

DESAFÍO

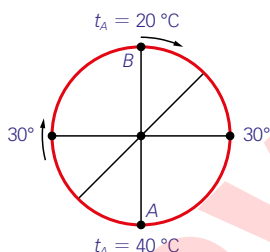
Al otro lado del mundo

La temperatura en algún punto del ecuador y en sus antípodas coincide justo a las 12:00 h.

En principio es sorprendente, pero pensándolo un poco parece algo común; de hecho, en este mismo instante hay dos puntos antipodales sobre el ecuador que presentan la misma temperatura.

¿Cierto o falso?

Consideramos dos puntos A y B diametralmente opuestos. Partimos de la premisa de que la función temperatura en la superficie terrestre es una función continua. Entonces, la función temperatura es continua en cada punto del intervalo $[A, B]$, de tal manera que la función temperatura toma todos los valores comprendidos entre ambas temperaturas al menos una vez.



Si, por ejemplo, la temperatura en A es de 40°C y en B es de 20°C , sabemos que en los puntos del arco que va desde B hasta A en el sentido de las agujas del reloj, la temperatura tomará todos los valores intermedios entre 20°C y 40°C . De la misma manera ocurre en todos los puntos del arco que va desde A hasta B . Como hay infinitos puntos, en algún momento encontraremos dos con la misma temperatura que estén en las antípodas el uno del otro.

Por tanto, desde un punto de vista matemático podríamos responder que es cierto. Aunque desde un punto de vista geofísico, deberíamos responder que no lo es, ya que no es tan simple asumir que la función temperatura en la superficie terrestre es una función continua. Sabemos que en la superficie terrestre suceden saltos de temperatura bruscos: con el paso de un frente, al llegar a un acantilado, al pasar de la tierra al mar, etc.

PIENSA

PÁG. 264. Si $f(x) = \operatorname{tg} x$, $g(x) = \operatorname{sen} x$ y $h(x) = \operatorname{cos} x$, comprueba que es cierta la siguiente igualdad.

$$f'(x) = \left(\frac{g(x)}{h(x)} \right)'$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ \left(\frac{g(x)}{h(x)} \right)' &= \frac{\cos x \cos x - \operatorname{sen} x (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

PÁG. 265. Deriva la función $f(x) = \ln x^n$, donde $n \in \mathbb{N}$.

- Aplicando la regla de la cadena.
- Aplicando primero las propiedades de los logaritmos.

$$\text{a) } f'(x) = \frac{1}{x^n} nx^{n-1} = nx^{n-1-n} = nx^{-1} = \frac{n}{x}$$

$$\text{b) } f(x) = \ln x^n = n \ln x \rightarrow f'(x) = n \frac{1}{x} = \frac{n}{x}$$

ACTIVIDADES

- Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = x^2 - x + 3$ en los siguientes intervalos.

$[2, 3], [2, 4], [2, 5], [2, 6], [3, 5], [3, 6]$

$$T.V.M.([2, 3]) = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{9 - 5}{1} = 4$$

$$T.V.M.([2, 4]) = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{15 - 5}{2} = 5$$

$$T.V.M.([2, 5]) = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{23 - 5}{3} = 6$$

$$T.V.M.([2, 6]) = \frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{33 - 5}{4} = 7$$

$$T.V.M.([3, 5]) = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{23 - 9}{2} = 7$$

$$T.V.M.([3, 6]) = \frac{f(6) - f(3)}{6 - 3} = \frac{33 - 9}{3} = 8$$

- 2 Calcula la T.V.M. de la función $f(x) = x^2 - x + 3$ en los intervalos siguientes.

a) $[2, 2 + h]$

b) $[3, 3 + h]$

$$\begin{aligned} \text{a) T.V.M.}([2, 2 + h]) &= \frac{f(2 + h) - f(2)}{2 + h - 2} = \\ &= \frac{(2 + h)^2 - (2 + h) + 3 - (4 - 2 + 3)}{h} = \\ &= \frac{h^2 + 3h}{h} = h + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) T.V.M.}([3, 3 + h]) &= \frac{f(3 + h) - f(3)}{3 + h - 3} = \\ &= \frac{(3 + h)^2 - (3 + h) + 3 - (9 - 3 + 3)}{h} = \\ &= \frac{h^2 + 5h}{h} = h + 5 \end{aligned}$$

- 3 Utilizando la definición, calcula la derivada en $x = 2$ y en $x = -1$ de estas funciones.

a) $f(x) = x + 1$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$

b) $f(x) = \frac{1}{x - 3}$

e) $f(x) = 5x^3$

c) $f(x) = 2x^2 + x$

f) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

$$\begin{aligned} \text{a) } f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 + h + 1 - (2 + 1)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1 \\ f'(-1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1 + h) - f(-1)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1 + h + 1 - (-1 + 1)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2 + h - 3} - \frac{1}{2 - 3}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h - 1} = -1 \end{aligned}$$

$$f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1 + h) - f(-1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{-1 + h - 3} - \frac{1}{-1 - 3}}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{4(h - 4)} = \frac{-1}{16}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(2 + h)^2 + 2 + h - (2 \cdot 2^2 + 2)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(4 + h^2 + 4h) + 2 + h - 10}{h} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2 + 9h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2h + 9 = 9$$

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1 + h) - f(-1)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(1 + h^2 - 2h) - 1 + h - 1}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2 - 3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2h - 3 = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2 + h} - \frac{1}{2}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{2h(2 + h)} = \frac{-1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1 + h) - f(-1)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{-1 + h} - \frac{1}{-1}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{-h(-1 + h)} = \frac{-1}{1} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(2 + h)^3 - 5 \cdot 2^3}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{60h + 30h^2 + 5h^3}{h} = 60 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1 + h) - f(-1)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(-1 + h)^3 - 5 \cdot (-1)^3}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{15h - 15h^2 + 5h^3}{h} = 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f) \quad f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(2+h)^2} - \frac{1}{2^2}}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 - (4+h^2+4h)}{4h(2+h)^2} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 - 4h}{4h(2+h)^2} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h - 4}{16 + 16h + 4h^2} = \frac{-1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f'(-1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(-1+h)^2} - \frac{1}{(-1)^2}}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - (1+h^2-2h)}{h(-1+h)^2} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 + 2h}{h(-1+h)^2} = \frac{2}{1} = 2
 \end{aligned}$$

