=0{,}4$, P(B)=0,3. Sabiendo que A y B son **incompatibles**, calcula $P(A\cup B)$ y $P(A-B)$.

4. PROBABILIDAD CONDICIONADA

Hasta ahora nos hemos limitado a calcular probabilidades únicamente partiendo de un experimento aleatorio, sin tener más información. Pero, ¿qué ocurre si conocemos alguna información adicional?

Supongamos que estamos realizando el experimento aleatorio de lanzar un dado y obtener el número que sale. Consideremos el suceso A= “sale un 4” y el suceso B = “sale un n.º par”.

P(A)	**P(A/ B)** “Tenemos información extra, nos han dicho que el número que ha salido es par: B ={2, 4, 6}”
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

La información obtenida B, modifica la probabilidad de A. Lo expresaremos así P(A/B) y se lee “probabilidad de A condicionada a B” o “probabilidad de A conociendo B”.

Definición:
Sea A un suceso aleatorio asociado a un experimento aleatorio, y sea B otro suceso que sabemos que se ha realizado. Llamaremos ***probabilidad de A condicionada a B*** y lo expresaremos por *P*(*A/B*) a la expresión:

$$\boxed{P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}}$$

Ejemplo 23:

Para el caso anterior, A={4}, B={2,4,6} –→ P(B) = 3/6 = 1/2 A ∩ B = {4} –→ P(A ∩ B)=1/6.

Luego: $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}}=\frac{1}{3}$ es lo mismo que obteníamos antes directamente.

Ejercicio 59: Calcula la probabilidad de que la suma de las caras de dos dados sea mayor o igual que 10 sabiendo que en el primer dado ha salido un seis.

Ejemplo 24: En una clase de secundaria de 25 alumnos, 15 alumnos practican voleibol, 8 practican baloncesto y 5 ambos deportes.

a) Calcula la probabilidad de que un alumno practique voleibol si juega al baloncesto.
b) Calcula la probabilidad de que un alumno practique baloncesto si no juega al voleibol.

A = “practicar voleibol” P(A) = 15/25 B = “practicar baloncesto” P(B) = 8/25

P(A ∩ B)=5/25

	B	$\overline{B}$	
A	5/25=0,2	0,4	15/25=0,6
$\overline{A}$	0,12	0,28	0,4
	8/25=0,32	0,68	1

a) $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0{,}2}{0{,}32}=0{,}625$

5 alumnos practican voleibol de los 8 que practican baloncesto

b) $P(B/\overline{A})=\dfrac{P(B\cap\overline{A})}{P(\overline{A})}=\dfrac{0{,}12}{0{,}4}=0{,}3$

3 alumnos practican baloncesto de los 10 que no practican voleibol

4.1. SUCESOS INDEPENDIENTES

Si bien el conocer cierta información adicional modifica la probabilidad de algunos sucesos, puede ocurrir que otros mantengan su probabilidad, pese a conocer dicha información.

Ejemplo 25: En el lanzamiento de un dado, consideremos los sucesos: A= “sacar un número par” y B= “sacar un número menor o igual que 2”. Calcula P(A) y P(A/B).

A= {2,4,6}, B= {1,2} y A∩B = {2} –> P(A) = 3/6 = 0,5 $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{6}}=\dfrac{1}{2}=0{,}5$

Por tanto el conocer la información *B* no modifica la probabilidad de A. Son independientes.

Cuando ***P*(*A/B*) = *P*(*A*), diremos que los *sucesos A y B son independientes***

Propiedad: **A y B son sucesos independientes ⟺ *P*(*A* ∩ *B*) = *P*(*A*) · *P*(*B*)**

Demostración:
“⇒” Si A y B son independientes, *P*(*A/B*) = *P*(*A*), y por la fórmula de la probabilidad condicionada, P(*A/B*) = P(*A* ∩ *B*) / *P*(*B*), luego *P*(*A* ∩ *B*) = *P*(A/B)·*P*(*B*), y por tanto *P*(*A* ∩ *B*) = *P*(*A*)·*P*(*B*).

“⇐” Partiendo de *P*(*A* ∩ *B*) = *P*(*A*) · *P*(*B*), entonces *P*(*A/B*) = *P*(*A* ∩ *B*) / *P*(*B*) = *P*(*A*) *P*(*B*) / *P*(*B*) = *P*(*A*) luego *P*(*A/B*) = *P*(*A*) y por tanto A y B son independientes.

NOTA IMPORTANTE: No confundir sucesos incompatibles y sucesos independientes.
Dos sucesos son **incompatibles** cuando no tienen elementos en común, es decir, ***A*** ∩ ***B* = ∅**.
Dos sucesos son **independientes** si **P(A∩B) = P(A)·P(B)**.
Son conceptos totalmente distintos. Uno se refiere a CONJUNTOS y otro se refiere a PROBABILIDADES.

En el ejemplo anterior A y B son independientes pero no incompatibles ya que la intersección tiene un elemento.

4.2. EJERCICIOS DE PROBABILIDAD CONDICIONADA CON CONTEXTO

60. En una oficina hay 8 chicos y 9 chicas. De ellos, 4 chicos y 6 chicas llevan gafas. Si escogemos una persona al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Sea chica y no lleve gafas.
b) No lleve gafas y sea chico.
c) Sea chica, sabiendo que lleva gafas
d) Lleve gafas, sabiendo que es chico.
e) ¿Es independiente ser chica y llevar gafas?

61. El 35% de los vecinos de un barrio practica algún deporte (D). El 60% está casado (C) y el 25% no está casado ni hace deporte. Describe en función de D y C los siguientes sucesos y calcula sus probabilidades.

a) Está casado y practica deporte.
b) Practica deporte y no está casado.
c) Está casado y no practica deporte.
d) Practica deporte sabiendo que está casado.
e) ¿Estar casado y practicar deporte es independiente?
f) ¿Es incompatible?

62. En una determinada población, el 40% de los individuos lee diariamente la prensa y el 75% ve diariamente las noticias en la televisión. Además, el 25% de los individuos lee la prensa y ve las noticias en la televisión diariamente.

a) ¿Son independientes los sucesos”leer diariamente la prensa” y ”ver diariamente las noticias en la televisión”?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo lea la prensa diariamente pero no vea las noticias en la televisión?

c) Si un individuo lee la prensa diariamente, ¿cuál es la probabilidad de que también vea las noticias en la televisión

4.3. EJERCICIOS DE PROBABILIDAD CONDICIONADA SIN CONTEXTO

63. Sea A y B dos sucesos tales que P(A)=0,4 , P(B)= 0,3 y $P(A\cap B)=0,3$. Calcula $P(A\cup B)$, $P(A/B)$, $P(\overline{A}\cap\overline{B})$ y $P(\overline{A}\cup\overline{B})$.

