1

En qué consiste la programación lineal. Algunos ejemplos

El siguiente problema resume y explica prácticamente todo lo que has de saber sobre programación lineal. Lee con mucha atención el enunciado y ve siguiendo todos los pasos de la resolución, escribiéndolos e intentando rehacerlos por tu cuenta.

Un problema (con variables discretas)

- **ENUNCIADO DE UN PROBLEMA**

Un grupo de trabajadores asociados dispone de 20 porteadores y 10 conductores de camiones. Se les ofrece trabajar en una compañía de transporte que requiere dos tipos de equipos:

TIPO A: Un conductor y un porteador para atender un camión normal.

TIPO B: Un conductor y tres porteadores para atender un gran camión con tráiler.

Se pagan 300 € diarios al equipo tipo A y 500 € diarios al tipo B.

¿Cómo les conviene distribuirse para obtener mayores beneficios?

- **ANÁLISIS DE LOS DATOS**

Representemos los datos en una tabla para poder relacionarlos mejor:

EQUIPOS	N.º DE EQUIPOS	PORTEADORES QUE INTERVIENEN	CONDUCTORES QUE INTERVIENEN	GANANCIAS (CIENTOS DE €)
TIPO A	x	x	x	$3x$
TIPO B	y	$3y$	y	$5y$
TOTAL		$x + 3y$	$x + y$	$3x + 5y$

INCÓGNITAS DEL PROBLEMA

Nos preguntamos cuántos equipos de cada clase convendrá formar. Son incógnitas. Por eso los llamamos x e y, respectivamente.

Como el número de porteadores es 20, habrá de ser $x + 3y \le 20$.

Como el número de conductores es 10, habrá de ser $x + y \le 10$.

Además, el número de equipos de cada tipo no puede ser negativo:

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

La ganancia total diaria es, en *cientos de euros*, $G(x, y) = 3x + 5y$. Hemos de conseguir que sea máxima.

- **RESUMEN**

Deseamos averiguar para qué valores x, y la expresión

$$G(x, y) = 3x + 5y$$

se hace lo más grande posible, teniendo en cuenta que x e y están sometidas a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x + 3y \le 20 \\ x + y \le 10 \end{cases}$$

FUNCIÓN OBJETIVO

Ganancias. Hay que maximizarla.

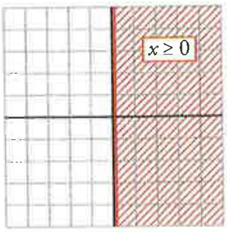
RESTRICCIONES DEL PROBLEMA

Los puntos que cumplen todas las restricciones se llaman **factibles**.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS RESTRICCIONES

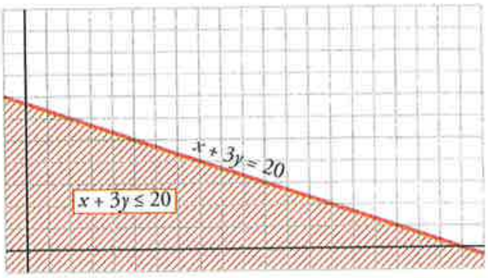
Cada una de las cuatro restricciones limita los posibles valores de x e y. Veamos cómo:

Los puntos que verifican $x \geq 0$ son los que están a la derecha de la recta $x = 0$ y en ella:

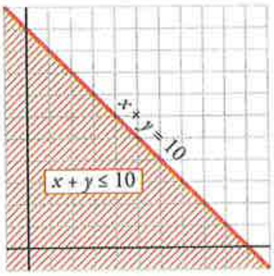


Los puntos que verifican $y \geq 0$ son los que están por encima de la recta $y = 0$ y en ella:

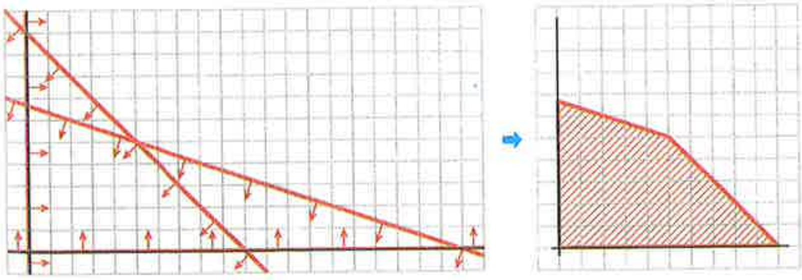
Los puntos que verifican $x + 3y \leq 20$ son los que están bajo la recta $x + 3y = 20$ y en ella:



Los puntos que verifican $x + y \leq 10$ son los que están bajo la recta $x + y = 10$ y en ella:



Con las cuatro restricciones construimos el recinto siguiente:



Nos falta añadir una condición que, por obvia, la habíamos dejado: x e y, número de equipos trabajadores de cada tipo, han de ser números naturales. Por tanto, solo hay 54 **puntos factibles.**

La región del plano formada por todos los puntos factibles se llama **región factible.**

Habrá que averiguar en cuál de los puntos de la región factible la función $G(x, y) = 3x + 5y$ toma un valor mayor.

Por ejemplo, al punto (3, 4), que significa 3 equipos tipo A y 4 equipos tipo B, le corresponde una ganancia de $G(3, 4) = 3 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 29$ cientos de euros, es decir, 2 900 €.

¿Puede mejorarse?

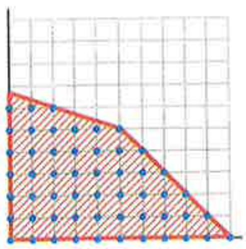
RECUERDA

Para saber cuál de las dos regiones corresponde a las soluciones de la inecuación $x + 3y \leq 20$, sustituimos las coordenadas de un punto; por ejemplo, (0, 0).

Como $0 + 3 \cdot 0 = 0 \leq 20$, el punto (0, 0) forma parte de las soluciones, así como todos los puntos que están en el mismo semiplano que él.

Lo mismo haríamos con la inecuación $x + y \leq 10$.

Crea una región factible



• PUNTO FACTIBLE

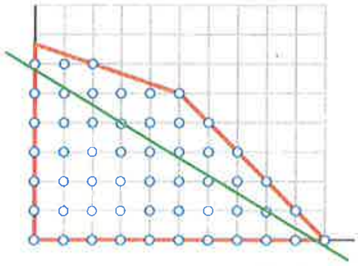
▨ REGIÓN FACTIBLE

SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DE LA FUNCIÓN DE GANANCIAS

¿Cómo averiguar en cuál de los puntos se obtiene la ganancia máxima? Podríamos obtener la ganancia correspondiente a cada uno de los 54 puntos y ver cuál es la mayor, pero parece poco práctico. ¡Tiene que haber una forma más eficaz de proceder! Busquémosla estudiando la función de ganancias.

Hemos visto que en el punto (3, 4) las ganancias son 29 (cientos de euros). Podemos comprobar que en el punto (8, 1) también las ganancias son 29. La coincidencia es debida a que ambos puntos pertenecen a la recta:

$$3x + 5y = 29$$

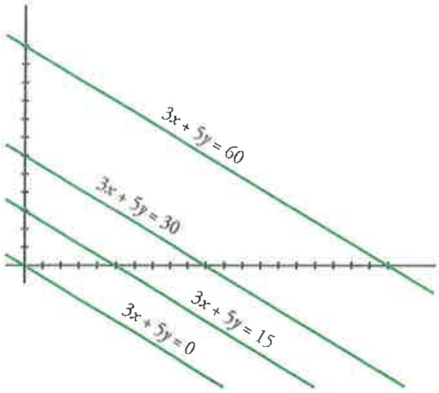


La ganancia máxima se conseguirá, pues, sobre una recta:

$$3x + 5y = K$$

que cumpla las dos condiciones siguientes:

- Ha de pasar por alguno de los puntos factibles (ese punto tendrá los valores de x e y buscados).
- K ha de ser lo mayor posible.

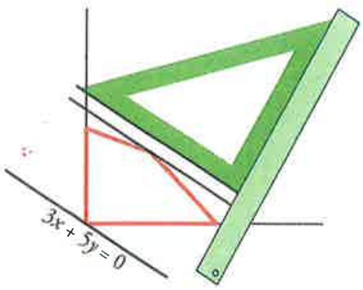


OBSERVA

Todas las rectas $3x + 5y = K$ son paralelas. Observa que cuanto mayor es K, más arriba está la recta.

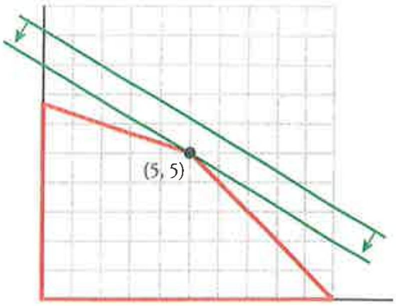
¿Cómo conseguir ambas cosas? Si tenemos en cuenta que todas las rectas $3x + 5y = K$ son paralelas, es fácil explicar la validez del siguiente método gráfico:

Empezamos representando la recta $3x + 5y = 0$ y la movemos paralelamente con ayuda de la regla y la escuadra. Entre todas las rectas paralelas, localizamos la que pasa por algún punto factible y que esté lo más arriba posible (para que K sea máxima). El punto por el que pasa dicha recta resulta ser el punto de corte de las rectas $x + 3y = 20$, $x + y = 10$. Lo obtenemos resolviendo este sistema: $\begin{cases} x + 3y = 20 \\ x + y = 10 \end{cases}$



La solución es $x = 5$, $y = 5$; es decir, el punto (5, 5), para el cual las ganancias son:

$$G(5, 5) = 3 \cdot 5 + 5 \cdot 5 = 40 \text{ (40 cientos de euros)}$$



Con lo cual, podemos ya asegurar que la ganancia máxima se consigue haciendo 5 *equipos de tipo B* y 5 *de tipo A*. Esta ganancia es de 4 000 € por cada jornada de trabajo.