- 4 Calcula la derivada de la función $f(x) = x^3 + 4$ en los siguientes puntos.

a) $x = 1$ c) $x = -4$ e) $x = 2$
 b) $x = 0$ d) $x = -\frac{1}{3}$ f) $x = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned}
 a) \quad f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^3 + 4 - (1^3 + 4)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h^2 + 3h + h^3}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (3h + 3 + h^2) = 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(0+h)^3 + 4 - (0^3 + 4)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} h^2 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c) \quad f'(-4) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-4+h)^3 + 4 - [(-4)^3 + 4]}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (h^2 - 12h + 48) = 48
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d) \quad f'\left(-\frac{1}{3}\right) &= \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(-\frac{1}{3} + h\right)^3 + 4 - \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 4\right)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(h^2 + \frac{1}{3} - h\right) = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e) \quad f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3 + 4 - (2^3 + 4)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8 + h^3 + 6h^2 + 12h + 4 - 12}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (h^2 + 6h + 12) = 12
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f) \quad f'\left(\frac{1}{3}\right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{3} + h\right)^3 + 4 - \left(\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 4\right)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(h^2 + \frac{1}{3} + h\right) = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

- 5 Calcula la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = x - x^2$ en los puntos de abscisa $x = 2$ y $x = -3$.

$$\begin{aligned}
 f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[2+h - (2+h)^2] - (2 - 2^2)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2+h - (4+4h+h^2) - 2+4}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3h - h^2}{h} = -3
 \end{aligned}$$

$$f(2) = 2 - 2^2 = -2$$

La ecuación de la recta tangente en el punto $P(2, -2)$ es:

$$\begin{aligned}
 y - (-2) &= f'(2) \cdot (x - 2) \rightarrow \\
 \rightarrow y + 2 &= -3(x - 2) \rightarrow y = -3x + 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f'(-3) &= \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-3+h) - (-3+h)^2 + 3 - (-3)^2}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3+h - (9+h^2-6h) + 12}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 + 7h}{h} = 7
 \end{aligned}$$

$$f(-3) = -3 - (-3)^2 = -12$$

La ecuación de la recta tangente en el punto $P(-3, -12)$ es:

$$\begin{aligned}
 y - (-12) &= f'(-3) \cdot (x - (-3)) \rightarrow \\
 \rightarrow y + 12 &= 7(x + 3) \rightarrow \\
 \rightarrow y &= 7x + 9
 \end{aligned}$$

- 6 Halla la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 4x + 3$ en los puntos donde corta a los ejes X e Y.

Cortes con el eje X: $(-1, 0)$, $(-3, 0)$

La pendiente de la recta tangente en el punto $P(a, f(a))$ es la derivada $f'(a)$.

$$f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = 2$$

$$f'(-3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 2h}{h} = -2$$

Corte con el eje Y: (0, 3)

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 4h + 3 - 3}{h} = 4$$

- 7 Utiliza la definición para calcular la función derivada de estas funciones.

a) $f(x) = 4x^3$

b) $f(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} \text{a) } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(x+h)^3 - 4x^3}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - 4x^3}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12x^2h + 12xh^2 + 4h^3}{h} = 12x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x - x - h}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = \frac{-1}{x^2} \end{aligned}$$

- 8 Halla las derivadas segunda y tercera de las siguientes funciones.
¿Qué observas?

a) $f(x) = x^3$

b) $f(x) = x^2$

c) $f(x) = x$

$$\begin{aligned} \text{a) } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = 3x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)^2 - 3x^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 3x^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6xh + 3h^2}{h} = 6x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x+h) - f''(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6(x+h) - 6x}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6x + 6h - 6x}{h} = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h) - 2x}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x + 2h - 2x}{h} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x+h) - f''(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 - 2}{h} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x + h - x}{h} = 1 \end{aligned}$$

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-1}{h} = 0$$

$$f'''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x+h) - f''(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

Cada vez que derivamos baja un grado el polinomio.

9 Calcula la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$

b) $f(x) = \frac{1}{x} + x$

a) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 2xh + h^2 - h}{h} =$$

$$= 3x^2 + 2x - 1$$

b) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} + h - \frac{1}{x}}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hx^2 + h^2x - h}{h(x+h)x} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + hx - 1}{(x+h)x} = \frac{x^2 - 1}{x^2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{x^2}$$

10 Halla la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$

b) $f(x) = 7\sqrt{x} - 3\sqrt{x^3}$

a) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h}{(x+h+2)(x+2)}}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(x+h+2)(x+2)} =$$

$$= \frac{1}{(x+2)^2}$$

b) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$

$$= \frac{27x^2 - 84x + 49}{2\sqrt{x}(7-3x)} =$$

$$= \frac{-(3x-7)(9x-7)}{2\sqrt{x}(7-3x)} =$$

$$= \frac{7-9x}{2\sqrt{x}} = \frac{7}{2\sqrt{x}} - \frac{9}{2}\sqrt{x}$$

11 Halla la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = 6$ b) $f(x) = x^4$ c) $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$

a) $f'(x) = 0$

b) $f'(x) = 4x^{4-1} = 4x^3$

c) $f(x) = \sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{4}}$

$$f'(x) = \frac{3}{4} x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$$

12 Calcula la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = \sqrt[7]{x^4}$ b) $f(x) = x^8$ c) $f(x) = \frac{1}{x^4}$

a) $f(x) = x^{\frac{4}{7}} \rightarrow$

$$\rightarrow f'(x) = \frac{4}{7} x^{\frac{4}{7}-1} = \frac{4}{7} x^{-\frac{3}{7}} = \frac{4}{7\sqrt[7]{x^3}}$$

