

EJERCICIOS REPASO: POTENCIAS, RAÍCES Y LOGARITMOS.

1 Haz estas operaciones con potencias.

a) $4^{-3} \cdot 4^2 : (4)^{-1}$

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^2$

c) $5^{-3} \left[\left(\frac{1}{5} \right)^{-2} \right]^2$

a) $4^{-3} \cdot 4^2 : (4)^{-1} = 4^0 = 1$

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^2 = \left(\frac{2^2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{3^2}{2^3}\right)^2 = \frac{2^6}{3^3} \cdot \frac{3^4}{2^6} = 3$

c) $5^{-3} \left[\left(\frac{1}{5} \right)^{-2} \right]^2 = 5^{-3} \cdot \left(\frac{1}{5} \right)^{-4} = 5^{-3} \cdot 5^4 = 5$

2 Simplifica al máximo estas expresiones.

a) $\frac{4 \cdot (10^{-2})^3 \cdot 10^2}{12 \cdot 10^{-3}}$

b) $\frac{25 \cdot (10^2)^{-5} \cdot 121}{11 \cdot 75 \cdot 10^{-9}}$

a) $\frac{4 \cdot (10^{-2})^3 \cdot 10^2}{12 \cdot 10^{-3}} = \frac{10^{-6} \cdot 10^2}{3 \cdot 10^{-3}} = \frac{1}{30}$

b) $\frac{25 \cdot (10^2)^{-5} \cdot 121}{11 \cdot 75 \cdot 10^{-9}} = \frac{5^2 \cdot 10^{-10} \cdot 11^2}{11 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 10^{-9}} = \frac{11}{3 \cdot 10} = \frac{11}{30}$

3 Realiza estas operaciones con potencias.

a) $9^{-1} \cdot 9^2 : 9^{-3}$

b) $\left(\frac{2}{5}\right)^4 : \left(\frac{4}{25}\right)^{-2}$

c) $3^{-3} \cdot (9^{-2})^2$

a) $9^{-1} \cdot 9^2 : 9^{-3} = 9^4$

b) $\left(\frac{2}{5}\right)^4 : \left(\frac{4}{25}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^4 : \left(\left(\frac{2}{5}\right)^2\right)^{-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^4 : \left(\frac{2}{5}\right)^{-4} = \left(\frac{2}{5}\right)^8$

c) $3^{-3} \cdot (9^{-2})^2 = 3^{-3} \cdot 9^{-4} = 3^{-3} \cdot (3^2)^{-4} = 3^{-3} \cdot 3^{-8} = 3^{-11}$

4 Simplifica al máximo estas expresiones.

a) $\frac{12 \cdot 10^{-1} \cdot 20^4}{50 \cdot (16^{-2})^{-3}}$

b) $\frac{(18^2)^{-2} \cdot 81}{6^3 \cdot 108 \cdot (24)^{-4}}$

a) $\frac{12 \cdot 10^{-1} \cdot 20^4}{50 \cdot (16^{-2})^{-3}} = \frac{3 \cdot 2^2 \cdot 10^{-1} \cdot 2^4 \cdot 10^4}{5 \cdot 10 \cdot (2^4)^6} = \frac{3 \cdot 10^2}{5 \cdot 2^{18}} = \frac{3 \cdot 2^2 \cdot 5^2}{5 \cdot 2^{18}} = \frac{3 \cdot 5}{2^{16}} = \frac{15}{65536}$

b) $\frac{(18^2)^{-2} \cdot 81}{6^3 \cdot 108 \cdot (24)^{-4}} = \frac{(2 \cdot 3^2)^{-4} \cdot 3^4}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot (2^3 \cdot 3)^{-4}} = \frac{2^3}{3^6} = \frac{8}{729}$