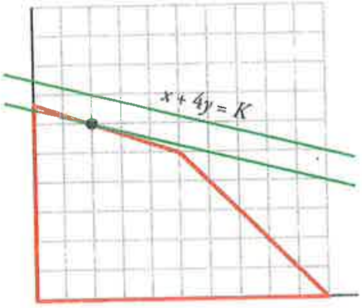
El mismo problema con otras funciones de ganancia

a) Si la agencia pagara a 100 € el equipo tipo A y a 400 € el equipo tipo B, la función de ganancia sería:

$$G_2(x, y) = x + 4y$$

En tal caso, el punto factible para el cual la función ganancia toma un valor mayor es el (2, 6), que corresponde a 2 equipos tipo A y 6 equipos tipo B.

$G_2(2, 6) = 2 + 4 \cdot 6 = 26$ cientos de euros.



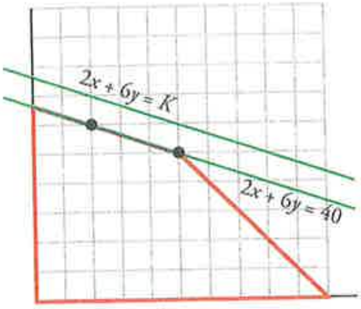
Crea la recta de las ganancias y busca el resultado que la maximiza.

b) Si se pagara a 200 € el equipo tipo A y a 600 € el equipo tipo B:

$$G_3(x, y) = 2x + 6y$$

La función ganancia toma el valor máximo en todos los puntos factibles que pertenecen a la recta $2x + 6y = 40$. Estos puntos son (2, 6) y (5, 5). Para ellos, la ganancia es:

$G_3(2, 6) = G_3(5, 5) = 40$ cientos de euros.



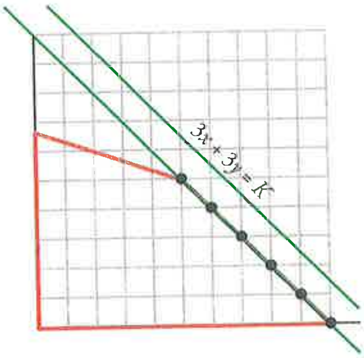
c) Si se pagara igual al equipo de tipo A que al de tipo B, 300 € a cada uno, la función ganancia sería:

$$G_4(x, y) = 3x + 3y$$

El máximo se obtiene en todos los puntos factibles de la recta:

$$3x + 3y = 30$$

Este máximo es de 30 cientos de euros.

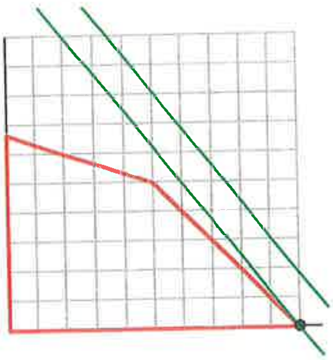


d) Por último, si se diera el caso disparatado de que se pagara más al equipo tipo A que al equipo tipo B, lógicamente solo se contratarían equipos tipo A.

Por ejemplo, si se pagara 500 € al A y 400 € al B, sería:

$$G_5(x, y) = 5x + 4y$$

El máximo estaría en el punto (10, 0).



Un nuevo problema con variables continuas muy parecido al anterior

Una fábrica de tableros de madera pintados produce dos tipos de tableros:

NORMALES. Llevan una mano de imprimación y otra de pintura.

EXTRAS. Llevan una mano de imprimación y tres manos de pintura.

Disponen de imprimación para 10 000 m^2, pintura para 20 000 m^2 y tableros sin pintar en cantidad ilimitada.

Sus ganancias netas son: $\begin{cases} 3\text{ € por el m}^2\text{ de tablero normal} \\ 5\text{ € por m}^2\text{ de tablero extra} \end{cases}$

¿Qué cantidad de tablero de cada tipo les conviene fabricar para que las ganancias sean máximas?

Expresamos la superficie pintada en miles de metros cuadrados y llamamos x e y a la superficie total de tablero de cada tipo que se fabrica:

x: miles de m^2 de tablero normal

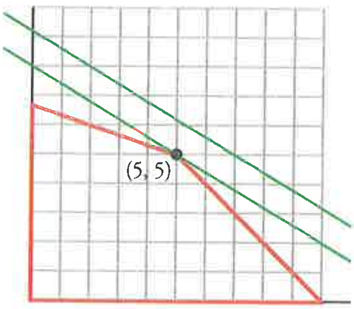
y: miles de m^2 de tablero extra

Observa que las restricciones son las mismas que las del problema anterior.

Además, si expresamos el dinero en *miles de euros*, también la función de ganancia es como la anterior:

$G(x, y) = 3x + 5y$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 10 \\ x + 3y \leq 20 \end{cases}$$



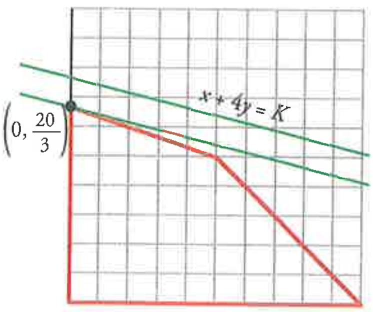
Pero hay un detalle por el cual este problema no es idéntico al primero de los anteriores: ahora x e y pueden tomar valores decimales.

Esto no influye cuando la función de ganancia es $G(x, y) = 3x + 5y$, porque el primer punto del recinto que encontramos al bajar la recta $3x + 5y = K$ tiene coordenadas enteras: es el (5, 5).

Sin embargo, en la versión a) del problema anterior, para la cual la función de ganancia es $G_2(x) = x + 4y$, hay una diferencia notable. Observa:

- Veamos cómo se comporta la función de ganancia $G_2(x) = x + 4y$ (donde x e y son números reales cualesquiera) al tomar valores en los puntos del recinto definido por las inecuaciones.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 10 \\ x + 3y \leq 20 \end{cases}$$



ATENCIÓN

En este caso son válidos todos los puntos del recinto y no solo los de coordenadas enteras.

Encuentra los vértices de la región factible.

En este caso, el primer punto factible que encuentra, al bajar, la recta $x + 4y = K$ es el $\left(0, \frac{20}{3}\right)$, que produce unas ganancias de:

$$G_2\left(0, \frac{20}{3}\right) = \frac{80}{3} = 26{,}666$$

Esto significa que, en este caso, lo ideal es fabricar $\frac{20}{3} = 6{,}666$ miles de m^2 (es decir, 6 666 m^2) de tablero extra y nada de tablero normal. Se conseguirán unas ganancias de 26 666 euros.

ATENCIÓN. Si la función de ganancia fuera $G_2^*(x) = 2x + 8y$, la representación de las rectas $2x + 8y = K$ sería la misma que en el caso anterior.

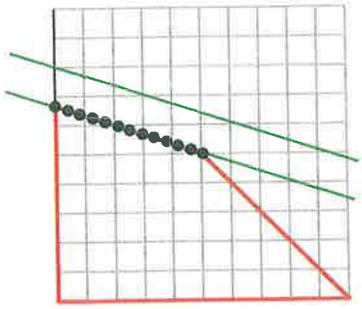
Por tanto, el punto en el que se halla el máximo es el mismo, $\left(0, \frac{20}{3}\right)$. El máximo es, obviamente, el doble:

$$G_2^*\left(0, \frac{20}{3}\right) = \frac{160}{3} = 53{,}333$$

- Para la función de ganancia $G_3(x, y) = 2x + 6y$, el máximo se consigue en cualquier punto del lado señalado (y no solo en los de coordenadas enteras).

Por ejemplo:

$$G_3\left(\frac{7}{2}, \frac{11}{2}\right) = G_3(5, 5) = 40$$



Esta función de ganancia toma el mismo valor, 40, en todos los puntos que pertenecen a este lado del recinto. Y es mayor que el valor que toma en cualquier otro punto del recinto.

Observa que, en todos los casos, el máximo (al igual que ocurre con el mínimo), si existe, se alcanza en uno de los vértices del recinto.

Por tanto, también podemos obtener el máximo de la función objetivo hallando todos los vértices del recinto y calculando el valor de la función en cada uno de ellos.