b) $f'(x) = 8x^{8-1} = 8x^7$

c) $f(x) = x^{-4} \rightarrow$

$$\rightarrow f'(x) = -4x^{-4-1} = -4x^{-5} = \frac{-4}{x^5}$$

13 Calcula la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = 2^x$ b) $f(x) = 3^x$ c) $f(x) = \log_2 x$

a) $f'(x) = 2^x \ln 2$

b) $f'(x) = 3^x \ln 3$

c) $f'(x) = \frac{1}{x \ln 2}$

14 Obtén la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = \operatorname{tg} x + \cos x$

b) $f(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x$

a) $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \operatorname{sen} x$

b) $f'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x}$

15 Identifica las funciones que forman el producto de estas funciones y, después, halla su derivada.

a) $f(x) = x \cdot \sqrt[3]{x^2}$

b) $f(x) = x \cdot e^x$

c) $f(x) = x \cdot \sin x$

d) $f(x) = x \cdot \ln x$

e) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

f) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$

g) $f(x) = (x^2 + 2x) \cdot \sin x$

h) $f(x) = (e^x - x) \cdot \ln x$

a) $f'(x) = 1 \cdot \sqrt[3]{x^2} + x \cdot \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} =$
 $= \sqrt[3]{x^2} + \frac{2\sqrt[3]{x^2}}{3} = \frac{5}{3} \sqrt[3]{x^2}$

b) $f'(x) = e^x + x \cdot e^x$

c) $f'(x) = \sin x + x \cdot \cos x$

d) $f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

e) $f'(x) = \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x) =$
 $= \cos^2 x - \sin^2 x$

f) $f(x) = (x^2 + 1) \cdot \frac{1}{x} \rightarrow$
 $\rightarrow f'(x) = 2x \cdot \frac{1}{x} + (x^2 + 1) \cdot \frac{-1}{x^2} =$
 $= 2 - 1 - \frac{1}{x^2} = 1 - \frac{1}{x^2}$

g) $f'(x) = (2x + 2) \sin x + (x^2 + 2x) \cos x$

h) $f'(x) = (e^x - 1) \ln x + \frac{e^x - x}{x}$

16 Calcula la derivada de estas funciones que son a su vez un producto de funciones.

a) $f(x) = 3x^2 \cdot \log_2 x$

b) $f(x) = e^x \cdot \sin x$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \cos x$

d) $f(x) = \cos x \cdot \operatorname{tg} x$

e) $f(x) = 4x \cdot \sin x + x^3 \cdot \cos x$

f) $f(x) = \ln x \cdot \frac{1}{x^4} + x^2 \cdot e^x$

g) $f(x) = (\sin x - \cos x) \cdot \operatorname{tg} x$

h) $f(x) = 4x\sqrt{x} + \frac{\sin x}{x}$

a) $f'(x) = 6x \cdot \log_2 x + 3x^2 \cdot \frac{1}{x \ln 2} =$
 $= 6x \log_2 x + \frac{3x}{\ln 2}$

b) $f'(x) = e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x =$
 $= e^x (\sin x + \cos x)$

c) $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \cos x - \sqrt[3]{x} \sin x$

d) $f'(x) = -\sin x \cdot \operatorname{tg} x + \cos x \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x) =$
 $= -\sin x \cdot \operatorname{tg} x + \cos x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} =$
 $= \frac{-\sin^2 x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x} = \cos x$

e) $f'(x) = 4 \sin x + 4x \cos x + 3x^2 \cos x -$
 $- x^3 \sin x =$
 $= (4 - x^3) \sin x + (4x + 3x^2) \cos x$

f) $f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^4} + \ln x \cdot \frac{-4}{x^5} + 2x \cdot e^x +$
 $+ x^2 \cdot e^x = \frac{1}{x^5} (1 - 4 \ln x) + x e^x (2 + x)$

g) $f'(x) = (\cos x + \sin x) \operatorname{tg} x +$
 $+ (\sin x - \cos x) (1 + \operatorname{tg}^2 x)$

h) $f'(x) = 4 \cdot \sqrt{x} + 4x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{\cos x}{x} -$
 $- \frac{\sin x}{x^2} = 6\sqrt{x} + \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}$

17 Calcula la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{3x + 4}$ b) $f(x) = \frac{x^2 + x - 3}{x + 1}$

a) $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} (3x + 4) - \sqrt{x} \cdot 3}{(3x + 4)^2} =$
 $= \frac{-3x + 4}{2\sqrt{x} (3x + 4)^2}$

b) $f'(x) = \frac{(2x + 1)(x + 1) - (x^2 + x - 3) \cdot 1}{(x + 1)^2} =$
 $= \frac{x^2 + 2x + 4}{(x + 1)^2}$

18 Halla la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\cos x}$ b) $f(x) = \frac{\sin x + 2x}{x - 3}$

a) $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \cos x - \sqrt{x} \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} =$
 $= \frac{\cos x + 2x \sin x}{2\sqrt{x} \cos^2 x}$

$$\begin{aligned} \text{b) } f'(x) &= \frac{(\cos x + 2)(x - 3) - (\sin x + 2x)}{(x - 3)^2} = \\ &= \frac{(x - 3) \cos x - 6 - \sin x}{(x - 3)^2} \end{aligned}$$

- 19 Calcula la derivada de las funciones que aparecen a continuación.

$$\text{a) } f(x) = \sqrt{x^2 + x} \quad \text{c) } f(x) = \ln 4x$$

$$\text{b) } f(x) = \arcsen^3 x \quad \text{d) } f(x) = 2^{3x}$$

$$\text{a) } f'(x) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$$

$$\text{b) } f'(x) = \frac{3(\arcsen x)^2}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\text{c) } f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\text{d) } f'(x) = 2^{3x} \cdot \ln 2 \cdot 3$$

- 20 Calcula la derivada de estas funciones.