64. En un experimento aleatorio, sean A y B dos sucesos tales que $P(A)=0,4$, P(B)=0,5 y $P(A/B)=0,7$. Calcula $P(A\cup B)$ y $P(\overline{A}/B)$.

65. Sean A y B dos sucesos asociados a un mismo experimento tales que $P(A\cup B)$ = 0,9, $P(\bar{A})$= 0,4 y que $P(A\cap B)$=0,2.

a) Calcula P(A/B) . Argumenta si los sucesos A y B son, o no, independientes.

b) Calcula $P(\overline{A}\cup B)$, P(B-A) , $P(B/\bar{A})$

66. De dos sucesos conocemos que $P(A\cap B) = 1/5$ y $P(A) = 1/2$, calcula P(B) y $P(A \cup B)$ sabiendo que A y B son independientes.

67. De dos sucesos conocemos que $P(A \cup B) = 2/3$ y $P(A) = 1/5$, calcula $P(A \cap B)$ y P(B) para que A y B sean independientes.

68. Se considera dos sucesos A y B asociados a un mismo experimento, tales que P(A)=0,4 , P(B/A)= 1/3 y $P(A\cup B)=11/15$.

a) ¿Son A y B independientes? ¿Son A y B compatibles? Razona tus respuestas.

b) Calcula $P(A\cap B)$, $P(B/\overline{A})$, $P(\overline{A}\cup B)$ $P(\overline{A}/\overline{B})$

5. TEOREMAS DE LA PROBABILIDAD TOTAL Y DE BAYES.

Un **experimento compuesto** es aquel que consta de dos o más experimentos aleatorios simples.

Es decir, si tiramos un dado o una moneda, son experimentos aleatorios simples, pero si realizamos el experimento de tirar un dado y posteriormente una moneda, estamos realizando un experimento compuesto.

Propiedad: De la fórmula para calcular la probabilidad condicionada se deduce inmediatamente que:

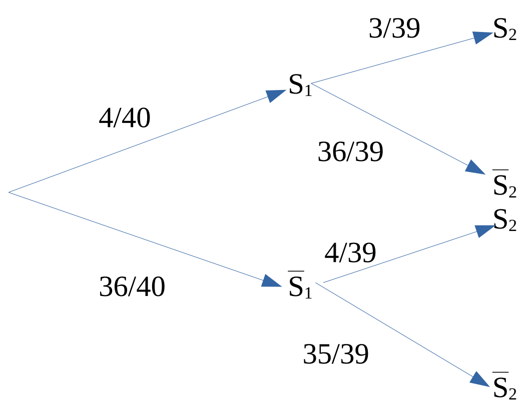
$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B) \quad \text{y} \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)}$$

Ejemplo 28: . Se extraen 2 cartas, sin devolución, de una baraja de 40. Calcular la probabilidad de extraer 2 sotas.

Sea S_1 = "sacar sota en la 1ª" y S_2 = "sacar sota en la 2ª", nos piden $P(S_1 \cap S_2) = P(S_1) \cdot P(S_2/S_1)$.

Ahora bien , $P(S_1) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$ y $P(S_2/S_1) = \frac{3}{39} = \frac{1}{13}$, por lo que $P(S_1 \cap S_2) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{130}$

La forma más sencilla de calcular probabilidades en experimentos compuestos es un **diagrama de árbol**, donde en cada rama situamos la probabilidad que le corresponde al suceso del final de dicha rama. Estas probabilidades que se van poniendo en el árbol son probabilidades condicionadas, porque dependen de los resultados anteriores.



$$P(S_1 \cap S_2) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{1}{130}$$

Diagrama de árbol para la extracción de una carta que sea sota o no

4.2. PROBABILIDAD TOTAL

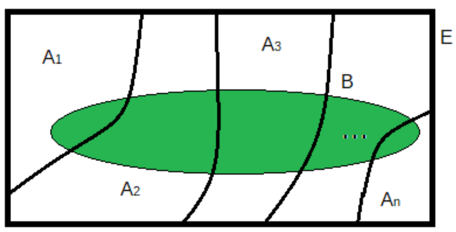
Teorema de la probabilidad total:

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un sistema completo de sucesos y B otro suceso de este espacio muestral, se cumple que:

$$\boldsymbol{P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)}$$

Sea un sistema completo de sucesos, es decir, sucesos incompatibles cuya unión es el espacio muestral, $E = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$.

Cualquier suceso B puede expresarse como la unión de conjuntos disjuntos $B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup .. \cup (B \cap A_n)$, por tanto, $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n)$.



4.3. TEOREMA DE BAYES

Como consecuencia del teorema de la probabilidad total y de las propiedades de la probabilidad condicionada, resulta este importante teorema que permite calcular probabilidades condicionadas:

Teorema de Bayes

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un sistema completo de sucesos y B otro suceso de este espacio muestral, se cumple que:

$$\boldsymbol{P(A_i/B)=\frac{P(A_i)\cdot P(B/A_i)}{P(A_1)\cdot P(B/A_1)+P(A_2)\cdot P(B/A_2)+\ldots+P(A_n)\cdot P(B/A_n)}} \qquad \boldsymbol{1\le i\le n}$$

Demostración:

Por definición de probabilidad condicionada $P(A_i/B)=\dfrac{P(A_i\cap B)}{P(B)}=\dfrac{P(A_i)\cdot P(B/A_i)}{P(B)}$

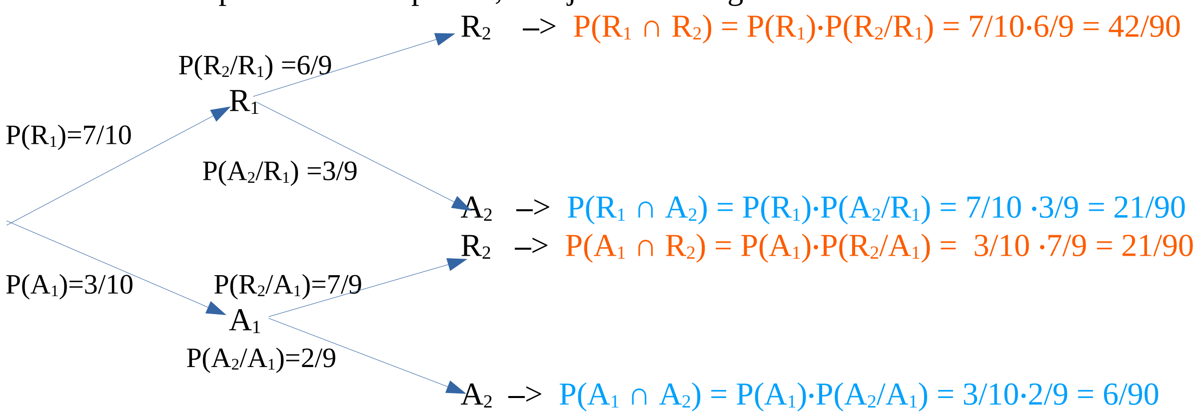
Por el teorema de la probabilidad total: P(B) = $P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n)$.