En los ejemplos anteriores, los vértices del recinto son los siguientes puntos:

$$(0, 0), \quad (10, 0), \quad (5, 5), \quad \left(0, \frac{20}{3}\right)$$

— Así, para el primer caso, tenemos que:

$G(0, 0) = 0$, $\quad G(10, 0) = 30$, $\quad G(5, 5) = 40$ MÁXIMO, $\quad G\left(0, \frac{20}{3}\right) = 33{,}33$

— Para el segundo caso:

$G_2(0, 0) = 0$, $\quad G_2(10, 0) = 10$, $\quad G_2(5, 5) = 25$, $\quad G_2\left(0, \frac{20}{3}\right) = 26{,}67$ MÁXIMO

— Y para el tercer caso:

$G_3(0, 0) = 0$, $\quad G_3(10, 0) = 20$, $\quad G_3(5, 5) = 40$, $\quad G_3\left(0, \frac{20}{3}\right) = 40$

Al coincidir el valor en los vértices $(5, 5)$ y $\left(0, \frac{20}{3}\right)$, el máximo, que vale 40, se alcanza en todos los puntos del segmento que los une.

INTERPRETACIÓN

$G_2(x, y) = x + 4y$ significa:

Con los tableros NORMALES gana 1 €/m^2, y con los EXTRA, 4 €/m^2.

$G_2\left(0, \frac{20}{3}\right) = 26{,}666$ significa:

La ganancia conseguida con $\frac{20}{3}$ de miles de m^2 de EXTRA es 26,666 miles de €.

TEN EN CUENTA

Aunque resolvamos el problema usando este método, es muy conveniente representar el recinto correspondiente a la región factible.

TEN EN CUENTA

Recuerda que podemos hallar el punto de corte de dos rectas resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

2

Programación lineal para dos variables. Enunciado general

REFLEXIONES SOBRE LOS PROBLEMAS DEL APARTADO ANTERIOR

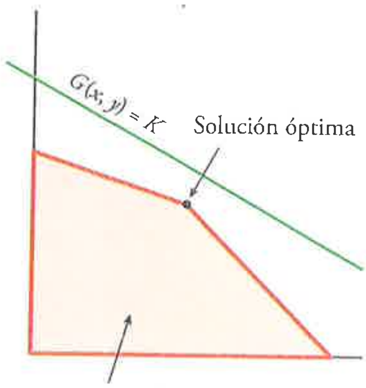
En esencia, los problemas del apartado anterior presentan:

— Una **función objetivo** $G(x, y)$ lineal respecto a x e y.

— Varias **restricciones,** todas ellas dadas mediante inecuaciones lineales respecto a x e y. Cada restricción supone un semiplano. Todas ellas dan lugar a un recinto poligonal (**región de validez o factible**) que determina la totalidad de puntos factibles (puntos que cumplen todas las restricciones).

Los problemas consisten en averiguar para qué punto (x, y) perteneciente al recinto de validez se hace máxima la función $G(x, y)$.

El punto donde se encuentra el máximo se llama **solución óptima.**



La solución óptima se encuentra siempre en la periferia de la región de validez, pues:

— La intersección de semiplanos es, necesariamente, una *región convexa.*

— La función objetivo puede representarse mediante una recta que se mueve paralela a sí misma y que, al bajar, alcanza su máximo en el punto en el que toca por primera vez el recinto de validez. (En otros casos, el máximo de la función se obtiene en un vértice «de abajo» que se localiza moviendo la regla hacia arriba). Esto ocurrirá en un vértice o, acaso, en todo un lado del recinto.

ENUNCIADO GENERAL

En un problema de programación lineal con dos variables, x e y, se trata de optimizar (hacer máxima o mínima, según los casos) una función (llamada función objetivo) de la forma:

$$F(x, y) = px + qy$$

sujeta a una serie de restricciones dadas mediante un sistema de desigualdades lineales del siguiente tipo:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y \le c_1 \\ a_2 x + b_2 y \le c_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_m x + b_m y \le c_m \end{cases}$$

Los puntos del plano que cumplen cada desigualdad están en un semiplano. Los que cumplen todas ellas están en un recinto convexo finito (poligonal) o infinito, llamado región de validez del problema.

Los puntos de la región de validez cumplen todas las restricciones y se llaman soluciones factibles.

La solución factible que haga óptima (máxima o mínima, según se desee) la función objetivo se llama solución óptima.

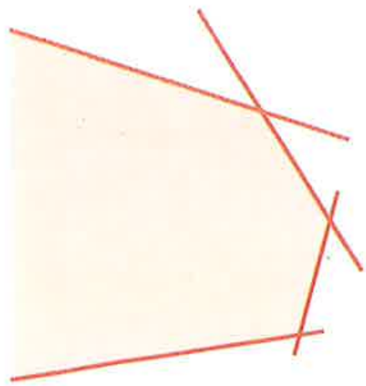
NOTACIÓN

A la función objetivo se le suele designar con la variable z:

$$z = F(x, y)$$

→ anayaeducacion.es

Curiosidad: el método del simplex y el algoritmo de Karmarkar.



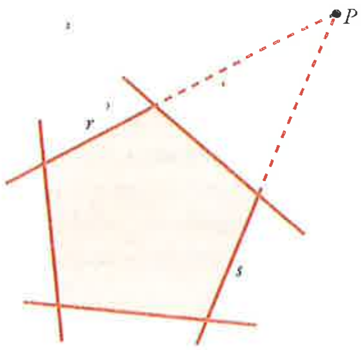
Puede ocurrir que la región de validez sea infinita.

Si hay una única solución óptima, estará en un vértice del recinto. Puede que haya más de una y se encontrarán en un lado.

Y es posible que no haya solución óptima, pues cuando el recinto es infinito, la función objetivo puede crecer o decrecer indefinidamente.

Una vez representado el recinto de validez, la solución óptima se encuentra con la ayuda de una recta variable que representa la función objetivo y que se mueve paralela a sí misma.

Cuando el recinto es cerrado, también podemos localizar la solución óptima obteniendo los vértices del recinto y calculando el valor de la función objetivo en cada uno de ellos. En este caso, también es conveniente representar el recinto, pues es difícil estar seguro, sin representarlo, de si un punto de corte entre dos rectas bordes de semiplanos es o no vértice del recinto de validez (observa la figura del margen).



¿Cómo sabemos, sin representarlo, que el punto P, intersección de las rectas r y s, no es vértice del polígono?

Ejercicios resueltos

1 *Representar la región definida por el siguiente sistema de inecuaciones:*

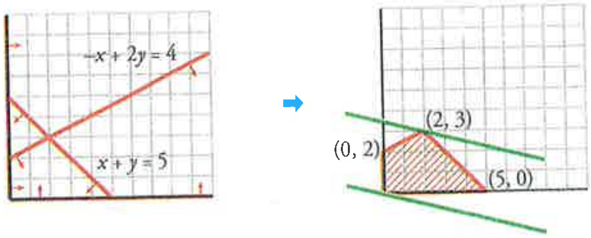
$$\begin{cases} x + y \le 5 \\ -x + 2y \le 4 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Averiguar en qué punto de la región se hace máxima la función

$$F(x, y) = 2x + 8y$$

y en qué punto se hace mínima.

Representamos la región de validez:



Método 1: Dibujamos la recta $2x + 8y = 0$ y la trasladamos paralelamente con ayuda de la regla y la escuadra. Vemos que los valores extremos están en los vértices $(0, 0)$ y $(2, 3)$:

$F(0, 0) = 0$ MÍNIMO, $F(2, 3) = 28$ MÁXIMO

Método 2: Hallamos todos los vértices y calculamos el valor de la función objetivo en cada uno de ellos:

$F(0, 0) = 0$ MÍNIMO, $F(5, 0) = 10$, $F(2, 3) = 28$ MÁXIMO, $F(0, 2) = 16$

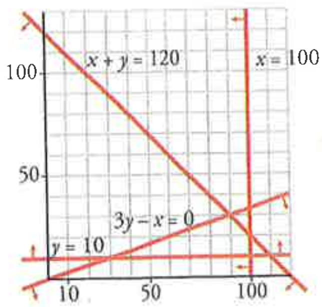
2 *Representar la región definida por el siguiente sistema de inecuaciones:*

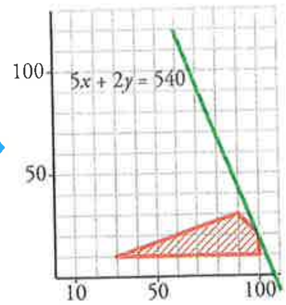
$$\begin{cases} x + y \le 120 \\ 3y - x \le 0 \\ x \le 100 \\ y \ge 10 \end{cases}$$

¿En qué punto la función

$$F(x, y) = 5x + 2y$$

alcanza el valor máximo?





Método 1: Dibujamos la recta $5x + 2y = 0$ y la trasladamos paralelamente con ayuda de la regla y la escuadra. Vemos que el máximo se alcanza en el punto $(100, 20)$ y vale $F(100, 20) = 540$.

Método 2: Hallamos los vértices del recinto y calculamos el valor de la función objetivo en cada uno de ellos:

$F(30, 10) = 170$, $F(100, 10) = 520$, $F(100, 20) = 540$ MÁXIMO, $F(90, 30) = 510$

Ejercicio resuelto

3 *Para abonar una parcela de huerta se necesitan, por lo menos, 8 kg de nitrógeno y 12 kg de fósforo.*

Se dispone de un producto M cuyo precio es 3 €/kg y que contiene un 10 % de nitrógeno y un 30 % de fósforo, y de otro producto N que contiene un 20 % de nitrógeno y un 20 % de fósforo, y cuyo precio es 4 €/kg.