$$\text{a) } f(x) = \cos^2 x$$

$$\text{b) } f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{x - 5}\right)$$

$$\text{c) } f(x) = e^{x^2 + 7x - 4}$$

$$\text{d) } f(x) = \log_2 5x$$

$$\text{a) } f'(x) = -2 \cos x \sin x$$

$$\text{b) } f'(x) = \frac{-5}{\cos^2\left(\frac{x}{x - 5}\right)} \cdot \frac{1}{(x - 5)^2}$$

$$\text{c) } f'(x) = e^{x^2 + 7x - 4} \cdot (2x + 7)$$

$$\text{d) } f'(x) = \frac{1}{5x \cdot \ln 2} \cdot 5 = \frac{1}{x \ln 2}$$

PRACTICA

- 21 Halla el valor de m en la función

$$f(x) = \frac{3x + m}{mx^2} \text{ sabiendo que } f'(-1) = 5.$$

$$f'(x) = \frac{3 \cdot mx^2 - (3x + m) \cdot 2mx}{m^2 x^4}$$

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \frac{3m + 2m \cdot (-3 + m)}{m^2} = \\ &= \frac{-3m + 2m^2}{m^2} = -\frac{3}{m} + 2 = \\ &= 5 \rightarrow m = -1 \end{aligned}$$

- 22 Estudia si es derivable

$$f(x) = \begin{cases} kx + 2 & \text{si } x < -1 \\ x^3 - x + k & \text{si } x \geq -1 \end{cases} \text{ en } x = -1$$

según los valores de k .

Una condición necesaria para que una función sea derivable en un punto es que sea continua en él. Así que primero analizamos si la función es continua en $x = -1$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= -k + 2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= k \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow -k + 2 = k \rightarrow k = 1$$

$f(x)$ solo es continua para $k = 1$, por tanto, solo puede ser derivable para este valor.

Analizamos la derivabilidad para este valor.

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1 \\ 3x^2 - 1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) &= 2 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ no es derivable para ningún valor de k .

- 23 Determina la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = \sen 2x - \cos x$ en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{3}$.

$$f'(x) = 2 \cos 2x + \sen x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cos \frac{2\pi}{3} + \sen \frac{\pi}{3} =$$

$$= 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sen \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

La ecuación de la recta tangente en el punto

$$P\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right) \text{ es:}$$

$$y - \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right) = \left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)x + \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}\pi}{6} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

- 24 Determina la ecuación de la recta tangente a la función de ecuación $f(x) = x^2 - x$ en los puntos en los que su gráfica corta el eje de abscisas.

$$f'(x) = 2x - 1$$

$$x^2 - x = 0 \rightarrow x(x - 1) = 0 \rightarrow x = 0 \quad x = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(1) = 1 \\ f(1) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow y - 0 = 1(x - 1) \rightarrow y = x - 1$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(0) = -1 \\ f(0) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow y - 0 = -1(x - 0) \rightarrow y = -x$$

- 25** Determina las tangentes de la función $f(x) = x^3 - 3x$ que tengan pendiente $m = 0$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \rightarrow f(-1) = 2 \\ x = 1 \rightarrow f(1) = -2 \end{cases}$$

Entonces las rectas tangentes son:

$$y + 2 = 0(x - 1) \rightarrow y = -2$$

$$y - 2 = 0(x + 1) \rightarrow y = 2$$

- 26** Halla las rectas tangentes a la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ en el punto de abscisa $x = \frac{12}{5}$.

Para un valor concreto de abscisa, la elipse tendrá dos rectas tangentes:

$$y = \pm \sqrt{4\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)}$$

$$f_1(x) = \sqrt{4\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)} \rightarrow f_1\left(\frac{12}{5}\right) = \frac{6}{5}$$

$$\begin{aligned} f'_1(x) &= \frac{1}{2\sqrt{4\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)}} \cdot \frac{-8x}{9} = \\ &= -\frac{4x}{9\sqrt{4\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)}} \rightarrow f'_1\left(\frac{12}{5}\right) = -\frac{8}{9} \end{aligned}$$

La ecuación de la recta tangente en el punto

$$P\left(\frac{12}{5}, \frac{6}{5}\right) \text{ es:}$$

$$y - \frac{6}{5} = -\frac{8}{9}\left(x - \frac{12}{5}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow y = -\frac{8}{9}x + \frac{96}{45} + \frac{6}{5} \rightarrow$$

$$\rightarrow y = -\frac{8}{9}x + \frac{10}{3}$$

$$f_2(x) = -\sqrt{4\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)} \rightarrow f_2\left(\frac{12}{5}\right) = -\frac{6}{5}$$

$$f'_2(x) = \frac{4x}{9\sqrt{4\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)}} \rightarrow f'_2\left(\frac{12}{5}\right) = \frac{8}{9}$$

La ecuación de la recta tangente en el punto

$$P\left(\frac{12}{5}, -\frac{6}{5}\right) \text{ es:}$$

$$y + \frac{6}{5} = \frac{8}{9}\left(x - \frac{12}{5}\right) \rightarrow y = \frac{8}{9}x - \frac{10}{3}$$

- 27** Halla la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = (4x^2 + 5x - 2)^3$

b) $f(x) = \sqrt[5]{\sin x}$

c) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}^3 x}$

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 7x - 12}}$

a) $f'(x) = 3(4x^2 + 5x - 2)^2(8x + 5)$

b) $f'(x) = \frac{1}{5} \sin^{-\frac{4}{5}} x \cdot \cos x = \frac{\cos x}{5\sqrt[5]{\sin^4 x}}$

c) $f'(x) = -\frac{3}{\operatorname{tg}^4 x} (1 + \operatorname{tg}^2 x)$

d) $f'(x) = \frac{-1}{3} (x^2 - 7x - 12)^{-\frac{4}{3}} \cdot (2x - 7) =$

$$= \frac{7 - 2x}{3\sqrt[3]{(x^2 - 7x - 12)^4}}$$

- 28** Calcula la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = 5^{3x^2 - 2x + 1}$

b) $f(x) = 7^{\cos x^2}$

a) $f'(x) = 5^{3x^2 - 2x + 1} \ln 5 \cdot (6x - 2)$

b) $f'(x) = 7^{\cos x^2} \ln 7 \cdot 2x \cdot (-\sin x^2) =$

$$= -7^{\cos x^2} \ln 7 \cdot 2x \sin x^2$$

- 29** Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \ln(\sqrt{2x})$

c) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$

b) $f(x) = \ln(3 \cos x)$

d) $f(x) = \ln(\ln(x^2))$

a) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2 = \frac{1}{2x}$

b) $f'(x) = \frac{1}{3 \cos x} \cdot (-3 \sin x) = -\operatorname{tg} x$

c) $f'(x) = \frac{1}{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{-2}{x^3} = \frac{-2}{x}$

$$d) f'(x) = \frac{1}{\ln(x^2)} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{1}{x \ln x}$$