Sustituimos y obtenemos el teorema de Bayes.

NOTA: Las probabilidades $P(A_i)$ se denominan probabilidades *a priori*.
Las probabilidades $P(A_i/B)$ se denominan probabilidades *a posteriori*.

Ejemplo 29: Tenemos una urna con 7 bolas rojas y 3 azules. Extraemos una bola y sin devolverla extraemos otra.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean azules?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea roja?
c) Sabiendo que la segunda bola es roja, ¿cuál es la probabilidad de que la primera haya sido azul?

Se trata de un experimento compuesto, dibujamos su diagrama de árbol:



a) $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\cdot P(A_2/A_1) = 3/10\cdot 2/9 = 6/90$

b) $P(R_2) = P(R_1 \cap R_2) + P(A_1 \cap R_2) = P(R_1)\cdot P(R_2/R_1) + P(A_1)\cdot P(R_2/A_1) = \dfrac{7}{10}\cdot\dfrac{6}{9}+\dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{7}{9}=$

$=\dfrac{42}{90}+\dfrac{21}{90}=\dfrac{63}{90}=\dfrac{7}{10}$ (teorema de la probabilidad total)

c) $P(A_1/R_2) = \dfrac{P(A_1\cap R_2)}{P(R_2)}=\dfrac{21}{90}:\dfrac{63}{90}=\dfrac{21}{63}=\dfrac{1}{3}$ escrito como teorema de Bayes:

$$P(A_1/R_2)=\frac{P(A_1\cap R_2)}{P(R_2)}=\frac{P(A_1)\cdot P(R_2/A_1)}{P(R_2\cap A_1)+P(R_2\cap A_2)}=\frac{P(A_1)\cdot P(R_2/A_1)}{P(R_2/A_1)\cdot P(A_1)+P(R_2/A_2)\cdot P(A_2)}$$

Ejemplo 30: a) Una urna contiene 3 bolas rojas, 2 verdes y 1 azul. Extraemos una bola, anotamos su color, la devolvemos a la urna, sacamos otra bola y anotamos su color. Halla la probabilidad de los siguientes sucesos:

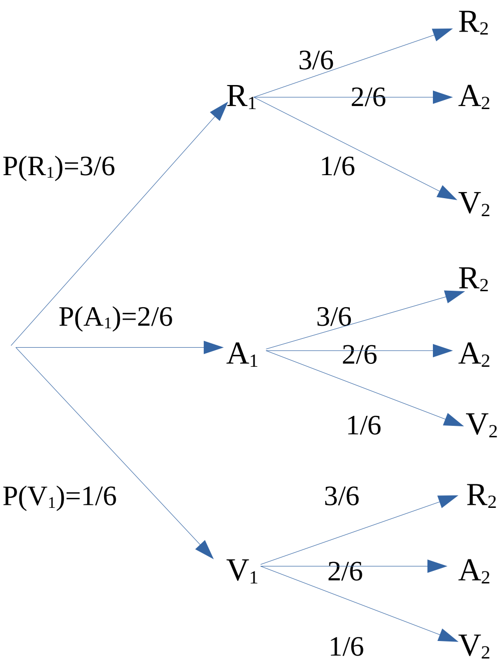
1) Las dos bolas son rojas 2) Alguna bola es azul 3) Ninguna bola es verde

4) La segunda bola es roja 5) La primera bola es azul sabiendo que la segunda fue roja.

b) Repetimos el experimento sin devolver la bola a la urna. Determina las probabilidades de los mismos sucesos.

c) Si sacáramos las dos bolas a la vez, ¿en cuál de las dos situaciones anteriores nos encontraríamos?

a) CON DEVOLUCIÓN: Al devolver la bola a la urna la extracción de la segunda bola es independiente de la primera:



$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)\cdot P(R_2/R_1) = 3/6\cdot 3/6 = 9/36$

$P(R_1 \cap A_2) = P(R_1)\cdot P(A_2/R_1) = 3/6 \cdot 2/6 = 6/36$

$P(R_1 \cap V_2) = P(R_1)\cdot P(V_2/R_1) = 3/6 \cdot 1/6 = 3/36$

$P(A_1 \cap R_2) = P(A_1)\cdot P(R_2/A_1) = 2/6 \cdot 3/6 = 6/36$

$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\cdot P(A_2/A_1) = 2/6\cdot 2/6 = 4/36$

$P(A_1 \cap V_2) = P(A_1)\cdot P(V_2/A_1) = 2/6 \cdot 1/6 = 2/36$

$P(V_1 \cap R_2) = P(V_1)\cdot P(R_2/V_1) = 1/6 \cdot 3/6 = 3/36$

$P(V_1 \cap A_2) = P(V_1)\cdot P(A_2/V_1) = 1/6\cdot 2/6 = 2/36$

$P(V_1 \cap V_2) = P(V_1)\cdot P(V_2/V_1) = 1/6 \cdot 1/6 = 1/36$

1) P("las dos bolas son rojas") = $P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)\cdot P(R_2) = \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$

2) P("alguna bola es azul")= $P(R_1 \cap A_2) + P(A_1) + P(V_1 \cap A_2) = \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$

o calculamos la probabilidad del contrario:

P("alguna bola es azul")=1 – P("ninguna bola es azul")=1- $P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2) = 1-\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$

3) P("ninguna bola es verde")=$P(\overline{V}_1 \cap \overline{V}_2) = P(\overline{V}_1)\cdot P(\overline{V}_2) = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$ (o sumamos las ramas)

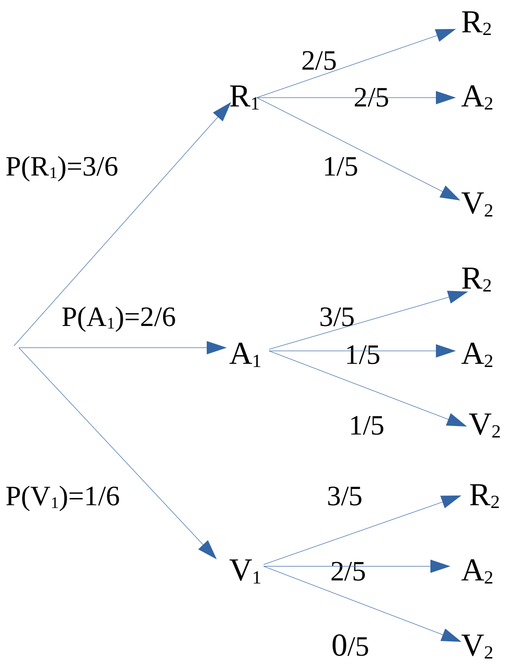
4) P("la segunda bola es roja")=$P(R_2)$ = (teorema de la probabilidad total)

$P(R_1 \cap R_2) + P(A_1 \cap R_2) + P(V_1 \cap R_2) = \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}+\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$