5 Calcula mentalmente y escribe en tu cuaderno el valor de los siguientes radicales.

- | | | |
|--------------------|----------------------|-----------------------|
| a) $\sqrt[55]{1}$ | d) $\sqrt[40]{-1}$ | g) $\sqrt[5]{32}$ |
| b) $\sqrt[4]{81}$ | e) $\sqrt[3]{-1000}$ | h) $\sqrt[4]{0,0001}$ |
| c) $-\sqrt[6]{64}$ | f) $-\sqrt{36}$ | i) $\sqrt[4]{-81}$ |
| a) 1 | d) No es real. | g) 2 |
| b) ± 3 | e) -10 | h) $\pm 0,1$ |
| c) -2 | f) -6 | i) No es real. |

6 Expresa los siguientes radicales como potencias y simplificalos.

- | | | |
|---|---|---|
| a) $\sqrt[3]{729}$ | c) $\sqrt{125}$ | e) $\sqrt[10]{81}$ |
| b) $\sqrt[4]{1024}$ | d) $\sqrt[5]{8}$ | f) $\sqrt[12]{15\,625}$ |
| a) $\sqrt[3]{729} = (3^6)^{\frac{1}{3}} = 3^2 = 9$ | c) $\sqrt{125} = (5^3)^{\frac{1}{2}} = 5\sqrt{5}$ | e) $\sqrt[10]{81} = (3^4)^{\frac{1}{10}} = 3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{9}$ |
| b) $\sqrt[4]{1024} = (2^{10})^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{2^5} = 4\sqrt{2}$ | d) $\sqrt[5]{8} = (2^3)^{\frac{1}{5}} = \sqrt{2}$ | f) $\sqrt[12]{15\,625} = (5^6)^{\frac{1}{12}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$ |

7 Calcula el valor de las siguientes potencias.

- | | | | |
|---|--|---|---|
| a) $25^{\frac{3}{2}}$ | c) $343^{\frac{2}{3}}$ | e) $16^{0,25}$ | g) $27^{0,3}$ |
| b) $49^{\frac{5}{2}}$ | d) $125^{\frac{4}{3}}$ | f) $81^{0,75}$ | h) $625^{0,25}$ |
| a) $25^{\frac{3}{2}} = (5^2)^{\frac{3}{2}} = 125$ | c) $343^{\frac{2}{3}} = (7^3)^{\frac{2}{3}} = 49$ | e) $16^{0,25} = (2^4)^{\frac{1}{4}} = 2$ | g) $27^{0,3} = (3^3)^{\frac{1}{3}} = 3$ |
| b) $49^{\frac{5}{2}} = (7^2)^{\frac{5}{2}} = 16\,807$ | d) $125^{\frac{4}{3}} = (5^3)^{\frac{4}{3}} = 625$ | f) $81^{0,75} = (3^4)^{\frac{3}{4}} = 27$ | h) $625^{0,25} = (5^4)^{\frac{1}{4}} = 5$ |

8 Expresa como un solo radical.

- | | |
|---|--|
| a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{4}$ | c) $(\sqrt[5]{3})^4 : \sqrt[5]{27}$ |
| b) $\sqrt[4]{4} : \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8}$ | d) $\sqrt[3]{\sqrt{512}} \cdot \sqrt[5]{64}$ |
| a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{24}$ | c) $(\sqrt[5]{3})^4 : \sqrt[5]{27} = \sqrt[5]{3^4} : \sqrt[5]{3^3} = \sqrt[5]{3}$ |
| b) $\sqrt[4]{4} : \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{16} = 2$ | d) $\sqrt[3]{\sqrt{512}} \cdot \sqrt[5]{64} = \sqrt[6]{2^9} \cdot \sqrt[5]{2^6} = \sqrt[30]{2^{15}} = \sqrt[2]{2^5} = 4\sqrt{2}$ |

9 Aplica las propiedades de los radicales y simplifica las siguientes expresiones.

- | | | | |
|---|---|--|---|
| a) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{4}}$ | b) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{8}}$ | c) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^6}}$ | d) $(\sqrt[3]{\sqrt{64}})^2$ |
| a) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[3]{2}$ | b) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{8}} = \sqrt[12]{2^3} = \sqrt[4]{2}$ | c) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^6}} = \sqrt[4]{2}$ | d) $(\sqrt[3]{\sqrt{64}})^2 = \sqrt[6]{2^{12}} = 2^2 = 4$ |