- 30 Calcula la derivada de estas funciones.

$$a) f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - 5\right) \quad b) f(x) = \cos \sqrt{x}$$

$$a) f'(x) = \frac{1}{2 \cos^2\left(\frac{x}{2} - 5\right)}$$

$$b) f'(x) = \frac{-\operatorname{sen} \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

- 31 Calcula la derivada de las siguientes funciones.

$$a) f(x) = (x+1)^{2x} \quad b) f(x) = (x^2+1)^{x^2}$$

$$a) \ln f(x) = \ln (x+1)^{2x} = 2x \ln (x+1)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2 \ln (x+1) + \frac{2x}{x+1}$$

$$f'(x) = \left(2 \ln (x+1) + \frac{2x}{x+1}\right)(x+1)^{2x}$$

$$b) \ln f(x) = \ln (x^2+1)^{x^3} = x^3 \ln (x^2+1)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 3x^2 \ln (x^2+1) + x^3 \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x =$$

$$= 3x^2 \ln (x^2+1) + \frac{2x^4}{x^2+1}$$

$$f'(x) = \left(3x^2 \ln (x^2+1) + \frac{2x^4}{x^2+1}\right) \cdot (x^2+1)^{x^3}$$

- 32 Calcula la derivada de las siguientes funciones.

$$a) f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{sen}(x^3+x)$$

$$b) f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$a) f'(x) = \frac{3x^2+1}{\sqrt{1-(x^3+x)^2}}$$

$$b) f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{x^2+1}$$

- 33 Define, en cada caso, $f(x)$ como una composición de funciones y calcula su derivada.

$$a) f(x) = e^{\operatorname{sen} x^2}$$

$$b) f(x) = \sqrt[3]{\ln \sqrt{x}}$$

$$a) \left. \begin{array}{l} g(x) = e^x \\ h(x) = \operatorname{sen} x^2 \end{array} \right\} \rightarrow f(x) = (g \circ h)(x)$$

$$f'(x) = 2x \cos x^2 e^{\operatorname{sen} x^2}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} g(x) = \sqrt{\ln x} \\ h(x) = \sqrt[3]{x} \end{array} \right\} \rightarrow f(x) = (g \circ h)(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln \sqrt[3]{x}}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} =$$

$$= \frac{1}{6x\sqrt{\ln \sqrt[3]{x}}}$$

ACTIVIDADES FINALES

1. Calcula e interpreta la derivada de la función en un punto

Tasa de variación media

ACTIVIDADES FLASH

- 34 Calcula la tasa de variación media de estas funciones en el intervalo $[0, 2]$.

$$a) f(x) = x$$

$$d) f(x) = 3x$$

$$b) f(x) = 5x - 4$$

$$e) f(x) = -2x + 1$$

$$c) f(x) = \frac{3x}{2} - 2 \quad f) f(x) = 6 - \frac{2}{5}x$$

$$a) T.V.M.([0, 2]) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} =$$

$$= \frac{2 - 0}{2} = 1$$

$$b) T.V.M.([0, 2]) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} =$$

$$= \frac{6 - (-4)}{2} = 5$$

$$c) T.V.M.([0, 2]) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} =$$

$$= \frac{1 - (-2)}{2} = \frac{3}{2}$$

$$d) T.V.M.([0, 2]) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} =$$

$$= \frac{6 - 0}{2} = 3$$

$$\begin{aligned} \text{e) } T.V.M.([0, 2]) &= \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \\ &= \frac{-3 - 1}{2} = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } T.V.M.([0, 2]) &= \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \\ &= \frac{\frac{26}{5} - 6}{2} = \frac{-2}{5} \end{aligned}$$

- 36 Determina la tasa de variación media de la función $y = x^2 - 2x + 6$ en el intervalo $[1, 3]$.

$$T.V.M.([1, 3]) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{9 - 5}{2} = 2$$

- 37 ¿Cuál es la tasa de variación media de la función $f(x) = \frac{12}{x}$ en el intervalo $[1, 4]$?

$$\begin{aligned} T.V.M.([1, 4]) &= \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{3 - 12}{3} = \\ &= -3 \end{aligned}$$

- 37 Determina la tasa de variación media de cada función en los intervalos indicados.

a) $f(x) = x$ en $[-1, 1]$

b) $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 5$ en $[3, 4]$

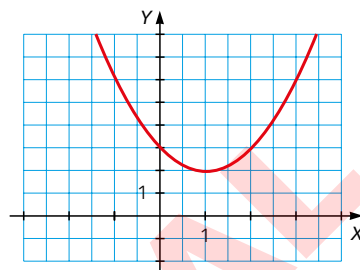
c) $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

a) $T.V.M.([-1, 1]) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} =$
 $= \frac{1 - (-1)}{2} = 1$

b) $T.V.M.([3, 4]) = \frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} =$
 $= 7 - \frac{7}{4} = \frac{21}{4}$

c) $T.V.M.\left(\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]\right) = \frac{f(\pi) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi - \frac{\pi}{2}} =$
 $= \frac{0 - 1}{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$

- 38 Calcula la tasa de variación media en los intervalos indicados para la siguiente función.



- a) $[1, 2]$ b) $[1, 3]$ c) $[2, 3]$

a) $T.V.M.([1, 2]) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{3 - 2}{1} = 1$

b) $T.V.M.([1, 3]) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{6 - 2}{2} = 2$

c) $T.V.M.([2, 3]) = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{6 - 3}{1} = 3$

- 39 Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = 2x^2 - x$ en el intervalo $[2, 2 + h]$.

Utiliza el resultado para determinar la tasa de variación media de la función en los intervalos que aparecen a continuación.