5) P("primera bola es azul sabiendo que la segunda fue roja")=$P(A_1/R_2)$ =(probabilidad a posteriori)

$$\frac{P(A_1\cap R_2)}{P(R_2)}=\frac{6}{36}:\frac{18}{36}=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$$

b) SIN DEVOLUCIÓN: Al no devolver la bola a la urna la composición de la urna varía dependiendo de la primera bola extraída:



$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2/R_1) = 3/6 \cdot 2/5 = 6/30$

$P(R_1 \cap A_2) = P(R_1) \cdot P(A_2/R_1) = 3/6 \cdot 2/5 = 6/30$

$P(R_1 \cap V_2) = P(R_1) \cdot P(V_2/R_1) = 3/6 \cdot 1/5 = 3/30$

$P(A_1 \cap R_2) = P(A_1) \cdot P(R_2/A_1) = 2/6 \cdot 3/5 = 6/30$

$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) = 2/6 \cdot 1/5 = 2/30$

$P(A_1 \cap V_2) = P(A_1) \cdot P(V_2/A_1) = 2/6 \cdot 1/5 = 2/30$

$P(V_1 \cap R_2) = P(V_1) \cdot P(R_2/V_1) = 1/6 \cdot 3/5 = 3/30$

$P(V_1 \cap A_2) = P(V_1) \cdot P(A_2/V_1) = 1/6 \cdot 2/5 = 2/30$

$P(V_1 \cap V_2) = P(V_1) \cdot P(V_2/V_1) = 1/6 \cdot 0/5 = 0/30$

1) P(”las dos bolas son rojas”) = $P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2/R_1) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

2) P(”alguna bola es azul”)= $P(R_1 \cap A_2) + P(A_1) + P(V_1 \cap A_2) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$

P(”alguna bola es azul”)=1 – P(“ninguna bola es azul”)=1 - $P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = 1 - \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$

3) P(“ninguna bola es verde”)=$P(\overline{V_1} \cap \overline{V_2})$ = (sumamos todas las ramas que no tienen verde)

$P(R_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap R_2) + P(A_1 \cap A_2) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

P(“ninguna bola es verde”)=$P(\overline{V_1} \cap \overline{V_2}) = P(\overline{V_1}) \cdot P(\overline{V_2}/\overline{V_1}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{3}$

4) P(“la segunda bola es roja”)=$P(R_2)$ = (teorema de la probabilidad total)

$P(R_1 \cap R_2) + P(A_1 \cap R_2) + P(V_1 \cap R_2) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$

5) P(“primera bola es azul sabiendo que la segunda fue roja”)=$P(A_1/R_2)$ =(probabilidad a posteriori)

$$\frac{P(A_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{6}{30} : \frac{15}{30} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

c) Si sacáramos las dos bolas a la vez, ¿en cuál de las dos situaciones anteriores nos encontraríamos?

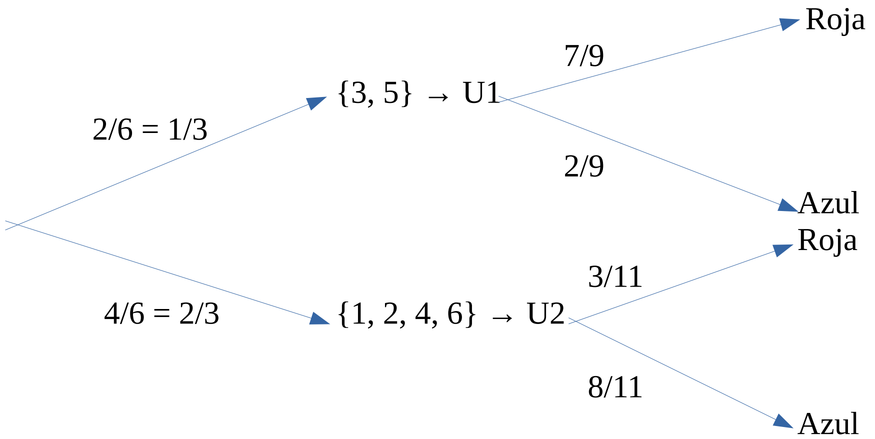
Sacar dos bolas a la vez es equivalente a sacar una y después la otra –> SIN DEVOLUCIÓN.

Ejemplo 31: Tenemos dos urnas, una con 7 bolas rojas y 2 azules, y otra con 3 bolas rojas y 8 azules. Tiramos un dado. Si nos sale un 3 o un 5, sacamos una bola de la primera urna y en caso contrario, sacamos una bola de la segunda urna. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea azul?

U_1= “elegir la urna 1” y U_2= “elegir la urna 2”, es claro que $P(U_1)= 2/6 = 1/3$ y $P(U_2)= 4/6 = 2/3$.

A= “sacar una bola azul”, las probabilidades que conocemos son: $P(A/U1) = 2/9$ y $P(A/U2) = 8/11$

Se trata también de un experimento compuesto que describiremos con un **diagrama de árbol**:



$P(A) = P(U_1 \cap A) + P(U_2 \cap A) = P(U_1)\cdot P(A/U_1) + P(U_2)\cdot P(A/U_2) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{9}+\frac{2}{3}\cdot\frac{8}{11}=\frac{2}{27}+\frac{16}{33}=\frac{166}{297}$

$P(A) = 0,5589$

Para el cálculo de la probabilidad hay que sumar las ramas del diagrama de árbol que corresponde al suceso.

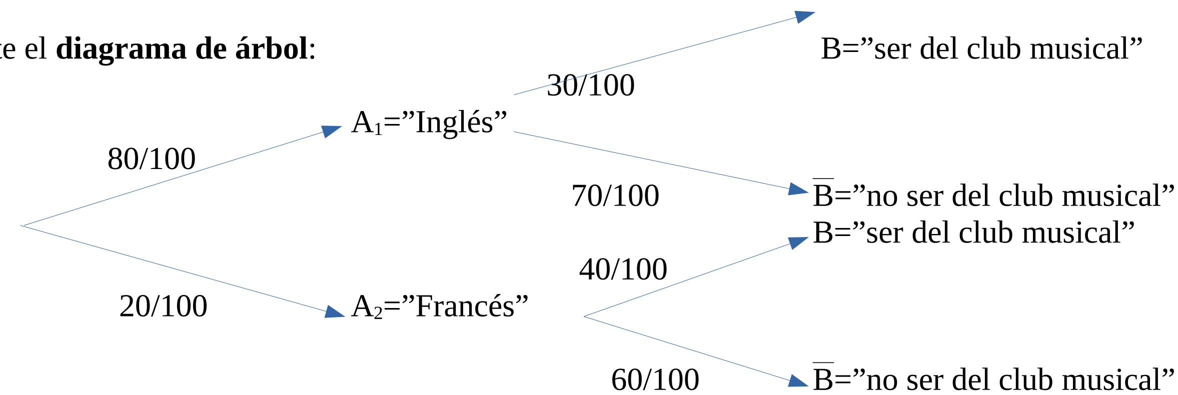
Ejercicio 69: Se tienen dos urnas, la primera de las cuales tiene 6 bolas blancas, 4 negras y 2 rojas y la urna 2 tiene 3 bolas blancas y 7 negras. Se elige una urna al azar, calcula la probabilidad de que sea:

a) bola blanca b) bola negra c) bola roja. (Solución: 2/5, 31/60 y 1/12)

Ejemplo 32: En un colegio se imparten sólo los idiomas inglés y francés. El 80% de los alumnos estudian inglés y el resto francés. El 30% de los alumnos de inglés son socios del club musical del colegio y de los que estudian francés son socios de dicho club el 40%. Se elige un alumno al azar, calcula la probabilidad de que pertenezca al club musical.