¿Qué cantidades se deben tomar de M y N para abonar la parcela con el menor gasto posible?

	CANTIDAD (en kg)	CANTIDAD DE NITRÓGENO	CANTIDAD DE FÓSFORO	COSTE
PRODUCTO M	x	$0{,}1x$	$0{,}3x$	$3x$
PRODUCTO N	y	$0{,}2y$	$0{,}2y$	$4y$
TOTAL		$0{,}1x + 0{,}2y$	$0{,}3x + 0{,}2y$	$3x + 4y$

Coste total: $C(x, y) = 3x + 4y$

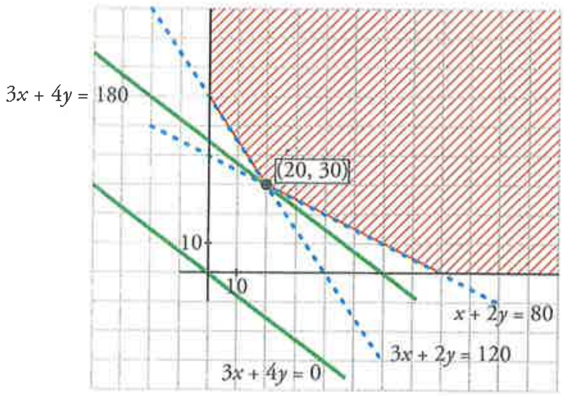
Cantidad de nitrógeno: $0{,}1x + 0{,}2y \geq 8 \iff x + 2y \geq 80$

Cantidad de fósforo: $0{,}3x + 0{,}2y \geq 12 \iff 3x + 2y \geq 120$

Además, las cantidades tomadas de cada producto han de ser positivas:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

Dibujamos el recinto y representamos la recta $3x + 4y = 0$. La trasladamos paralelamente con ayuda de la regla y la escuadra:



De todas las rectas que tocan el recinto de soluciones factibles y que son de la forma $3x + 4y = K$, la que hace mínimo el coste es la que pasa por el punto (20, 30).

Solución: Se deben tomar 20 kg del producto M y 30 kg del producto N.

El coste es $3 \cdot 20 + 4 \cdot 30 = 180$ €.

anayaeducacion.es
Ejercicios de **refuerzo** sobre programación lineal.

Piensa y practica

Comprueba tus soluciones.

1 Representa la región definida por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$x \geq 0, \quad y \geq 3, \quad x + y \leq 10, \quad 2y \geq 3x$$

Averigua en qué puntos se hace máxima y mínima la función $F(x, y) = 4x + 3y$.

2 Representa el recinto definido por estas inecuaciones:

$x \geq 0$ $\quad y \geq 0$ $\quad x \leq 10$

$x \leq y$ $\quad y - 2x \leq 6$ $\quad 3x + 4y \geq 35$

¿En qué punto la función $F(x, y) = 10x + 15y$ alcanza el valor máximo?

3 En una confitería se elaboran tartas de NATA y de MANZANA. Cada tarta de nata requiere medio kilo de azúcar y 8 huevos; y una de manzana, 1 kg de azúcar y 6 huevos. En la despensa quedan 10 kg de azúcar y 120 huevos.

¿Cuántas tartas de cada tipo se deben hacer si pretendemos que los ingresos por su venta sean máximos?

Considera tres casos:

a) Sus precios son: T. NATA, 12 €; T. MANZANA, 15 €.

b) Sus precios son: T. NATA, 16 €; T. MANZANA, 12 €.

c) Sus precios son: T. NATA, 15 €; T. MANZANA, 10 €.

Ejercicios y problemas resueltos

1. Optimización sin contexto. Recinto cerrado

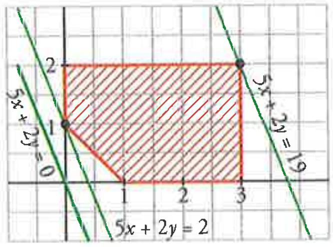
Sea la región del plano definida por las inecuaciones:

$$\begin{cases} x + y - 1 \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

¿Para qué valores (x, y) de la región considerada es máxima la función $z = 5x + 2y$? ¿Y mínima?

- Dibujamos la recta $x + y - 1 = 0$ y tomamos un punto cualquiera, por ejemplo el $(0, 0)$, para ver qué puntos cumplen $x + y - 1 \geq 0$.

  Hacemos lo mismo con las rectas $x = 3$ e $y = 2$.
- Como $x \geq 0$ e $y \geq 0$, la región plana del problema es la sombreada, cuyos vértices son: $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(3, 2)$, $(3, 0)$ y $(1, 0)$
- Representamos en los mismos ejes la recta $5x + 2y = 0$ y la desplazamos paralelamente a sí misma.



  Obtenemos el máximo en el vértice $(3, 2)$:

  $$z(3, 2) = 5 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 19$$

  El mínimo está en el vértice $(0, 1)$, en el que:

  $$z(0, 1) = 5 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2$$

Después de obtener los vértices, también podríamos haber resuelto el problema sustituyendo sus coordenadas en la función objetivo:

$z(0, 1) = 2$ MÍNIMO; $z(0, 2) = 4$; $z(3, 2) = 19$ MÁXIMO; $z(3, 0) = 15$; $z(1, 0) = 5$

HAZLO TÚ

En el mismo recinto, ¿para qué valores es máxima la función $z = 3x + 4y$? ¿Y mínima?

2. Optimización sin contexto. Recinto abierto

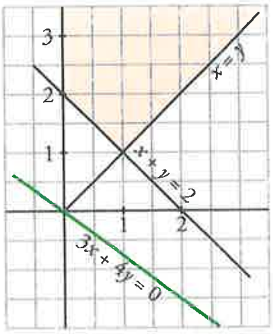
En la región determinada por:

$$x + y \geq 2, \quad x \leq y, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

hallar las coordenadas de los puntos en los que la función $F(x, y) = 3x + 4y$ alcanza su mínimo y su máximo.

- Representamos las rectas $x + y = 2$ y $x = y$ y hallamos la región que cumple las condiciones del problema, teniendo en cuenta que $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

  Obtenemos una región infinita con vértices en $(1, 1)$ y $(0, 2)$.
- Representamos la dirección de las rectas $3x + 4y = K$ dibujando la que pasa por el origen de coordenadas.



  El mínimo se alcanza en $(1, 1)$ y es 7:

  $$F(1, 1) = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 7$$

  No hay máximo. La función $3x + 4y$ se puede hacer tan grande como se quiera en el recinto propuesto.

HAZLO TÚ

Con la misma función, haz lo mismo para este recinto:

$5x + 6y \leq 30$; $x - y \geq 0$; $x \geq 0$; $y \geq 0$

3. Puntos de coordenadas enteras

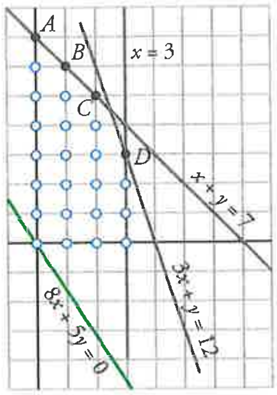
Hallar los valores de x e y que hacen máxima la función $z = 8x + 5y$, sujeta a las restricciones siguientes:

$$\begin{cases} x + y \leq 7 \\ 3x + y \leq 12 \\ x \leq 3 \end{cases}$$

x e y deben ser números naturales.

- Los puntos factibles son aquellos cuyas coordenadas son números naturales y que están en el recinto limitado por estas rectas:

  $$x + y = 7; \quad 3x + y = 12; \quad x = 3; \quad x = 0; \quad y = 0$$
- Tomamos una recta paralela a la función objetivo y vemos que al trasladarla, el último punto de la región factible por donde pasa es su vértice (corte de las rectas $x + y = 7$ y $3x + y = 12$). Como este vértice no tiene coordenadas enteras, buscamos los puntos de la región factible de coordenadas enteras próximos a él.



- Calculamos el valor de la función en los puntos:

  $$A(0, 7), \; B(1, 6), \; C(2, 5) \; \text{y} \; D(3, 3)$$

  $$z_A = 35; \; z_B = 38; \; \boxed{z_C = 41}; \; z_D = 39$$

  El valor máximo se obtiene en el punto $(2, 5)$.

HAZLO TÚ

Calcula x e y que hacen máxima y mínima la función $z = x + y$ sujeta a estas restricciones: x e y deben ser números naturales y además:

$x + y \geq 6$; $2x + y \geq 6$; $x + 3y \geq 7$

4. Coste mínimo

Una refinería de petróleo tiene dos fuentes de petróleo crudo: ligero y pesado.

Cada barril de crudo ligero cuesta 70 dólares y con él la refinería produce 0,3 barriles de gasolina (G); 0,2 barriles de combustible de calefacción (C) y 0,3 barriles de combustible para turbinas (T).

Cada barril de crudo pesado cuesta 60 dólares y produce 0,3 barriles de G; 0,4 barriles de C y 0,2 barriles de T.