10  Simplifica.

a) $\sqrt[4]{3^2}$

b) $\sqrt[12]{a^8}$

c) $\sqrt[5]{a^{15}}$

d) $\sqrt[8]{a^2 b^4}$

e) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^8}}$

f) $\sqrt[3]{a^6 b^9}$

a) $\sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{a^2}$

c) a^3

d) $\sqrt[4]{ab^2}$

e) $\sqrt[12]{a^8} = \sqrt[3]{a^2}$

f) $a^2 b^3$

11  Extrae del radical los factores que sea posible.

a) $\sqrt[3]{16a^3}$

b) $\sqrt[4]{81a^5 b^3}$

c) $\sqrt{8a^5}$

d) $\sqrt[3]{\frac{24}{a^4}}$

e) $\sqrt{\frac{162}{75}}$

f) $\sqrt[5]{\frac{9}{32}}$

a) $2a^3\sqrt{2}$


b) $3a^4\sqrt{ab^3}$

c) $2a^2\sqrt{2a}$

d) $\frac{2}{a}\sqrt[3]{\frac{3}{a}}$

e) $\frac{9}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}$

f) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{9}$

12  Reduce a índice común y ordena de menor a mayor los radicales siguientes:

$$\sqrt{7}, \sqrt[3]{30}, \sqrt[4]{40}, \sqrt[6]{81}$$

$$\text{mín.c.m. (2, 3, 4, 6)} = 12$$

$$\sqrt{7} = \sqrt[12]{7^6} = \sqrt[12]{117\,649}$$

$$\sqrt[3]{30} = \sqrt[12]{30^4} = \sqrt[12]{810\,000}$$

$$\sqrt[4]{40} = \sqrt[12]{40^3} = \sqrt[12]{64\,000}$$

$$\sqrt[6]{81} = \sqrt[12]{81^2} = \sqrt[12]{6\,561}$$

$$\sqrt[6]{81} < \sqrt[4]{40} < \sqrt{7} < \sqrt[3]{30}$$

13  Introduce dentro de la raíz y simplifica.

a) $5\sqrt{\frac{3}{5}}$

b) $\frac{\sqrt{18}}{3}$

c) $2\sqrt[3]{\frac{7}{4}}$

d) $2\sqrt[4]{\frac{5}{12}}$

e) $\frac{1}{2}\sqrt{12}$

f) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$

a) $\sqrt{\frac{5^2 \cdot 3}{5}} = \sqrt{15}$


b) $\sqrt{\frac{18}{3^2}} = \sqrt{2}$

c) $\sqrt[3]{\frac{2^3 \cdot 7}{4}} = \sqrt[3]{14}$

d) $\sqrt[4]{\frac{2^4 \cdot 5}{12}} = \sqrt[4]{\frac{20}{3}}$

e) $\sqrt{\frac{12}{2^2}} = \sqrt{3}$

f) $\sqrt[3]{\frac{2^3 \cdot 9}{3^3 \cdot 4}} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

14  Divide y simplifica.

a) $\sqrt{7} : \sqrt{\frac{21}{5}}$

b) $\sqrt[4]{\frac{3}{5}} : \sqrt[4]{\frac{5}{3}}$

c) $\sqrt[3]{\frac{5}{6}} : \sqrt[3]{\frac{45}{2}}$

a) $\sqrt{7} : \sqrt{\frac{21}{5}} = \sqrt{7 : \frac{21}{5}} = \sqrt{\frac{5}{3}}$

b) $\sqrt[4]{\frac{3}{5}} : \sqrt[4]{\frac{5}{3}} = \sqrt[4]{\frac{3}{5} : \frac{5}{3}} = \sqrt[4]{\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{3}{5}}$

c) $\sqrt[3]{\frac{5}{6}} : \sqrt[3]{\frac{45}{2}} = \sqrt[3]{\frac{5}{6} : \frac{45}{2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$