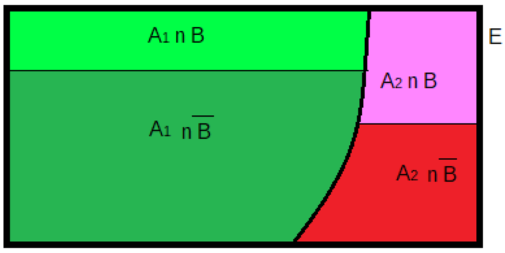
$A1$= “estudiar inglés” $A2$= “estudiar francés” B= “ser del club musical”

Mediante el **diagrama de árbol**:



$P(B)=P(B\cap A_1)+P(B\cap A_2)=P(A_1)\cdot P(B/A_1)+P(A_2)\cdot P(B/A_2)=\dfrac{80}{100}\cdot\dfrac{30}{100}+\dfrac{20}{100}\cdot\dfrac{40}{100}=\dfrac{32}{100}=0{,}32$

Otro método muy útil para resolver problemas es la **tabla de contingencia**:



	A1	A2	
B	30/100 del 80/100 = 24/100	40/100 del 20/100= 8/100	32/100
$\overline{B}$	70/100 del 80/100 = 56/100	60/100 del 20/100= 12/100	68/100
	80/100	20/100	1

Podemos calcular directamente la probabilidad pedida en la tabla: P(B) = 32/100

Ejemplo 33: En un taller se sabe que acuden, por la mañana 3 automóviles con problemas de eléctricos, 8 con problemas mecánicos y 3 con problemas de chapa. Por la tarde hay 2 con problemas eléctricos, 3 con problemas mecánicos y 1 con problemas de chapa.

a) Calcular el porcentaje de los que acuden por la tarde.
b) Calcular el porcentaje de los que acuden con problemas mecánicos.
c) Calcular la probabilidad de que un automóvil con problemas eléctricos acuda por la mañana.

Resumiendo los datos en una tabla de contingencia:

	Eléctricos	Mecánicos	Chapa	
Mañana	3	8	3	14
Tarde	2	3	1	6
	5	11	4	20

a) P("Tarde") = 6/20 = 3/10 = 0,3 El porcentaje de los que acuden por la tarde es del 30%

Realmente estamos utilizando el teorema de la probabilidad total:

P("Tarde") = P("Tarde" y Eléctrico") + P("Tarde" y Mecánico") + P("Tarde" y Chapa") = $\dfrac{2}{20}+\dfrac{3}{20}+\dfrac{1}{20}=\dfrac{6}{20}$

b) P("Problemas mecánicos") = 11/20 = 0,55

El porcentaje de los que acuden con problemas mecánicos es del 55%

c) Se trata de una probabilidad condicionada, con problemas eléctricos hay 5 y de ellos 3 por la mañana, luego: P("Mañana"/"Problemas eléctricos") = 3/5 = 0,6

La probabilidad de que un automóvil con problemas eléctricos acuda por la mañana es de 0,6.

Ejercicio 70: En una fábrica la producción de tornillos se reparte entre tres máquinas del siguiente modo, la primera máquina produce el 40% y la segunda el 25%. El porcentaje de tornillos defectuosos fabricados por la primera máquina es del 2%, el de la segunda de un 5% y de la tercera del 3%.

Calcula la probabilidad de que un tornillo sea defectuoso. (Solución: 0,031)

Ejercicio 71: Para tratar de curar una enfermedad se aplica un tratamiento nuevo a 81 pacientes de un hospital, mientras que en el mismo hospital hay otros 79 pacientes que siguen un tratamiento antiguo contra la misma enfermedad. En total, con ambos tratamientos los curados son 103, de los cuales 60 lo son gracias al tratamiento nuevo. Si se elige un individuo al azar, calcula la probabilidad de que:

1. Se haya curado.
2. No se haya curado.
3. Se haya curado con el nuevo tratamiento.
4. No se haya curado con el nuevo tratamiento.
5. Se haya curado con el tratamiento antiguo.
6. No se haya curado con el tratamiento antiguo
7. Haya seguido el tratamiento antiguo si sabemos que no se ha curado.

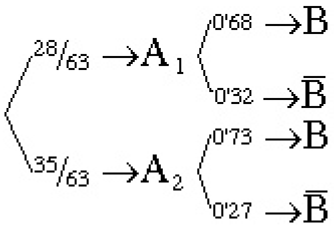
Soluciones: 1. 0,64375 2. 0,35625 3. 0,375 4. 0,13125 5. 0,26875
6. 0,225 7. 0,63158

Ejemplos de problemas resueltos con Geogebra:
https://www.geogebra.org/m/tusr3grk#material/zrvb6szh

Ejemplo 35: Dos clases de 1º de Bachillerato, una de 28 alumnos y otra de 35 alumnos hacen conjuntamente un examen de Matemáticas. La probabilidad de aprobar de los alumnos de la primera clase es de 0,68 y los de la segunda del 0,73. Se toma un examen al azar y resulta que está aprobado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea de un alumno de la 1ª clase?

Sea A_1= "el examen es de un alumno de la primera clase"
A_2= "el examen es de un alumno de la segunda clase"
B= "el examen está aprobado"

Nos piden $P(A_1/B)$. Podemos ayudarnos de un diagrama de árbol o de una tabla de contingencia:



	A_1	**A_2**	
B	0,68 · 28/63 = 0,3022	0,73 · 35/63= 0,4056	0,7078
$\overline{B}$	0,1422	0,15	0,2922
	28/63	35/63	1

Ayudándonos del diagrama de árbol escribimos la probabilidad utilizando el teorema de Bayes:

$$P(A_1/B)=\frac{P(A_1\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A_1\cap B)}{P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)}=\frac{\frac{28}{63}\cdot 0{,}68}{\frac{28}{63}\cdot 0{,}68+\frac{35}{63}\cdot 0{,}73}=\frac{0{,}3022}{0{,}7078}=0{,}4270$$

Otra opción es la tabla de contingencia: $P(A_1/B)=\frac{0{,}3022}{0{,}7078}=0{,}4270$

$P(A_1)$ es la probabilidad "a priori", es decir, antes de realizar el experimento y careciendo de información: $P(A_1) = 28/63 = 0{,}444$.
$P(A_1/B)$ es la probabilidad "a posteriori", después de realizarlo y conocer más información. En este caso $P(A_1/B) = 0{,}4270$ (es algo menor).