La refinería ha contratado el suministro de 900 000 barriles de G, 800 000 barriles de C y 500 000 de T. Hallar las cantidades de crudo ligero y pesado que debe comprar para poder cubrir sus necesidades con un coste mínimo.

- Traducimos las condiciones en desigualdades para determinar la región factible. Sean x los barriles de crudo ligero e y los de crudo pesado que debe comprar la refinería. Debe ser $x \geq 0$, $y \geq 0$.

  Hacemos una tabla con los datos de producción expresando las compras y la producción en *millones de barriles*:

	LIGERO (x)	PESADO (y)
GASOLINA	$0{,}3x$	$0{,}3y$
CALEFACCIÓN	$0{,}2x$	$0{,}4y$
TURBINAS	$0{,}3x$	$0{,}2y$

Restricciones:

$0{,}3x + 0{,}3y \geq 0{,}9$

$0{,}2x + 0{,}4y \geq 0{,}8$

$0{,}3x + 0{,}2y \geq 0{,}5$

$x \geq 0,\ y \geq 0$

El coste que hay que minimizar es:

Coste = $70x + 60y$ (en millones de dólares)

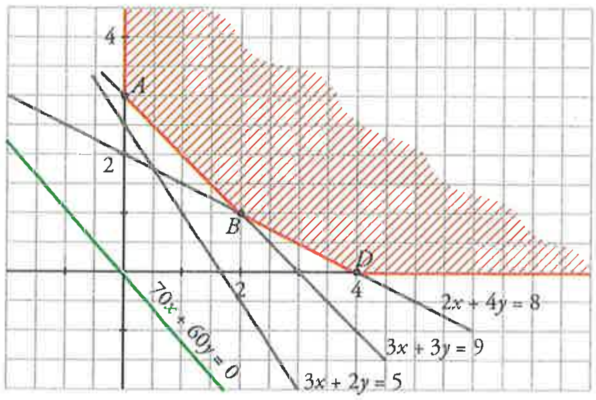
- Representamos las desigualdades y la dirección de la función coste tomando una escala adecuada.

  Obtenemos una región ilimitada cuyos vértices son:

  $A(0, 3)$

$$\begin{cases} 3x + 3y = 9 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \rightarrow \left.\begin{matrix} x = 2 \\ y = 1 \end{matrix}\right\} \rightarrow B(2, 1)$$

  $D(4, 0)$



La restricción $3x + 2y \geq 5$ es superflua, pues la región sería la misma sin ella.

- Consideramos las rectas paralelas a la función objetivo. La primera que toca a la región factible lo hace en el punto $A(0, 3)$. Este será el mínimo. Para comprobarlo, calculamos el coste en los tres vértices hallados anteriormente:

  En $A \rightarrow$ Coste = $70 \cdot 0 + 60 \cdot 3 = 180$ millones de dólares

  En $B \rightarrow$ Coste = $70 \cdot 2 + 60 \cdot 1 = 200$ millones de dólares

  En $D \rightarrow$ Coste = $70 \cdot 4 + 60 \cdot 0 = 280$ millones de dólares

Efectivamente, el coste mínimo se obtiene en A. La refinería debe encargar 3 millones de barriles de crudo pesado y ninguno de crudo ligero.

HAZLO TÚ

En una granja hay un total de 9 000 conejos. La dieta mensual mínima que debe consumir cada conejo es de 48 unidades de hidratos de carbono y 60 unidades de proteínas. En el mercado hay dos productos (A y B) que aportan estas necesidades de consumo. Cada envase de A contiene 2 unidades de hidratos de carbono y 4 unidades de proteínas y cada envase de B contiene 3 unidades de hidratos de carbono y 3 unidades de proteínas. Cada envase de A cuesta 0,24 euros y cada envase de B cuesta 0,20 euros.

Calcula el número de envases de cada tipo que se debe adquirir para que el coste sea mínimo. Halla el valor de dicho coste mensual mínimo.

5. Beneficio máximo

Con 80 kg de acero y 120 kg de aluminio se quieren fabricar bicicletas de montaña y de paseo que se venderán a 200 € y a 150 €, respectivamente. Para la de montaña son necesarios 1 kg de acero y 3 kg de aluminio y para la de paseo, 2 kg de cada uno de los metales.

¿Cuántas bicicletas de cada tipo se deben fabricar para maximizar el beneficio?

HAZLO TÚ

En la fabricación de piensos se utilizan tres ingredientes, P, Q y R. Se dispone de 90 toneladas de P, 90 de Q y 70 de R. Se desea fabricar dos tipos de pienso, M_1 y M_2.

Una vagoneta de pienso M_1 requiere 2 t de P, 1 t de Q y 1 t de R y se vende a 1 200 €, y una vagoneta de M_2 requiere 1 t de P, 2 t de Q y 1 t de R, y se vende a 1 000 €.

¿Cuántas toneladas de cada pienso deben facturarse para obtener el mayor beneficio?

- Si se hacen x bicicletas de montaña e y bicicletas de paseo, tenemos que:

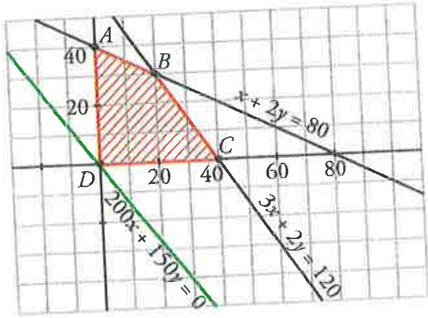
	N.º BICICLETAS	ACERO (kg)	ALUMINIO (kg)	PRECIO (€)
MONTAÑA	x	x	$3x$	$200x$
PASEO	y	$2y$	$2y$	$150y$
TOTAL		$x + 2y$	$3x + 2y$	$200x + 150y$

Tenemos las siguientes restricciones:

$$x + 2y \le 80, \quad 3x + 2y \le 120, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0$$

La función objetivo, de la que queremos hallar el máximo, es: $z = 200x + 150y$

- Representamos la región de validez y la función objetivo igualada a cero:



Los vértices de la región son:

$D(0, 0)$ $A(0, 40)$ $B(20, 30)$ $C(40, 0)$

Si trasladamos paralelamente la recta $200x + 150y = 0$, vemos que el máximo se alcanza en el punto $(20, 30)$.

También podríamos haber obtenido el máximo sustituyendo las coordenadas de los vértices en la función objetivo:

$z(0, 0) = 0$ €, $z(0, 40) = 6\,000$ €, $z(20, 30) = 8\,500$ € MÁXIMO, $z(40, 0) = 8\,000$ €

Por tanto, se deben fabricar 20 bicicletas de montaña y 30 de paseo.

6. Solución múltiple

Un comerciante desea comprar dos tipos de frigoríficos, F_1 y F_2, por 300 € y 500 € cada uno, respectivamente.

Solo dispone de sitio para 20 frigoríficos y de 7 000 € para hacer las compras.

¿Cuántos frigoríficos ha de comprar de cada tipo para obtener beneficios máximos si luego los vende un 30 % más caros?

HAZLO TÚ

Un tendero va al mercado central con su furgoneta, que puede cargar 700 kg, y con 500 € en el bolsillo, a comprar fruta para su tienda. Encuentra las manzanas a 0,80 €/kg y las naranjas a 0,50 €/kg. El tendero cree que podrá vender las manzanas a 0,88 €/kg y las naranjas a 0,55 €/kg. ¿Qué cantidad de manzanas y de naranjas le conviene comprar si quiere obtener el mayor beneficio posible?

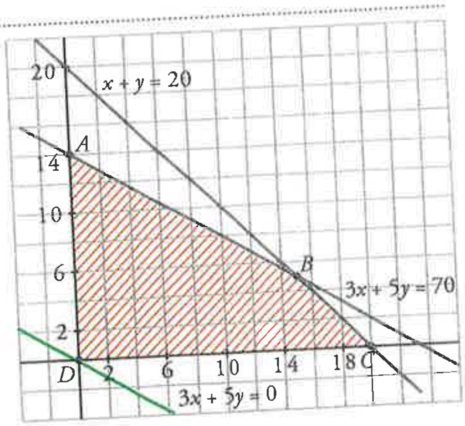
- Llamamos x al número de frigoríficos de tipo F_1 e y al de frigoríficos de tipo F_2. Ambas son *variables enteras.*

Las restricciones que impone el problema son:

$x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 20$

$300x + 500y \le 7\,000 \rightarrow 3x + 5y \le 70$

Beneficio: $z = 90x + 150y$



- Representamos la dirección de la función beneficio:

$90x + 150y = 0 \rightarrow 3x + 5y = 0$ (recta paralela a $3x + 5y = 70$)

Los vértices de la región factible son:

$A(0, 14)$, $B(15, 5)$, $C(20, 0)$ y $D(0, 0)$.

Como la recta $3x + 5y = 70$ es paralela a la función de beneficio, cualquier punto con sus coordenadas enteras de este segmento es una solución válida. Además de $A(0, 14)$ y $B(15, 5)$, están los puntos $(5, 11)$ y $(10, 8)$.

Soluciones: $(0, 14)$, $(5, 11)$, $(10, 8)$, $(15, 5)$

Por ejemplo, $(5, 11)$ significa que debe comprar 5 frigoríficos del tipo F_1 y 11 del tipo F_2 con los que conseguirá un beneficio de 2 100 €.