15  Reduce a índice común y efectúa.

a) $\sqrt[5]{6} \cdot \sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{4} : \sqrt{2}$

c) $\sqrt[6]{20} : \sqrt[4]{10}$

d) $(\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}) : (\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3})$

a) $\sqrt[10]{6^2 \cdot 3^5} = \sqrt[10]{8748}$

b) $\sqrt[6]{\frac{4^2}{2^3}} = \sqrt[6]{2}$

c) $\sqrt[12]{20^2 : 10^3} = \sqrt[12]{\frac{4}{10}} = \sqrt[12]{\frac{2}{5}}$

d) $\sqrt[6]{(2^3 \cdot 3^2) : (2^2 \cdot 3^3)} = \sqrt[6]{\frac{2}{3}}$

16  Efectúa.

a) $\sqrt{48} - \sqrt{12} + \sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{24}$

c) $\sqrt{28} - \sqrt{7} + \sqrt{63}$

d) $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{2}$

e) $\sqrt{108} - 2\sqrt{12} - \sqrt{28} + \sqrt{7/4}$

a) $\sqrt{2^4 \cdot 3} - \sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{3} = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{3^4} - \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 3\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3}$

c) $\sqrt{2^2 \cdot 7} - \sqrt{7} + \sqrt{3^2 \cdot 7} = 2\sqrt{7} - \sqrt{7} + 3\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$

d) $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} + \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$

e) $\sqrt{2^2 \cdot 3^3} - 2\sqrt{2^2 \cdot 3} - \sqrt{2^2 \cdot 7} + \frac{\sqrt{7}}{2} = 6\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 2\sqrt{7} + \frac{\sqrt{7}}{2} = 2\sqrt{3} - \frac{3}{2}\sqrt{7}$

17  Efectúa.

a) $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$

b) $(3\sqrt{2} + 2)^2$

c) $(\sqrt{5} - 2\sqrt{3})(\sqrt{5} + 2\sqrt{3})$


d) $(2\sqrt{5} - \sqrt{3})^2$

a) $4 - 3 = 1$

b) $9 \cdot 2 + 4 + 12\sqrt{2} = 22 + 12\sqrt{2}$

c) $5 - 4 \cdot 3 = -7$

d) $4 \cdot 5 + 3 - 4\sqrt{15} = 23 - 4\sqrt{15}$

18  Racionaliza y simplifica.

a) $\frac{3}{\sqrt{3}}$

b) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

c) $\frac{3}{\sqrt{15}}$

d) $\frac{4}{\sqrt{12}}$

e) $\frac{3}{2\sqrt{6}}$

f) $\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$

a) $\frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

b) $\frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{2} = \sqrt{6}$

c) $\frac{3\sqrt{15}}{15} = \frac{\sqrt{15}}{5}$

d) $\frac{4\sqrt{12}}{12} = \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{12} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

e) $\frac{3\sqrt{6}}{12} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

f) $\frac{2\sqrt[3]{5^2}}{5} = \frac{2\sqrt[3]{25}}{5}$

19 Racionaliza y simplifica si es posible.

a) $\frac{1 + \sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$ b) $\frac{3}{1 + \sqrt{3}}$ c) $\frac{14}{3 - \sqrt{2}}$
d) $\frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$ e) $\frac{11}{2\sqrt{5} + 3}$ f) $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2} - 3}$
g) $\frac{10}{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ h) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$ i) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

a) $\frac{(1 + \sqrt{6})\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{18}}{6} = \frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{6}$

b) $\frac{3(1 - \sqrt{3})}{1 - 3} = \frac{3 - 3\sqrt{3}}{-2} = \frac{-3 + 3\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{14(3 + \sqrt{2})}{9 - 2} = \frac{42 + 14\sqrt{2}}{7} = 6 + 2\sqrt{2}$