- a) $[2, 3]$ b) $[2, 5]$ c) $[2, 8]$ d) $[2, 10]$

$$\begin{aligned} T.V.M.([2, 2 + h]) &= \frac{f(2 + h) - f(2)}{2 + h - 2} = \\ &= \frac{2(2 + h)^2 - (2 + h) - 6}{h} = \\ &= \frac{8 + 8h + 2h^2 - 2 - h - 6}{h} = 7 + 2h \end{aligned}$$

a) $T.V.M.([2, 3]) = 7 + 2 \cdot 1 = 9$

b) $T.V.M.([2, 5]) = 7 + 2 \cdot 3 = 13$

c) $T.V.M.([2, 8]) = 7 + 2 \cdot 6 = 19$

d) $T.V.M.([2, 10]) = 7 + 2 \cdot 8 = 23$

- 40 Calcula el valor que debe tener a para que la tasa de variación media de la función $f(x) = 2x^2 + ax - 5$ en el intervalo $[0, 2]$ sea 1.

$$\begin{aligned} T.V.M.([0, 2]) &= \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{3 + 2a - 5}{2} = \\ &= 4 + a = 1 \rightarrow a = -3 \end{aligned}$$

- 41 **INVENTA.** Escribe dos funciones polinómicas de segundo grado que pasen por los puntos (0, 4) y (3, 10). Comprueba que la tasa de variación media en el intervalo [0, 3] es la misma para ambas funciones.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

La función es de la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Como la gráfica pasa por el punto (0, 4), se verifica que: $c = 4$

Al pasar también por el punto (3, 10), se cumple que:

$$9a + 3b + 4 = 10 \rightarrow 3a + b = 2$$

Si tomamos los valores $a = 1$ y $b = -1$,

las funciones son $f(x) = x^2 - x + 4$

y $g(x) = 2x^2 - 4x + 4$.

La tasa de variación media para $f(x)$ es:

$$T.V.M.([0, 3]) = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{10 - 4}{3} = 2$$

La tasa de variación media para $g(x)$ es:

$$T.V.M.([0, 3]) = \frac{g(3) - g(0)}{3 - 0} = \frac{10 - 4}{3} = 2$$

Derivada en un punto

- 42 Aplica la definición de derivada para calcular las derivadas de las funciones en los puntos que se indican.

a) $f(x) = 3x - 1$ en $x = 2$

b) $f(x) = x^2 + x$ en $x = 3$

c) $f(x) = \frac{4x + 3}{2}$ en $x = -1$

d) $f(x) = \frac{6}{x}$ en $x = 1$

e) $f(x) = (x - 1)^2$ en $x = -2$

f) $f(x) = x^3 + 5$ en $x = 0$

$$\begin{aligned} \text{a) } f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(2+h) - 1 - 5}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6 + 3h - 6}{h} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 + 3 + h - 12}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 + 6h + h^2 + h - 9}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (7 + h) = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } f'(-1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{4(-1+h) + 3}{2} + \frac{1}{2}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4 + 4h + 3 + 1}{2h} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{6}{1+h} - 6}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6 - 6 - 6h}{h(1+h)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-6}{1+h} = -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } f'(-2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2+h-1)^2 - 9}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 - 6h + h^2 - 9}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (-6 + h) = -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + 5 - 5}{h} = 0 \end{aligned}$$

- 43 Calcula, utilizando la definición de derivada en un punto, $f'(2)$ y $f'(0)$ para la siguiente función.

$$f(x) = 2x^2 - x + 3$$

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(2+h)^2 - (2+h) + 3 - 9}{h} = \\ &= \frac{7h + 2h^2}{h} = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2 - h + 3 - 3}{h} = \\ &= \frac{-h + 2h^2}{h} = -1 \end{aligned}$$

- 44 Si $f(x) = \frac{x+6}{3}$, determina a partir de la definición de derivada en un punto $f'(-3)$ y $f'(2)$.

$$\begin{aligned} f'(-3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{(-3+h)+6}{3} - 1}{h} = \\ &= \frac{h}{3h} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{(2+h)+6}{3} - \frac{8}{3}}{h} = \\ &= \frac{h}{3h} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

- 45 **INVESTIGA.** Obtén, aplicando la definición, la función derivada de $f(x) = x^2 - 2x + 4$.

- a) ¿En qué punto la derivada vale 0?
b) ¿Hay dos puntos diferentes con la misma derivada?

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2xh - 2h}{h} = 2x - 2 \end{aligned}$$

- a) $2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1$
La derivada vale 0 en $x = 1$.
b) $2x - 2 = 2y - 2 \rightarrow x = y$
Por tanto, no hay dos puntos diferentes con la misma derivada.

- 46 Calcula la tasa de variación media de la función $f(x) = 2x^2 - 2x + 3$ en el intervalo $[1, 1+h]$.

- a) Utiliza el resultado para determinar la tasa de variación media en los intervalos $[1, 3]$, $[1, 5]$ y $[1, 8]$.
b) Calcula el límite cuando h tiende a cero de la tasa de variación media en el intervalo $[1, 1+h]$ y comprueba que equivale a $f'(1)$.

$$\begin{aligned} T.V.M. ([1, 1+h]) &= \frac{f(1+h) - f(1)}{1+h-1} = \\ &= \frac{2(1+h)^2 - 2(1+h) + 3 - 3}{h} = \\ &= \frac{2+4h+2h^2-2-2h}{h} = 2h+2 \end{aligned}$$

- a) $T.V.M. ([1, 3]) = 2 \cdot 2 + 2 = 6$
 $T.V.M. ([1, 5]) = 2 \cdot 4 + 2 = 10$
 $T.V.M. ([1, 8]) = 2 \cdot 7 + 2 = 16$

b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{1+h-1} = \lim_{h \rightarrow 0} (2h+2) = 2$
 $f'(x) = 4x - 2 \rightarrow f'(1) = 2$

- 47 **INVENTA.** Escribe una función tal que su derivada en todos los puntos sea:

- a) 5
b) 3
c) -4
d) $\frac{2}{3}$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

- a) $f(x) = 5x$
b) $f(x) = 3x$
c) $f(x) = -4x$
d) $f(x) = \frac{2}{3}x$

- 48 Considerando la función $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + x - 6$, calcula lo siguiente.