4.4. EJERCICIOS CON EXPERIMENTOS COMPUESTOS

72. Se tienen dos urnas. En la primera hay 10 bolas blancas, 7 negras y 5 rojas. En la segunda 24 blancas, 4 negras y 9 rojas. Se elige una urna al azar y se saca una bola. Calcular:
a) Probabilidad de sacar bola blanca.
b) Sabiendo que la bola extraída es blanca, probabilidad de que provenga de la segunda urna.
(Solución: 449/814, 264/449)

73. De una caja que contiene 3 fichas azules y 5 rojas sacamos 2 fichas a la vez. Determina las siguientes probabilidades:
a) Salgan 2 fichas azules b) Sean 2 fichas rojas
c) La primera sea azul y la segunda roja.
d) Haya una ficha azul y otra roja
e) La segunda sea roja, sabiendo que la primera ha sido azul
f) La segunda sea roja, si la primera es roja.

74. De una caja que contiene 3 fichas azules y 5 rojas sacamos 2 fichas con reemplazamiento. Determina las mismas probabilidades que en el ejercicio anterior.

75. Tenemos dos montones de ropa; en el primero hay 5 pantalones y 2 camisetas, y en el segundo 4 pantalones, 3 camisetas y 1 sudadera. Se saca una prenda del primer montón y otra del segundo. Determina las probabilidades de los siguientes sucesos:
a) Salen dos camisetas b) Salen dos pantalones c) Sale una camiseta y un pantalón
d) Del segundo montón sale la sudadera e) No sale ninguna camisetas

76. El 30% de los habitantes de una ciudad son socios de su equipo de fútbol. El 80% de los socios practica algún deporte, mientras que, entre los no socios solamente lo practican un 40%. Si elegimos un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que practique algún deporte? Sabiendo que practica algún deporte, ¿cuál es la probabilidad de que sea socio?

77. Tenemos tres cajas: verde, roja y amarilla. En cada una de ellas hay una moneda. La caja verde tiene una moneda trucada y la probabilidad de sacar cara es el doble de la de sacar cruz. La moneda de la caja roja tiene 2 caras. Y en la caja amarilla la moneda no está trucada.
Se toma una caja al azar y se lanza una moneda, calcula la probabilidad de que salga cara.
Si ha salido cara, ¿cuál es la probabilidad de que la moneda tenga dos caras?

78. Un ladrón es perseguido por la policía, y llega a un garaje que tiene 2 puertas. Una de las puertas conduce a un recinto A, donde hay 5 coches, de los cuales sólo 3 tienen gasolina, la otra puerta, lo conduce a un recinto B donde hay 4 coches, y sólo uno tiene gasolina. El ladrón elige una puerta al azar y luego un coche. ¿Cuál es la probabilidad de que se escape?

79. Se sabe que el 30% de los individuos de una población tiene estudios superiores, y que de ellos el 95% tiene empleo. Además, de la parte de la población que no tiene estudios superiores, el 60% tiene empleo.
a) Calcula la probabilidad de que un individuo, elegido al azar, tenga empleo.
b) Calcula la probabilidad de que un indiviuo elegido al azar no tenga estudios superiores si sabemos que no tiene empleo.

80. Un grupo de antiguos compañeros de estudios se reencuentran pasados unos años. Un 38% están casados y tienen hijos. Un 22% no están casados. Entre los que tienen hijos, un 95% están casados.

a) ¿Qué porcentaje tienen hijos?
b) ¿Qué porcentaje no están casados y tienen hijos?
c) ¿Qué porcentaje no están casados y no tienen hijos?
d) ¿Qué porcentaje de los que no tiene hijos están casados?

81. Dos maquinas A y B han producido respectivamente, 100 y 200 piezas. Se sabe que A produce un 5% de piezas defectuosas y B un 6%. Se toma una pieza y se pide:
1) Probabilidad de que sea defectuosa.
2) Sabiendo que es defectuosa, probabilidad de que proceda de la primera máquina

82. En un centro hay dos grupos de 25 alumnos de 1ºESO y dos grupos de 20 alumnos de 2ºESO. El 50 % de los alumnos de 1ºESO no tienen faltas de ortografía, porcentaje que sube a 70% en los alumnos de 2ºESO. En un concurso de redacción entre alumnos de 1º y 2º se elige una redacción al azar.
a) ¿Qué probabilidad hay de que sea de un alumno de 1ºESO?
b) Si tiene faltas de ortografía, ¿qué probabilidad hay de que sea de un alumno de 1ºESO?

83. En el experimento que consiste en lanzar dos dados, uno rojo y otro azul, y considerar los pares de puntuaciones, sean los sucesos:
A=”las dos puntuaciones son iguales” B=”las dos puntuaciones son pares”
C=”las dos puntuaciones son múltiplos de 3”
Calcula estas probabilidades: $P(A/B)$ $P(C/B)$ $P(C/A)$

84. Si $P(A) = 0{,}22$, $P(B)=0{,}7$ y $P(A \cap B) = 0{,}1$; calcula:
a) $P(A \cup B)$ b) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$ c) $P(A - B)$ d) $P(\overline{B} - A)$

85. En un experimento aleatorio sabemos que: $P(A) = 0{,}6$ $P(B) = 0{,}5$ $P(A \cap B) = 0{,}2$.
Calcula:
a) $P(\overline{A})$ b) $P(A \cup B)$ c) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$ d) $P(A - B)$
e) $P(\overline{B} - A)$ f) $P(\overline{A \cup B})$

86. Razona la siguiente afirmación: Si $P(A) = 0{,}6$ y $P(B) = 0{,}45$, los sucesos A y B son compatibles.

87. Si A y B son incompatibles y $P(A)=0{,}6$ y $P(A \cup B)=0{,}9$, halla:
$P(B)$ $P(A - B)$ $P(\overline{A} \cap B)$

88. Determina $P(A \cup B)$, $P(\overline{A} \cup \overline{B})$ y $P(\overline{A} \cap \overline{B})$, si: $P(A)=0{,}6$ $P(B)=0{,}5$ $P(A \cap B)=0{,}3$

89. Halla $P(A)$, $P(B)$ y $P(\overline{A} \cap B)$, si: $P(A \cup B)=0{,}8$ $P(\overline{B})=0{,}6$ $P(A \cap B)=0{,}3$

90. ¿Es posible que haya dos sucesos tales que $P(A)=0{,}6$ $P(B)=0{,}8$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B})=0{,}7$?