d) $\frac{(1 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})}{1 - 2} = \frac{1 + 2 + 2\sqrt{2}}{-1} = -3 - 2\sqrt{2}$

e) $\frac{11(2\sqrt{5} - 3)}{4 \cdot 5 - 9} = 2\sqrt{5} - 3$

f) $\frac{\sqrt{2}(2\sqrt{2} + 3)}{4 \cdot 2 - 9} = \frac{2 \cdot 2 + 3\sqrt{2}}{-1} = -4 - 3\sqrt{2}$

g) $\frac{10(2\sqrt{3} + \sqrt{2})}{4 \cdot 3 - 2} = 2\sqrt{3} + \sqrt{2}$

h) $\frac{\sqrt{3}(\sqrt{2} - \sqrt{3})}{2 - 3} = \frac{\sqrt{6} - 3}{-1} = -\sqrt{6} + 3$

i) $\frac{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{5 - 3} = \frac{5 + 3 - 2\sqrt{15}}{2} = \frac{8 - 2\sqrt{15}}{2} = 4 - \sqrt{15}$

20 **EJERCICIO 14 : Extrae del radical todos los factores que sea posible:**

a) $\sqrt{864a^5b^4}$

b) $\sqrt{\frac{x^4y^5}{z^3}}$

c) $\sqrt[3]{a^4b^6c^7}$

Solución:

a) $\sqrt{864a^5b^4} = \sqrt{2^5 \cdot 3^3 \cdot a^5 \cdot b^4} = 2^2 \cdot 3 \cdot a^2 \cdot b^2 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot a} = 12a^2b^2\sqrt{6a}$

b) $\sqrt{\frac{x^4y^5}{z^3}} = \frac{x^2y^2}{z} \sqrt{\frac{y}{z}}$

c) $\sqrt[3]{a^4b^6c^7} = ab^2c^2\sqrt[3]{ac}$

21

EJERCICIO 15 : Simplifica y extrae los factores que puedas fuera del radical:

a) $\sqrt[7]{a^{10}}$

b) $(\sqrt[6]{a^4})^2$

c) $(\sqrt[3]{\sqrt{a}})^{10}$

Solución:

a) $\sqrt[7]{a^{10}} = a\sqrt[7]{a^3}$

b) $(\sqrt[6]{a^4})^2 = \sqrt[6]{a^8} = a^{8/6} = a^{4/3} = \sqrt[3]{a^4} = a\sqrt[3]{a}$

c) $(\sqrt[3]{\sqrt{a}})^{10} = \sqrt[6]{a^{10}} = a^{10/6} = a^{5/3} = \sqrt[3]{a^5} = a\sqrt[3]{a^2}$

22

EJERCICIO 18

a) Calcula y simplifica: $\sqrt{28} - \frac{1}{3}\sqrt{63} + 2\sqrt{7}$

b) Racionaliza y simplifica: $\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

Solución:

a) $\sqrt{28} - \frac{1}{3}\sqrt{63} + 2\sqrt{7} = \sqrt{2^2 \cdot 7} - \frac{1}{3}\sqrt{3^2 \cdot 7} + 2\sqrt{7} = 2\sqrt{7} - \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{7} + 2\sqrt{7} = 2\sqrt{7} - \sqrt{7} + 2\sqrt{7} = 3\sqrt{7}$

b) $\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = \frac{1+3+2\sqrt{3}}{1-3} = \frac{4+2\sqrt{3}}{-2} = -2-\sqrt{3}$

23

EJERCICIO 19

a) Efectúa y simplifica: $\sqrt{405} - \sqrt{45} + 8\sqrt{5}$

b) Racionaliza y simplifica: $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

Solución:

a) $\sqrt{405} - \sqrt{45} + 8\sqrt{5} = \sqrt{3^4 \cdot 5} - \sqrt{3^2 \cdot 5} + 8\sqrt{5} = 9\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 8\sqrt{5} = 14\sqrt{5}$

b) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})} = \frac{6+2-2\sqrt{12}}{6-2} = \frac{8-2\sqrt{12}}{4} = \frac{8-2\sqrt{2^2 \cdot 3}}{4} = \frac{8-4\sqrt{3}}{4} = 2-\sqrt{3}$