- a) $f'(x)$
b) $f'(3)$, $f'(-2)$ y $f'(0)$
c) $f'(4-8)$ y $f'(4) - f'(8)$. ¿Son iguales?
a) $f'(x) = 12x^3 - 15x^2 + 1$
b) $f'(3) = 190$
 $f'(-2) = 155$
 $f'(0) = 1$

- c) $f'(4 - 8) = f'(-4) = -1007$
 $f'(4) - f'(8) = 529 - 5185 = -4656$
 No son iguales.

- 49 **INVENTA.** De una función $f(x)$ se sabe que $f(2) = 4$ y $f'(2) = 6$. Encuentra una posible expresión algebraica de la función $f(x)$.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$f(x) = 6x + c \rightarrow f'(x) = 6 \rightarrow f'(2) = 6$$

Si imponemos que:

$$f(2) = 4 \rightarrow 6 \cdot 2 + c = 4 \rightarrow c = -8$$

$$f(x) = 6x - 8$$

- 50 Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones en el punto indicado.

a) $f(x) = (x + 2)^2 - 1$ en $x = 2$

b) $f(x) = 5 - 2x$ en $x = 0$

c) $f(x) = \frac{7}{x - 4}$ en $x = 1$

d) $f(x) = \sqrt{2 - 3x}$ en $x = -1$

e) $f(x) = \frac{5}{\sqrt{x + 1}}$ en $x = 8$

a) $f'(x) = 2(x + 2) \rightarrow f'(2) = 8$

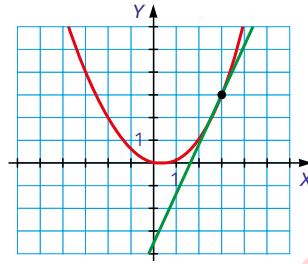
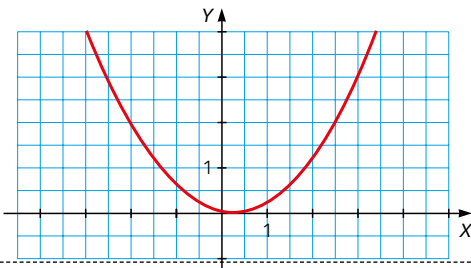
b) $f'(x) = -2 \rightarrow f'(0) = -2$

c) $f'(x) = \frac{-7}{(x - 4)^2} \rightarrow f'(1) = -\frac{7}{9}$

d) $f'(x) = \frac{-3}{2\sqrt{2 - 3x}} \rightarrow f'(-1) = -\frac{3}{2\sqrt{5}}$

e) $f'(x) = \frac{-5}{2\sqrt{x + 1}^3} \rightarrow f'(8) = -\frac{5}{54}$

- 51 Demuestra gráficamente que la derivada de esta función en el punto de abscisa 3 tiene un valor comprendido entre 2 y 3.

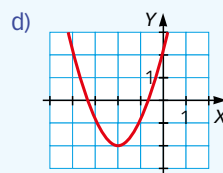
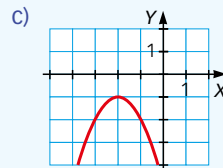
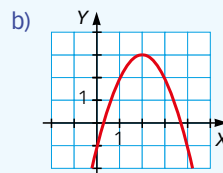
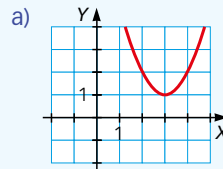


La derivada de la función en el punto $x = 3$ es la pendiente de la recta tangente. En su representación gráfica se observa que, por cada unidad en horizontal, el avance vertical está comprendido entre 2 y 3 unidades.

Interpretación geométrica de la derivada

ACTIVIDADES FLASH

- 52 Indica la ecuación de la recta tangente a los vértices de estas parábolas.



La pendiente en todos los vértices es $m = 0$.

a) $V(3, 1) \rightarrow y - 1 = 0(x - 3) \rightarrow y = 1$

b) $V(2, 3) \rightarrow y - 3 = 0(x - 2) \rightarrow y = 3$

c) $V(-2, -1) \rightarrow y + 1 = 0(x + 2) \rightarrow y = -1$

d) $V(-2, -2) \rightarrow y + 2 = 0(x + 2) \rightarrow y = -2$

- 53 Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto indicado.

a) $f(x) = 3x^2 - 1$ en $x = 1$

b) $f(x) = x^3$ en $x = 2$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x = -1$

a) $f'(x) = 6x \rightarrow f'(1) = 6$

$f(1) = 2$

$y - 2 = f'(1) \cdot (x - 1) \rightarrow$

$\rightarrow y - 2 = 6(x - 1) \rightarrow y = 6x - 4$

b) $f'(x) = 3x^2 \rightarrow f'(2) = 12$

$f(2) = 8$

$y - 8 = f'(2) \cdot (x - 2) \rightarrow$

$\rightarrow y - 8 = 12(x - 2) \rightarrow y = 12x - 16$

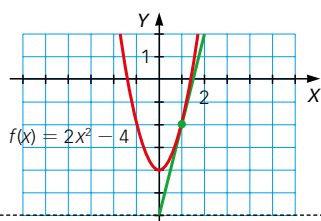
c) $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \rightarrow f'(-1) = -1$

$f(-1) = -1$

$y - (-1) = f'(-1) \cdot (x - (-1)) \rightarrow$

$\rightarrow y + 1 = -(x + 1) \rightarrow y = -x - 2$

- 54 Averigua la ecuación de la recta representada, que es tangente a la gráfica.



Tenemos que hallar la ecuación de la recta tangente a la curva en $x = 1$.

$f'(x) = 4x \rightarrow f'(1) = 4$ $f(1) = -2$

$y - (-2) = f'(1) \cdot (x - 1) \rightarrow$

$\rightarrow y + 2 = 4 \cdot (x - 1) \rightarrow y = 4x - 6$

- 55 Calcula la pendiente de las rectas tangentes a la curva $f(x) = x^2 - 4$ en los puntos de corte con los ejes X e Y .