91. Si $P(A)=0{,}7$ y $P(B)=0{,}4$, ¿pueden ser incompatibles?

92. Calcula $P(A \cup B)$, sabiendo que $P(A)=0{,}3$ $P(B)=0{,}4$ y $P(A/B)=0{,}15$.

93. Sabiendo que $P(A)=0{,}3$ $P(B)=0{,}4$ y $P(A \cup B)=0{,}6$, calcula:
a) $P(A \cap B)$ b) $P(A/B)$ c) $P(B/A)$ d) $P(\overline{A} \cap B)$ e) $P(\overline{A}/B)$
f) ¿Son A y B independientes? g) ¿Son Ay B incompatibles?

94. Halla P(A), P(B) y $P(\overline{A} \cap B)$, si: $P(A \cup B)=0{,}8$ $P(\overline{B})=0{,}6$ $P(A/B)=0{,}3$

95. Sabiendo que $P(A)=3/10$ $P(B)=5/7$ y $P(A \cup B)=4/5$, ¿son A y B independientes?

96. Calcula $P(A \cup B)$ y $P(\overline{A}/B)$, sabiendo que $P(A)=1/2$, $P(B)=1/3$ y son sucesos independientes.

6. EJERCICIOS REPASO TEMA

97. ¿Es posible encontrar dos sucesos tales que $P(A)=0{,}5$; $P(B)=0{,}2$ y $P(\overline{A} \cap \overline{B})=0{,}6$?

98. Si $P(A)=0{,}6$ y $P(B)=0{,}3$, ¿pueden ser incompatibles? En caso afirmativo, ¿cuánto tiene que valer $P(A \cup B)$?

99. Si $E=\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ es el espacio muestral de un experimento aleatorio,
a) ¿Puede suceder que $P(S_1)=1/2$, $P(S_2)=2/3$, $P(S_3)=1/4$ y $P(S_4)=1/6$?
b) ¿Y que $P(S_1)=1/5$, $P(S_2)=1/3$, $P(S_3)=1/4$ y $P(S_4)=13/60$?

100. En una comunidad de vecinos tienen que decidir con que color pintar la escalera. Se plantean tres opciones "Blanco", "Amarillo" y "Ocre" y se hace una encuesta donde pueden escoger más de un color. Los resultados que se obtienen son los siguientes:
- El 40% prefiere "Blanco", el 30% "Amarillo" y el 20% el "Ocre".
- Al 15% le gustan "Blanco" y "Amarillo", al 12% "Blanco" y "Ocre" y al 10% "Amarillo" y "Ocre".
- Al 5% les gustan los tres colores.

Si en la comunidad hay 200 vecinos:
a) ¿A cuántos vecinos les gusta únicamente el "Blanco"?
b) ¿A cuántos vecinos les gusta un sólo color?
c) ¿A cuántos vecinos les gustan los tres colores?
d) ¿A cuántos vecinos no les gusta ningún color?

101. En el experimento que consiste en lanzar dos dados, uno rojo y otro azul, y considerar los pares de puntuaciones, calcula la probabilidad de que:
a) Una de las puntuaciones sea par, sabiendo que la suma de las dos puntuaciones es 9.
b) Una de las puntuaciones sea impar, sabiendo que la suma de las dos puntuaciones es 5.
c) La suma de las puntuaciones sea 7, sabiendo que su diferencia es 1.

102. En el experimento que consiste en extraer una carta de la baraja española, calcula la probabilidad de sacar una copa, sabiendo que se ha obtenido una figura.

103. Una urna contiene 8 bolas blancas y 4 bolas negras. Se sacan dos bolas una a una con reemplazamiento. Sea *A* el suceso: "la primera bola extraída es blanca"; y *B* el suceso: "al menos una de las dos bolas extraídas es blanca".
Calcular $P(A \cap B)$, $P(A \cap \overline{B})$, $P(\overline{A} \cap B)$, $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ y las probabilidades condicionadas $P(A/B)$, $P(A/\overline{B})$, $P(B/A)$ y $P(B/\overline{A})$.

104. En un sistema de alarma, la probabilidad de que esta funcione habiendo peligro es 0,95 y la de que funcione por error sin haber peligro es 0,03. Si la probabilidad de haber peligro es 0,1:
a) Calcular el porcentaje de veces que habiendo funcionado la alarma no haya peligro.
b) Hallar la probabilidad de que haya peligro y la alarma no funcione.
c) Calcular la probabilidad de que no habiendo funcionado la alarma haya peligro.
d) ¿Cuál es la probabilidad de que la alarma funcione?

105. El portero titular de un equipo de fútbol para 8 de cada 10 penaltis, mientras que el suplente solo para 5. el portero suplente juega, por termino medio, 15 minutos en cada partido (90 minutos).
a) Si en un partido se lanzan tres penaltis contra este equipo, ¿cuál es la probabilidad de que se paren los tres?
b) Si se lanza un penalti y no se para ¿cuál es la probabilidad de que estuviera jugando el portero titular?

106.Sea la urna U (2B, 3N, 4R). Extraemos tres bolas, una a continuación de la otra. La primera es negra, la segunda no se mira y la tercera es blanca. Hallar la probabilidad de que la segunda sea roja.

107. Un dado (A) posee cuatro caras rojas y dos blancas; otro dado (B), dos caras rojas y cuatro blancas. Se lanza una moneda sesgada, con probabilidad 2/3 de salir cara: si sale cara el juego continua únicamente con el dado A, y si sale cruz se utiliza solamente el dado B.
a) Calcular la probabilidad de obtener “rojo” tras lanzar la moneda y el dado.
b) Si se ha obtenido “rojo”, ¿cuál es la probabilidad de que se haya usado el dado A? ¿Y el B?

108. CIS A Cabana (Ferrol) y O Val (Narón) son dos estaciones metereológicas de Meteogalicia. Representaremos por A y V el que llueva respectivamente en el CIS y en el Val durante cualquier periodo de 24 horas en el mes de junio; se observa que $P(A) = P(V) = 0, 40$ y que $P(A \cap V) = 0{,}2$. Determínense las dos probabilidades condicionales $P(A/V)$ y $P(V/A)$, así como la probabilidad total $P(A \cup V)$. ¿Son independientes A y V?

109. Una urna se ha llenado tirando una moneda al aire dos veces y poniendo una bola blanca por cada cara y una bola negra por cada cruz. Se extrae una bola que es blanca. Hallar la probabilidad de que la otra bola también lo sea.

110. Supongamos que la probabilidad de que un jurado, seleccionado para un juicio de un caso criminal, llegue al veredicto correcto es del 95%. La policía estima que el 99% de los individuos que llegan a un juicio son realmente culpables. Calcular la probabilidad de que un individuo sea realmente inocente dado que el jurado ha dictaminado que es inocente.