24

EJERCICIO 20

a) Opera y simplifica: $2\sqrt{48} - \sqrt{300} + 5\sqrt{3}$

b) Racionaliza y simplifica: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Solución:

a) $2\sqrt{48} - \sqrt{300} + 5\sqrt{3} = 2\sqrt{2^4 \cdot 3} - \sqrt{2^2 \cdot 3 \cdot 5^2} + 5\sqrt{3} = 8\sqrt{3} - 10\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{3\sqrt{6}}{6} + \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{5\sqrt{6}}{6}$

25 **EJERCICIO 22**

a) Calcula y simplifica : $\frac{2}{3}\sqrt{80} - \frac{1}{4}\sqrt{180} + \sqrt{5}$

b) Racionaliza y simplifica : $\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

Solución:

a) $\frac{2}{3}\sqrt{80} - \frac{1}{4}\sqrt{180} + \sqrt{5} = \frac{2}{3}\sqrt{2^4 \cdot 5} - \frac{1}{4}\sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} + \sqrt{5} = \frac{8}{3}\sqrt{5} - \frac{6}{4}\sqrt{5} + \sqrt{5} = \left(\frac{8}{3} - \frac{6}{4} + 1\right)\sqrt{5} = \frac{13}{6}\sqrt{5}$

b) $\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{(1-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{10}-\sqrt{6}}{5-3} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}$

26 **EJERCICIO 31 : Expresa como un solo radical:**

a) $\sqrt[3]{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}}$

b) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2^2}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt{7}} \cdot \sqrt[5]{7}$

Solución:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \sqrt[3]{\sqrt{10}} = \sqrt[6]{10}$

b) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2^2} = \sqrt[12]{2^4 \cdot 2^6} = \sqrt[12]{2^{10}} = \sqrt[6]{2^5}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt{7}} \cdot \sqrt[5]{7} = \sqrt[6]{7} \cdot \sqrt[5]{7} = \sqrt[30]{7^5 \cdot 7^6} = \sqrt[30]{7^{11}}$

27 **Calcula los siguientes logaritmos.**

a) $\log_2 32$

c) $\log_3 729$

e) $\log 1\,000\,000$

b) $\log_2 \frac{1}{16}$

d) $\log_3 \frac{1}{81}$

f) $\log \frac{1}{1000}$

a) $\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$

c) $\log_3 729 = \log_3 3^6 = 6$

e) $\log 1\,000\,000 = \log 10^6 = 6$

b) $\log_2 \frac{1}{16} = \log_2 2^{-4} = -4$

d) $\log_3 \frac{1}{81} = \log_3 3^{-4} = -4$

f) $\log \frac{1}{1000} = \log 10^{-3} = -3$

28 **Calcula los siguientes logaritmos.**

a) $\log_2 \sqrt{8}$

c) $\log_3 \sqrt[3]{243}$

e) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 32$

d) $\log \sqrt[5]{100}$

f) $\log_{\frac{1}{10}} \sqrt[3]{100}$

a) $\log_2 \sqrt{8} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$

c) $\log_3 \sqrt[3]{243} = \log_3 3^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3}$

e) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 3$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 32 = \log_{\frac{1}{2}} 2^5 = -5$

d) $\log \sqrt[5]{100} = \log 10^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5}$

f) $\log_{\frac{1}{10}} \sqrt[3]{100} = \log_{\frac{1}{10}} \left(\frac{1}{10}\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{-2}{3}$