7. Problema de transporte

Dos yacimientos de plata, A y B, extraen al año 2 000 toneladas y 3 000 toneladas de mineral, respectivamente.

Deben distribuirse a tres puntos de elaboración, C, D y E, que admiten 500 t, 3 500 t y 1 000 t de mineral al año, respectivamente.

El coste del transporte, en miles de euros por tonelada, se da en la siguiente tabla:

COSTE	C	D	E
A	10	20	30
B	15	17,50	20

¿Cómo ha de distribuirse el mineral para que el transporte sea lo más económico posible?

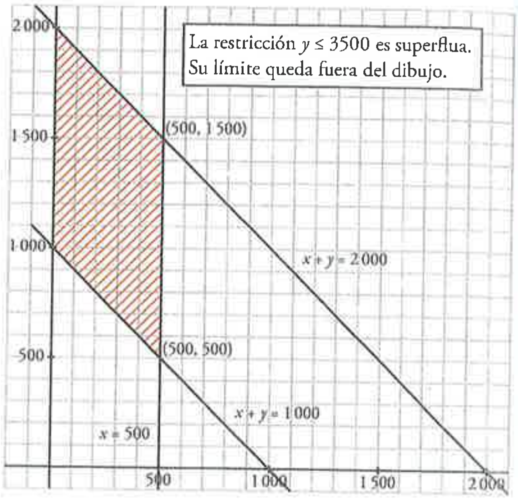
Este es un importante tipo de problema de programación lineal (problema de transporte) que aquí aparece en una versión muy sencilla.

CANTIDADES	C (500 t)	D (3 500 t)	E (1 000 t)
A (2 000 t)	x	y	$2\,000 - (x + y)$
B (3 000 t)	$500 - x$	$3\,500 - y$	$1\,000 - [2\,000 - (x + y)] = x + y - 1\,000$

Las incógnitas x e y son las cantidades de mineral que hay que llevar de A a C y D, respectivamente. Las demás casillas se rellenan en consecuencia.

Las restricciones se obtienen al obligar a que todas estas cantidades sean positivas:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2\,000 - (x + y) \geq 0 \\ 500 - x \geq 0 \\ 3\,500 - y \geq 0 \\ x + y - 1\,000 \geq 0 \end{cases}$$



La función de coste se obtiene sumando los costos de los seis transportes:

Coste (en miles de €):

$$z(x, y) = 10x + 20y + 30\,[2\,000 - (x + y)] +$$
$$+ 15(500 - x) + 17{,}50(3\,500 - y) + 20(x + y - 1\,000) =$$
$$= 108\,750 - 15x - 7{,}5y = 108\,750 - 7{,}5(2x + y)$$

El coste será mínimo cuando $2x + y$ sea máximo.

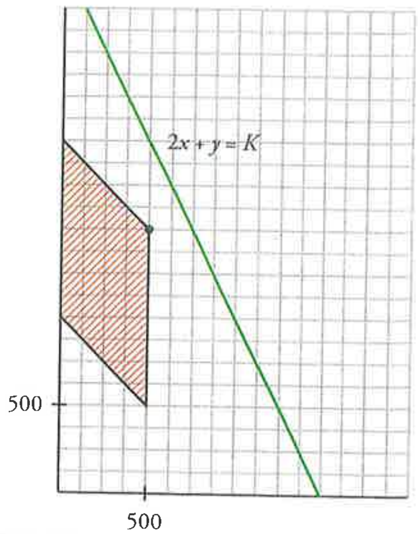
Evidentemente, la recta variable $2x + y = K$ toma su valor máximo (dentro de los válidos) en el punto (500, 1 500), al cual corresponde la siguiente distribución de mineral:

	C	D	E
A	500	1 500	0
B	0	2 000	1 000

El coste correspondiente es de:

$108\,750 - 7{,}5\,(1\,000 + 1\,500) = 90$ millones de €

Puedes comprobar que para otras distribuciones el coste es superior.



HAZLO TÚ

Una fábrica de tintas dispone de 1 000 kg del color A, 800 kg del color B y 300 kg del color C, con los que fabrica dos tipos de tinta, una para la etiqueta de un refresco y otra para un cartel. Cada bote de tinta de la etiqueta necesita 10 kg del color A, 5 kg del color B y 5 kg del color C y cada bote de tinta del cartel requiere 5 kg del A y 5 kg del B.

La fábrica obtiene un beneficio de 30 € por cada bote de tinta para etiquetas y de 20 € por cada uno de tinta para carteles.

Si vende todos los botes fabricados, ¿cuántos botes de cada tipo de tinta debe fabricar para maximizar su beneficio? ¿Cuál es el beneficio máximo?

Ejercicios y problemas guiados

1. Optimización de la función objetivo dada una región factible con datos continuos

Maximizar $F(x, y) = 6x + 2y - 7$ *con las restricciones:*

$$\begin{cases} 2x + y \le 6 \\ 4x + y \le 10 \\ -x + y \le 3 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$$

- Representa la región de validez a partir de las inecuaciones.
- Halla las coordenadas de los vértices del recinto.
- Halla el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices.
- De esta forma, obtendrás el valor máximo, así como el punto en el que se alcanza.

Solución:

El máximo se alcanza en el punto (2, 2) y es $F(2, 2) = 9$.

2. Optimización de la función objetivo dada una región factible con datos discretos

Maximizar $F(x, y) = 500x + 200y$ *teniendo en cuenta que el conjunto de soluciones son puntos de coordenadas enteras y con las siguientes restricciones:*

$$\begin{cases} 0 \le x \le 4 \\ 0 \le y \le 8 \\ 5x + 3y \le 30 \end{cases}$$

- Representa la región de validez y toma en ella solo los puntos con coordenadas enteras.
- Representa la recta $500x + 200y = 0 \rightarrow y = -\frac{5}{2}x$ y muévela paralelamente.
- Localiza así el punto buscado y halla el valor que hace F máxima.

Solución:

El máximo se alcanza en (4, 3) y es $F(4, 3) = 2600$.

3. Maximizar beneficios

En una empresa van a trabajar mecánicos y electricistas. Por necesidad del mercado debe haber mayor o igual número de electricistas que de mecánicos, y el número de electricistas no debe superar el doble del de mecánicos. Se necesitan al menos 20 electricistas y no hay más de 30 mecánicos disponibles.

Si por cada mecánico se obtienen 2000 € de beneficio mensual y por cada electricista, 2500 €, ¿cuántos de cada clase se deben contratar para maximizar el beneficio?

- Llama x al número de mecánicos e y, al de electricistas.
- Es claro que $x \ge 0$; $y \ge 0$. Ve poniendo las demás restricciones:
  - «Debe haber mayor o igual número de electricistas que de mecánicos» lo traducimos como $y \ge x$.
  - …
- La función objetivo es $F(x, y) = 2000x + \ldots$
- Localiza dónde se hace máxima e interpreta la solución.

Solución:

Deben contratar 30 mecánicos y 60 electricistas.

El beneficio máximo es de 210 000 €.

4. Minimizar gastos

Ana debe fertilizar los terrenos de su finca con dos abonos, A y B. El abono A cuesta 0,90 €/kg y el B, 1,50 €/kg. El abono A tiene un 20 % de nitrógeno y un 10 % de fósforo, mientras que el B contiene un 18 % y un 15 %, respectivamente.

Los terrenos están bien fertilizados con al menos 180 kg de nitrógeno y 120 kg de fósforo.

¿Cuál es el gasto mínimo que debe hacer Ana para fertilizar de manera correcta sus terrenos?

- Llama x al número de kg de abono A e y al número de kg de abono B.
- Para poner las restricciones te puedes ayudar con esta tabla, complétala.

	CANTIDAD (kg)	NITRÓGENO	FÓSFORO	COSTE
A	x	$0{,}2x$		$0{,}9x$
B	y	$0{,}18y$	$0{,}15y$	
TOTAL		$0{,}2x + 0{,}18y$		

- Las restricciones son $0{,}2x + 0{,}18y \ge 180, \ldots$
- La función objetivo es $z = \ldots$
- Localiza los puntos que hacen máxima la función objetivo e interpreta la solución.

Solución: Debe comprar solo 1 200 kg de abono A. Gastará 1 080 €.

Ejercicios y problemas propuestos

Para practicar

Operaciones con matrices

1 Maximiza la función $F(x, y) = 25x + 20y$ sometida a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x + y \le 120 \\ 3y \le x \\ x \le 100,\ y \ge 10 \end{cases}$$

2 a) Maximiza y minimiza la función $F(x, y) = 2x + 3y$ con las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x + y \le 5 \\ x + 3y \ge 9 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$$

b) Haz lo mismo con la función $G(x, y) = y - x$.

3 Maximiza la función $z = x + y + 1$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 0 \le y \\ 0 \le x \le 10 \\ x \le y \\ y - 2x \le 6 \\ 3x + 4y \ge 24 \end{cases}$$

4 En la región determinada por $x + y \ge 5$, $x + 3y \ge 9$, $4x + y \ge 8$, $x \ge 0$ e $y \ge 0$, halla el punto en el que la función $F(x, y) = 2x + 3y$ alcanza su valor mínimo. ¿Puede alcanzar su máximo en esa región?