111. En un espacio muestral se sabe que para dos sucesos A y B se verifica: $P(A\cap B)=0{,}1$; $P(A/B)=0{,}5$ y $P(\overline{A} \cap \overline{B})=0{,}6$.
a) Calcula $P(B)$ b) Calcula $P(A \cup B)$ c) ¿Son A y B independientes?

6.1. EJERCICIOS PROBABILIDAD ABAU 2017 – 2019 MATEMÁTICAS II

XUÑO 2017. OPCIÓN A
4. a) Nun experimento aleatorio, sexan A e B dous sucesos con $P(\overline{A}) = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}7$. Se A e B son independentes, calcula $P(A \cup B)$ e $P(A – B)$.
(Nota: $\overline{A}$ suceso contrario ou complementario de A).
b) Nun grupo de 100 persoas hai 40 homes e 60 mulleres. Elíxense ao azar 4 persoas do grupo, ¿cal é a probabilidade de seleccionar máis mulleres que homes?

XUÑO 2017. OPCIÓN B
4. Nun estudo realizado nun centro de saúde, observouse que o 30% dos pacientes son fumadores e destes, o 60% son homes. Entre os pacientes que non son fumadores, o 70% son mulleres. Elixido un paciente ao azar,
a) Calcula a probabilidade de que o paciente sexa muller
b) Se o paciente elixido é home, ¿cal é a probabilidade de que sexa fumador?

SETEMBRO 2017. OPCIÓN A

4. Sexan A e B dous sucesos con $P(A) = 0{,}7$; $P(B) = 0{,}6$ e $P(A \cup B) = 0{,}9$.

a) ¿Son A A e B B sucesos independentes? Xustifica a resposta.

b) Calcula $P(A – B)$ e $P(A/\overline{B})$. (Nota: $\overline{B}$ suceso contrario ou complementario de B).

XUÑO 2018. OPCIÓN A

4. Nas rebaixas duns grandes almacéns están mesturadas e á venda 200 bufandas da marca A, 150 da marca B e 50 da marca C. A probabilidade de que unha bufanda da marca A sexa defectuosa é 0,01; 0,02 se é da marca B e 0,04 se é da marca C. Unha persoa elixe unha bufanda ao azar.

a) Calcula a probabilidade de que a bufanda elixida sexa da marca A ou defectuosa.

b) Calcula a probabilidade de que a bufanda elixida non sexa defectuosa nin da marca C.

c) Se a bufanda elixida non é defectuosa, cal é a probabilidade de que sexa da marca B?

SETEMBRO 2018. OPCIÓN B

4. Nunha fábrica hai tres máquinas A, B e C que producen a mesma cantidade de pezas. A máquina A produce un 2% de pezas defectuosas, a B un 4% e a C un 5%.

a) Calcula a probabilidade de que unha peza elixida ao azar sexa defectuosa.

b) Se se elixe unha peza ao azar e resulta que non é defectuosa, cal é a probabilidade de que fora fabricada pola máquina A?

XUÑO 2019. OPCIÓN A (Modelo)

4. a) O 40% dos habitantes dunha certa comarca teñen camelias, o 35% teñen rosas e o 21% teñen camelias e rosas. Se se elixe ao azar a un habitante desa comarca, calcular as cinco probabilidades seguintes: de que teña camelias ou rosas; de que non teña nin camelias nin rosas; de que teña camelias, sabendo que ten rosas; de que teña rosas, sabendo que ten camelias; e de que soamente teña rosas ou soamente teña camelias.

XUÑO 2019. OPCIÓN B (Modelo)

4. a) Sexan A e B dous sucesos dun mesmo espazo mostral. Calcula P(A) se $P(B) = 0{,}8$; $P(A \cap B) = 0{,}2$ e $P(A \cup B)$ é o triplo de P(A).

XULLO 2019 OPCIÓN A (Modelo)

4. a) A probabilidade de que un mozo recorde regar a súa roseira durante unha certa semana é de 2/3. Se se rega, a roseira sobrevive con probabilidade 0,7; se non, faino con probabilidade 0,2. Ao finalizar a semana, a roseira sobreviviu. Cal é a probabilidade de que o mozo non a regase?

XULLO 2019 OPCIÓN B (Modelo)

4. a) Sexan A e B dous sucesosdun mesmo espazo mostral tales que $P(A) = 0{,}2$; $P(B) = 0{,}4$ e $P(A \cup B) = 0{,}5$. Calcula $P(\overline{A})$, $P(\overline{B})$, $PA \cap B)$ e $P(\overline{A} \cup \overline{B})$. Razoa se A e B son ou non son sucesos independentes.

6.2. EJERCICIOS PROBABILIDAD ABAU 2017 MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CCSS II

XUÑO 2017 OPCIÓN A

3. Segundo certo estudo do departamento de vendas duns grandes almacéns, o 30% dos seus clientes son homes, o 25% dos seus clientes adquiren algún produto do departamento de electrónica e o 40% dos que adquiren algún produto do departamento de electrónica son mulleres.

(a) ¿Que porcentaxe dos seus clientes son mulleres e adquiren algún produto do departamento de electrónica?

(b) Se un cliente elixido ao azar é home, calcula a probabilidade de que non adquira algún produto do
departamento de electrónica.

XUÑO 2017 OPCIÓN B

3. Un artigo distribuído en tres marcas distintas *A*, *B* e *C* véndese nun supermercado. Obsérvase que o 30% das vendas diarias do artigo son da marca *A*, o 50% son da marca *B* e o resto son da marca *C*. Sábese ademais que o 60% das vendas da marca *A* realízase pola mañá, o 55% das vendas da marca *B* pola tarde e o 40% da marca *C* véndese pola mañá.

(a) Calcula a porcentaxe de vendas do artigo efectuadas pola mañá.

(b) Se a venda se efectuou pola tarde, calcula a probabilidade de que o artigo sexa da marca *C*.

SETEMBRO 2017 OPCIÓN A

3. O 60% dos individuos dunha poboación está vacinado contra certa enfermidade. Durante unha epidemia sábese que o 20% contraeu a enfermidade e que o 3% está vacinado e contraeu a enfermidade.

(a) Calcula a porcentaxe de individuos que contraeu a enfermidade, entre os que non están vacinados.

(b) Calcula a porcentaxe de individuos vacinados, entre os que contraeron a enfermidade. Xustifica se os sucesos “estar vacinado” e “contraer a enfermidade” son dependentes ou independentes.

SETEMBRO 2017 OPCIÓN B

3. Unha multinacional realiza operacións comerciais en tres mercados *A*, *B* e *C*. O 20% das operacións corresponden ao mercado *B* e nos mercados *A* e *C* realiza o mesmo número de operacións. Prodúcense atrasos no pago no 15%, 10% e 5% das operacións realizadas nos mercados *A*, *B* e *C*, respectivamente.

(a) Calcula a porcentaxe de operacións da multinacional nas que se producen atrasos no pago.

(b) ¿Que porcentaxe das operacións nas que se atrasou o pago foron realizadas no mercado *A*?