29 Calcula el valor de x en estas igualdades.

a) $\log 1\,000\,000 = x$

c) $\log(-100) = x$

e) $\log_7 \frac{1}{49} = x$

b) $\log_x 0,5 = -1$

d) $\log_2 x = 5$

f) $-\frac{1}{3} = \log_{27} x$

a) $x = \log 1\,000\,000 = \log 10^6 = 6$

c) $\log(-100)$ no existe

e) $\log_7 \frac{1}{49} = \log_7 7^{-2} \Rightarrow x = -2$

b) $\log_x 0,5 = -1 \Rightarrow \log_x \frac{1}{2} = -1 \Rightarrow x = 2$

d) $\log_2 x = 5 \Rightarrow x = 2^5 = 32$

f) $-\frac{1}{3} = \log_{27} x \Rightarrow x = 27^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

30 Halla el valor de x en cada caso.

a) $\log_x 16 = -4$

c) $\log_{\frac{1}{7}} x = -3$

e) $\log_x 125 = 3$

b) $\log_x \frac{1}{16} = -8$

d) $\log_{11} 1331 = x$

f) $\log_x 25 = 4$

a) $x^{-4} = 16 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

c) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-3} = x \Rightarrow x = 7^3 = 343$

e) $x^3 = 5^3 \Rightarrow x = 5$

b) $x^{-8} = \frac{1}{16} \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$

d) $11^x = 11^3 \Rightarrow x = 3$

f) $x^4 = 5^2 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5}$

31 Transforma los siguientes logaritmos en sumas y restas de $\log A$ y $\log B$.

a) $\log \frac{\sqrt{B}}{10A}$

b) $\log \frac{B^3}{\sqrt{A}} - \log A^2$

a) $\log \frac{\sqrt{B}}{10A} = \log \sqrt{B} - \log(10A) = \log B^{\frac{1}{2}} - \log 10 - \log A = \frac{1}{2} \log B - 1 - \log A$

b) $\log \frac{B^3}{\sqrt{A}} - \log A^2 = \log B^3 - \log \sqrt{A} - 2 \log A = 3 \log B - \log A^{\frac{1}{2}} - 2 \log A = 3 \log B - \frac{1}{2} \log A - 2 \log A = 3 \log B - \frac{5}{2} \log A$

32 Transforma las siguientes expresiones en sumas y restas.

a) $X = \frac{a^3 \sqrt{b^2}}{\sqrt[3]{a}}$

b) $Y = \frac{a^3 \sqrt{b}}{100 \sqrt[3]{c}}$

a) $\log X = \log \frac{a^3 \sqrt{b^2}}{\sqrt[3]{a}} = \log a + \log \left(b^{\frac{2}{3}}\right) - \log \left(a^{\frac{1}{3}}\right) = \log a + \frac{2}{3} \log b - \frac{1}{3} \log a = \frac{2}{3} \log a + \frac{2}{3} \log b$

b) $\log Y = \log \frac{a^3 \sqrt{b}}{100 \sqrt[3]{c}} = \log a^3 + \log b^{\frac{1}{2}} - \log 100 - \log \sqrt[3]{c} = 3 \log a + \frac{1}{2} \log b - 2 - \log c^{\frac{1}{3}} = 3 \log a + \frac{1}{2} \log b - 2 - \frac{1}{3} \log c$

33 Utilizando las propiedades de los logaritmos y siendo $\log x \approx 0,70$ y $\log y \approx 1,18$, calcula:

a) $\log(x^2 \cdot y)$

b) $\log \frac{x^3}{y^2}$

c) $\log(\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y^2})$

a) $\log(x^2 \cdot y) = \log x^2 + \log y = 2 \log x + \log y = 2 \cdot 0,70 + 1,18 = 2,58$

b) $\log \frac{x^3}{y^2} = \log x^3 - \log y^2 = 3 \log x - 2 \log y = 3 \cdot 0,70 - 2 \cdot 1,18 = -0,26$

c) $\log(\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y^2}) = \log \sqrt{x} + \log \sqrt[3]{y^2} = \log x^{\frac{1}{2}} + \log y^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \log x + \frac{2}{3} \log y = \frac{1}{2} \cdot 0,70 + \frac{2}{3} \cdot 1,18 = 1,14$