5 Calcula los puntos del siguiente recinto:

$$\begin{cases} 2x + y \ge 20 \\ 2x - y \le 20 \\ 0 \le y \le 20 \end{cases}$$

que hacen mínima o máxima la función $z = 2x + y$. ¿Cuántas soluciones hay?

6 ¿Es posible maximizar y minimizar la función $z = x + y + 1$ sujeta a estas restricciones?:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 13 \ge 0 \\ 2x - 3y - 3 \le 0 \\ 5x - y - 27 \le 0 \end{cases}$$

7 Dada la función $f(x, y) = 3x + 4y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$x + y \ge 2, \qquad x \le y, \qquad 0 \le y \le 2, \qquad x \ge 0$$

a) Dibuja la región factible y halla sus vértices, así como el valor de la función objetivo en cada uno de ellos.

b) Indica dónde se alcanzan el máximo y el mínimo, y di sus respectivos valores.

8 Dibuja el recinto determinado por:

$$\begin{cases} x \ge 0;\ y \ge 0 \\ y - x + 1 \ge 0 \\ y - 4 \le 0 \\ y + 2x - 5 \le 0 \end{cases}$$

a) Localiza los puntos de este recinto en los que la función objetivo $F(x, y) = x + y$ se hace máxima y mínima.

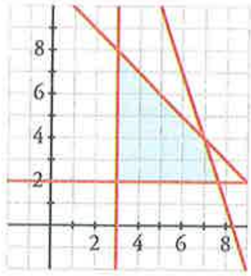
b) Sobre el mismo recinto, halla el máximo y el mínimo de la función $G(x, y) = 5x + y$.

9 Considera el triángulo de vértices (0, 0), (2, 8) y (10, 3). Determina razonadamente el punto en el que cada una de las siguientes funciones alcanza su máximo:

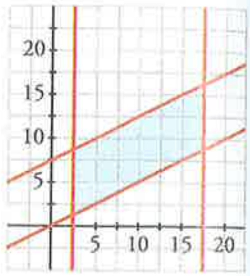
a) $F(x, y) = -4x + y + 9$ b) $F(x, y) = 4x + y + 12$

10 Define mediante un sistema de inecuaciones cada uno de los recintos representados en las siguientes figuras:

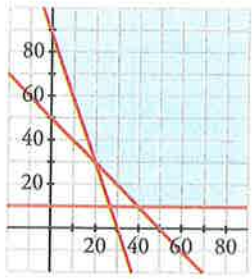
a)



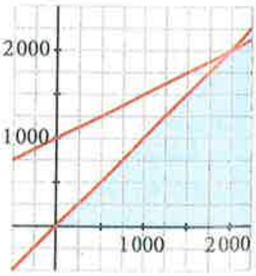
b)



c)



d)



11 a) Calcula los puntos donde se hace máxima y mínima la función $F(x, y) = 2x + y$ para la región de validez del apartado a) del ejercicio anterior.

Haz lo mismo para estas otras funciones:

b) Para el apartado b): $G(x, y) = x + 2y$

c) Para el apartado c): $H(x, y) = 3x + 4y$

d) Para el apartado d): $I(x, y) = x - 3y$

12 Suponemos que en el apartado b) del ejercicio 10 solo consideramos los números enteros de la región de validez.

a) Indica todas las posibles soluciones de dicha región.

b) Calcula los puntos de la región que hacen máxima y mínima la función $F(x, y) = x + y$.

c) Halla los puntos que hacen máxima y mínima la función $G(x, y) = x - 2y$.

Para resolver

13 Una confitería es famosa por sus dos especialidades en tartas: la tarta imperial y la tarta de lima.

La tarta imperial requiere para su elaboración medio kilo de azúcar y 8 huevos, y tiene un precio de venta de 8 €. La tarta de lima necesita 1 kilo de azúcar y 8 huevos, y tiene un precio de venta de 10 €. En el almacén les quedan 10 kilos de azúcar y 120 huevos.

a) ¿Qué combinaciones de especialidades pueden hacer?

b) ¿Se cumplirían los requisitos si decidieran elaborar 3 tartas imperiales y 9 tartas de lima?

c) ¿Cuántas unidades de cada tipo de tarta debe elaborar la confitería para obtener el mayor ingreso por ventas?

14 Una fábrica produce chaquetas y pantalones. Tres máquinas (de cortar, coser y teñir) se emplean en la producción.

- Hacer una chaqueta representa usar la máquina de cortar 1 h; la de coser, 3 h, y la de teñir, 1 h.
- Hacer unos pantalones representa usar la máquina de cortar 1 h; la de coser, 1 h y la de teñir, ninguna hora.

La máquina de teñir se puede usar durante 3 horas; la de coser, 11 horas, y la de cortar, 7 horas.

Todo lo que se fabrica es vendido y se obtiene un beneficio de 8 € por chaqueta y 5 € por pantalón. ¿Cómo emplearemos las máquinas para conseguir el beneficio máximo?

15 Una empresa constructora dispone de un terreno de 100 dam^2 para construir dos tipos de casas. Las casas de tipo A ocuparían una superficie de 4 dam^2 y las de tipo B, de 2 dam^2. Sobre plano ya se han vendido 4 casas de tipo A y 18 de tipo B, por tanto, deben construir al menos esas unidades. Además, por estudios de mercado han decidido construir al menos el triple de casas de tipo B que de tipo A.

a) ¿Cuántas casas pueden construir de cada tipo? Plantea el problema y representa el conjunto de soluciones.

b) Si por cada casa de tipo A obtienen un beneficio de 100 000 €, y por cada casa de tipo B, uno de 60 000 €, ¿cuántas deben construir de cada tipo para maximizar beneficios?

16 Un tren de mercancías puede arrastrar un máximo de 27 vagones. En cierto viaje transporta coches y motocicletas. Para los coches ha de dedicar un mínimo de 12 vagones, y para las motocicletas, no menos de la mitad de los vagones dedicados a los coches. Si los ingresos de la compañía ferroviaria son de 540 € por cada vagón de coches y de 360 € por cada vagón de motos, ¿cómo se han de distribuir los vagones para obtener el máximo ingreso? ¿Cuál es ese ingreso?

17 Un ganadero debe suministrar un mínimo diario de 4 mg de vitamina A y 6 mg de B en el pienso que da a sus reses.

Dispone para ello de dos tipos de pienso, P_1 y P_2, cuyos contenidos vitamínicos por kilogramo aparecen en la tabla.

	A	B
P_1	2	6
P_2	4	3

El kilogramo de pienso P_1 vale 0,40 € y el de P_2 vale 0,60 €. ¿Cómo deben mezclarse los piensos para dar a las reses las vitaminas requeridas con un coste mínimo?

18 Una persona tiene 15 000 € para invertir en dos tipos de acciones, A y B. El tipo A tiene un interés anual del 9 %, y el tipo B, del 5 %.

Decide invertir, como máximo, 9 000 € en A, y como mínimo, 3 000 € en B. Además, quiere invertir en A tanto o más que en B.

a) Dibuja la región factible.

b) ¿Cómo debe invertir los 15 000 € para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio anual máximo?

19 Una empresa textil quiere fabricar dos tipos de camisetas, lisas y estampadas. Para fabricar una camiseta lisa necesita 70 gramos de algodón y 20 gramos de poliéster, y para cada camiseta estampada, 60 gramos de algodón y 10 gramos de poliéster. La empresa dispone para ello de 4 200 gramos de algodón y 800 gramos de poliéster. Para que sea rentable, debe fabricar, al menos, 10 estampadas y, además, el doble de las estampadas debe ser igual al número de lisas. Sabiendo que cada camiseta lisa da un beneficio de 5 € y cada estampada de 4 €, ¿cuántas camisetas de cada tipo debería fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál es ese beneficio?

20 Una empresa fabricante de automóviles produce dos modelos, A y B. Tiene dos factorías, F_1 y F_2.

- En F_1 se producen diariamente 6 coches tipo A y 4 tipo B, con un coste de 32 000 € diarios. F_1 no funciona más de 50 días.
- En F_2 se producen 4 de A y 4 de B, con un coste de 24 000 € diarios.

Para abastecer el mercado, se han de poner a la venta al menos 360 coches de tipo A y al menos 300 de tipo B.

¿Cuántos días debe funcionar cada factoría para que el coste sea mínimo? ¿Cuál es ese coste?

21 Una empresa está empaquetando dos lotes diferentes. El lote de A tiene 1 queso y 2 botellas de vino, y el transporte cuesta 0,90 €. El lote B tiene 3 quesos y 1 botella de vino, y cuesta 1,50 € transportarlo. La empresa dispone de 200 quesos y 100 botellas de vino, y tiene que elaborar, por lo menos, 10 lotes de tipo A y 25 de tipo B. ¿Cuántos lotes de cada clase deben elaborar para que los gastos en transporte sean mínimos?

22 Una tienda desea liquidar 2 000 camisetas y 1 000 chándales de la temporada anterior y lanza dos ofertas, 1 y 2. La oferta 1 consiste en un lote de una camiseta y un chándal, que se vende por 30 €; la oferta 2 consiste en un lote de tres camisetas y un chándal, y se vende por 50 €. No se desea ofrecer menos de 200 lotes de la oferta 1 ni menos de 100 lotes de la oferta 2. ¿Cuántos lotes ha de vender de cada tipo para maximizar los ingresos? ¿A cuánto ascienden dichos ingresos?