34 Escribe como un único logaritmo.

a) $\log 16 - \log 3 + \log 12$

c) $(\log 25 + \log 4) - (\log 8 - \log 9)$

b) $\log 18 - \log 27 - \log 2$

a) $\log 16 - \log 3 + \log 12 = \log \frac{16 \cdot 12}{3} = \log 64$

b) $\log 18 - \log 27 - \log 2 = \log \frac{18}{27 \cdot 2} = \log \frac{1}{3}$

c) $(\log 25 + \log 4) - (\log 8 - \log 9) = \log \frac{25 \cdot 4 \cdot 9}{8} = \log \frac{225}{2}$

35 Aplicando un cambio de base y usando la calculadora, halla los siguientes logaritmos.

a) $\log_2 14$

c) $\log_{\frac{1}{2}} 12$

b) $\log_3 32$

d) $\log_5 10$

a) $\log_2 14 = \frac{\log 14}{\log 2} = 3,8074$

c) $\log_{\frac{1}{2}} 12 = \frac{\log 12}{\log \frac{1}{2}} = -3,5850$

b) $\log_3 32 = \frac{\log 32}{\log 3} = 3,1546$

d) $\log_5 10 = \frac{\log 10}{\log 5} = 1,4307$

36 Halla x usando la calculadora para que se cumpla que $3^x = 7$.

$$3^x = 7 \Rightarrow \log 3^x = \log 7 \Rightarrow x \log 3 = \log 7 \Rightarrow x = \frac{\log 7}{\log 3} \approx 1,77$$

37 ¿A qué número hay que elevar 5 para que dé un millón?

$$5^x = 10^6 \Rightarrow x = \log_5 10^6 \Rightarrow x = \frac{\log 10^6}{\log 5} = 8,584$$

38 Halla el capital final en que se convierten 650 € en tres años a un interés simple del 2,25%.

$$C_F = 650 \left(1 + \frac{2,25 \cdot 3}{100} \right) = 693,875 \text{ €}$$

39 Un banco ofrece un interés compuesto del 6 % anual en su cuenta de ahorro con la condición de que cada año ingreses 1000 €.

Si aceptas la oferta y retiras tu dinero a los 5 años, ¿cuánto dinero deberá entregarte el banco?

1º año: $1000 \cdot 1,06 = 1060$ euros

2º año: $2060 \cdot 1,06 = 2183,6$ euros

3º año: $3183,6 \cdot 1,06 = 3374,616$ euros

4º año: $4374,616 \cdot 1,06 = 4637,09296$ euros

5º año: $5637,09296 \cdot 1,06 = 5975,32$ euros

- 40 Halla el capital final en que se convierten 750 € en cuatro años a un interés simple del 12 %. ¿Y si el interés que se aplica es compuesto?

$$\text{Interés simple: } C_F = 750 \left(1 + \frac{12 \cdot 4}{100} \right) = 1110 \text{ €}$$

$$\text{Interés compuesto: } C_F = 750 \cdot (1 + 0,12)^4 = 1180,14 \text{ €}$$

- 41 ¿A qué tanto por ciento anual hay que colocar 50 000 € para que se conviertan en 182 124 euros al cabo de 15 años?

$$182\,124 = 50\,000(1 + x)^{15} \Rightarrow x = \sqrt[15]{\frac{182\,124}{50\,000}} - 1 = 0,09$$

Al 9 % anual

- 42 ¿Cuántos años debe estar impuesto un capital si a un interés compuesto del 5 % anual se convierte en 1,25 veces el capital depositado inicialmente?

$$1,25C_i = C_i(1 + 0,05)^t \Rightarrow t = \frac{\log 1,25}{\log 1,05} = 4,57$$

Cuatro años y medio, aproximadamente

- 43 ¿A qué tanto por ciento debe colocarse un capital cualquiera para duplicarlo en 15 años?

$$2C_i = C_i(1 + r)^{15} \Rightarrow r = \sqrt[15]{2} - 1 = 0,047$$

Debe imponerse al 4,7 %.