23 Una peña de aficionados de un equipo de fútbol encarga a una empresa de transportes el viaje para llevar a los 1 200 socios a ver un partido de su equipo. La empresa dispone de autobuses de 50 plazas y de microbuses de 30 plazas. El precio de cada autobús es de 1 260 €, y el de cada microbús, de 900 €. La empresa solo dispone, ese día, de 28 conductores. ¿Qué número de autobuses y microbuses deben contratarse para conseguir el mínimo coste posible? ¿Cuál es ese coste?

24 Una fábrica hace dos tipos de mesas: clásicas y modernas.

- Cada mesa del modelo clásico requiere 4 horas de lijado y 3 horas de barnizado, y deja un beneficio de 200 €. No deben fabricarse más de 9 de estas mesas.
- Cada mesa moderna necesita 3 horas de lijado y 4 horas de barnizado, y su beneficio es de 100 €.
- Entre mesas clásicas y modernas no pueden fabricarse más de 17.

a) Si se dispone de 48 horas para lijado y de 60 horas para barnizado, ¿cuántas mesas de cada tipo ha de fabricar para que sus beneficios sean máximos?

b) ¿Qué información ha resultado superflua para la resolución del problema?

25 En una bodega se producen vinos de crianza y de reserva. Por problemas de diseño, la producción de ambos tipos de vino no debe superar los 60 millones de litros y la producción de vino de reserva no debe superar el doble de la de vino de crianza ni ser inferior a su mitad.

Si la bodega comercializa el litro de vino de crianza a 4 € y el de reserva a 9 €, ¿cuál es el diseño de producción que maximiza los ingresos?

26 Una empresa de joyería tiene dos máquinas, A y B, con las que puede hacer anillos, pulseras y collares y tiene que decidir el número de horas de trabajo de cada una de las máquinas para la próxima semana. En cada hora de trabajo, la máquina A realiza 1 anillo, 4 pulseras y 2 collares, mientras que la máquina B realiza 4 anillos, 2 pulseras y 3 collares. Durante la próxima semana, la empresa debe producir, al menos, 80 anillos, 96 pulseras y 120 collares.

a) ¿Cuántas horas debe trabajar cada máquina para satisfacer estos requisitos de demanda? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría usarse 10 horas la máquina A y 30 horas la B?

b) El coste por cada hora de trabajo de la máquina A es de 2 500 € y el de la máquina B es de 2 000 €. ¿Cuántas horas tiene que trabajar cada máquina para minimizar el coste total? ¿A cuánto asciende dicho coste mínimo?

27 Un agricultor quiere dedicar al menos 4 hectáreas al cultivo de dos productos, A y B. El beneficio neto obtenido por cada hectárea cultivada es de 3 000 € y 1 500 €, respectivamente. Las necesidades por hectárea y temporada de horas de maquinaria y de kilos de abono son 20 horas y 100 kg para el cultivo A y 10 horas y 300 kg para el cultivo B. Determina cuántas hectáreas conviene dedicar a cada cultivo para que el beneficio total sea máximo, si dispone para esta temporada de 180 horas de maquinaria y de 2 400 kg de abono.

a) Plantea el problema.

b) Resuélvelo gráficamente.

c) Analiza gráficamente qué ocurriría si, además, se desea que el número de hectáreas dedicadas al cultivo B sea no menor que el doble del número de hectáreas dedicadas al cultivo A.

28 Un sastre tiene 80 m^2 de tela de algodón y 120 m^2 de tela de lana. Un traje de caballero requiere 1 m^2 de algodón y 3 m^2 de lana, y un vestido de señora necesita 2 m^2 de cada una de las telas.

Halla el número de trajes y vestidos que debe confeccionar el sastre para maximizar los beneficios si un traje y un vestido se venden por el mismo precio.

29 Las rectas $2x + y = 18$, $2x + 3y = 24$ y $x + y = 16$ se cortan dos a dos en tres puntos que son los vértices de un triángulo T. Sea S la intersección del triángulo T con el primer cuadrante.

a) Halla el máximo de la función $z = 5x + 3y$ cuando x e y varían en S.

b) Expresa el recinto mediante un sistema de inecuaciones.

Para profundizar

30 Un pastelero fabrica dos tipos de tartas, T_1 y T_2, para lo que usa tres ingredientes, A, B y C. Dispone de 150 kg de A, 90 kg de B y 150 kg de C. Para fabricar una tarta T_1 debe mezclar 1 kg de A, 1 kg de B y 2 kg de C, mientras que para hacer una tarta T_2, necesita 5 kg de A, 2 kg de B y 1 kg de C.

a) Si se venden las tartas T_1 a 10 € y las tartas T_2 a 23 €, ¿qué cantidad debe fabricar de cada clase para maximizar sus ingresos?

b) Si se fija el precio de una tarta del tipo T_1 en 15 €, ¿cuál será el precio de una tarta del tipo T_2 si una solución óptima es fabricar 60 tartas del tipo T_1 y 15 del tipo T_2?

31 Una empresa de automóviles tiene dos plantas P_1 y P_2 de montaje de vehículos en las que producen tres modelos: M_1, M_2 y M_3. De la planta P_1 salen semanalmente 10 unidades del modelo M_1, 30 del M_2 y 15 del M_3. De la planta P_2 salen 20 unidades del M_1, 20 del M_2 y 70 del M_3 cada semana. La empresa necesita al menos 800 unidades de M_1, al menos 1 600 de M_2 y al menos 1 800 de M_3. Si el gasto de mantenimiento de cada planta es de 36 000 € semanales, ¿cuántas semanas ha de funcionar cada planta para que el coste de producción sea mínimo? ¿Cuál es el coste mínimo?

32 Arancha decide emplear hasta 30 000 € de su patrimonio en la adquisición de acciones de dos sociedades de inversión: BLL e ISSA. El precio de cada acción es de 10 € en ambos casos.

- BLL dedica el 35 % de su actividad al sector seguros, el 45 % al sector inmobiliario y el 20 % al industrial.
- ISSA dedica el 30 % de sus recursos al sector seguros, el 25 % al inmobiliario y el 45 % al industrial.

Arancha no quiere invertir más del 40 % de su capital en el sector industrial ni más del 35 % en el inmobiliario.

¿Cuántas acciones debe adquirir de cada sociedad si BLL prevé entregar un dividendo de 1,20 €/acción e ISSA de 1 €/acción?

33 Una empresa compra 26 locomotoras a tres fábricas: 9 a A, 10 a B y 7 a C. Las locomotoras deben prestar servicio en dos estaciones distintas: 11 de ellas en la estación N y 15 en la S. Los costes de traslado son, por cada una, los que se indican en la tabla (en miles de euros):

	A	B	C
N	6	15	3
S	4	20	5

Averigua cómo conviene hacer el reparto para que el coste sea mínimo.

AUTOEVALUACIÓN

anayaeducacion.es Resoluciones de estos ejercicios.

1 Representa el recinto limitado por estas inecuaciones:

$$\begin{cases} x + y \leq 27 \\ x \geq 12 \\ y \geq 6 \end{cases}$$

Halla los valores máximo y mínimo de $F(x, y) = 90x + 60y$ en ese recinto.

2 Representa el recinto descrito por las inecuaciones:

$$\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 10 - x \geq 0 \\ 10 - y \geq 0 \\ x + y \leq 13 \\ x + 2y \geq 12 \end{cases}$$

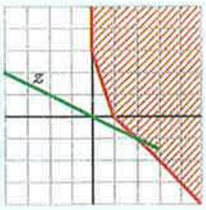
Halla el máximo y el mínimo de las siguientes funciones:

a) $F(x, y) = 2x + y$ b) $G(x, y) = x + 2y$

c) $H(x, y) = x - y - 5$ d) $I(x, y) = x + y + 2$

3 ¿Tiene máximo la función z en el recinto señalado? ¿Y mínimo?

En caso afirmativo, indícalo.



4 Una empresa de instalaciones dispone de 195 kg de cobre, 20 kg de titanio y 14 kg de aluminio.

Para fabricar 100 m de cable de tipo A, se necesitan 10 kg de cobre, 2 kg de titanio y 1 kg de aluminio, y se obtiene de él un beneficio de 1 500 €. Para fabricar 100 m de cable de tipo B, se necesitan 15 kg de cobre, 1 kg de titanio y 1 kg de aluminio, y se obtiene un beneficio de 1 000 €.

Calcula cuántos metros de cable hay que fabricar de cada tipo para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es ese beneficio?

5 Una tienda de electrodomésticos desea adquirir dos tipos de cocinas: vitrocerámicas y de inducción. Disponen de 3 000 €. Cada vitrocerámica le cuesta 100 € y cada cocina de inducción 200 €. Solo tienen espacio para 20 cocinas. El beneficio obtenido sobre su precio de coste es del 30 % por cada vitrocerámica y del 25 % por cada una de inducción. Además, el número de cocinas de inducción no puede ser superior a 12. ¿Cuántas cocinas de cada tipo debe comprar para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál es ese beneficio?