$f'(x) = 2x$

La derivada $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente en el punto $P(a, f(a))$.

Cortes con el eje X : $(2, 0)$, $(-2, 0)$.

$f'(2) = 4$ $f'(-2) = -4$

Corte con el eje Y : $(0, -4)$.

$f'(0) = 0$

- 56 Encuentra, en cada caso, los puntos en los que la recta tangente a la curva $f(x)$ es horizontal.

a) $f(x) = x^3 + 3x^2$

b) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$

c) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x - 1$

La tangente a la curva $f(x)$ es horizontal cuando la pendiente de la recta tangente es cero, es decir, cuando la derivada es cero.

a) $f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2) = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = -2$

Es horizontal en los puntos $(0, 0)$ y $(-2, 4)$.

b) $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = -1$

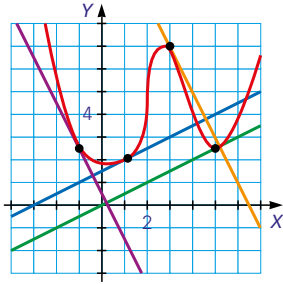
Es horizontal en el punto $(-1, -1)$.

c) $f'(x) = 3x^2 + 12x + 9 = 0 \rightarrow x_1 = -1, x_2 = -3$

Es horizontal en los puntos $(-1, -5)$ y $(-3, -1)$.

- 57 **INVENTA.** Dibuja la gráfica de una función cuyas rectas tangentes en $x = 1$ y $x = 5$ sean paralelas y sean perpendiculares a las rectas tangentes en $x = -1$ y $x = 3$.

Respuesta abierta. Por ejemplo:



- 58 Escribe la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función

$$f(x) = x^2 + 2x - 5.$$

- En el punto de abscisa 2.
- En el punto de abscisa -1 .
- En los puntos de ordenada -2 .
- En el punto de corte con el eje Y .

$$f'(x) = 2x + 2$$

- $f'(2) = 6$ $f(2) = 3$
 $y - 3 = 6 \cdot (x - 2) \rightarrow y = 6x - 9$
- $f'(-1) = 0$ $f(-1) = -6$
 $y - (-6) = 0 \rightarrow y = -6$
- $x^2 + 2x - 5 = -2 \rightarrow x_1 = 1 \quad x_2 = -3$
 $f'(1) = 4 \rightarrow y + 2 = 4(x - 1) \rightarrow$
 $\rightarrow y = 4x - 6$
 $f'(-3) = -4 \rightarrow y + 2 = -4(x + 3) \rightarrow$
 $\rightarrow y = -4x - 14$
- El punto de corte con el eje Y es $(0, -5)$:
 $f'(0) = 2 \rightarrow y - (-5) = 2x \rightarrow$
 $\rightarrow y = 2x - 5$

- 59 Sea $f(x) = x^3 + ax + b$, con $a \neq b$, se sabe que las rectas tangentes en los puntos $x = a$, $x = b$ son paralelas. Calcula $f(1)$.

$$f'(x) = 3x^2 + a$$

$$f'(a) = 3a^2 + a$$

$$f'(b) = 3b^2 + a$$

$$3a^2 + a = 3b^2 + a \rightarrow a = \pm b$$

$$\text{Como } a \neq b, a = -b.$$

$$f(1) = 1^3 + a \cdot 1 + b = 1 - b + b = 1.$$

- 60 **INVESTIGA.** ¿Cuál de las siguientes rectas es tangente a la función

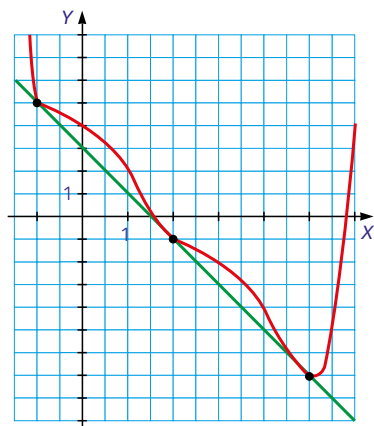
$$f(x) = x^2 - 3x + 1?$$

- $y = x + 1$
- $y = 2x + 3$
- $y = 3x - 8$
- $y = -2x - 1$
- $y = -3x$
- $y = 3x - 1$
- $y = x - 2$
- $y = 3 - 2x$

- $2x - 3 = 1 \rightarrow x = 2$
 $\left. \begin{array}{l} f(2) = -1 \\ y(2) = 3 \end{array} \right\} \rightarrow \text{No es tangente.}$
- $2x - 3 = 2 \rightarrow x = \frac{5}{2}$
 $\left. \begin{array}{l} f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{-1}{4} \\ y\left(\frac{5}{2}\right) = 8 \end{array} \right\} \rightarrow \text{No es tangente.}$
- $2x - 3 = 3 \rightarrow x = 3$
 $\left. \begin{array}{l} f(3) = 1 \\ y(3) = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Es tangente.}$
- $2x - 3 = -2 \rightarrow x = \frac{1}{2}$
 $\left. \begin{array}{l} f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{4} \\ y\left(\frac{1}{2}\right) = -2 \end{array} \right\} \rightarrow \text{No es tangente.}$
- $2x - 3 = -3 \rightarrow x = 0$
 $\left. \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{No es tangente.}$
- $2x - 3 = 3 \rightarrow x = 3$
 $\left. \begin{array}{l} f(3) = 1 \\ y(3) = 8 \end{array} \right\} \rightarrow \text{No es tangente.}$
- $2x - 3 = 1 \rightarrow x = 2$
 $\left. \begin{array}{l} f(2) = -1 \\ y(2) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{No es tangente.}$
- $2x - 3 = -2 \rightarrow x = \frac{1}{2}$
 $\left. \begin{array}{l} f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{4} \\ y\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \end{array} \right\} \rightarrow \text{No es tangente.}$

- 61 **INVENTA.** Sea $y = -2x + 3$ la recta tangente a $g(x)$ en los puntos $x = -1$, $x = 2$ y $x = 5$. Dibuja una posible gráfica de $g(x)$.

Respuesta abierta. Por ejemplo:



- 62 Escribe la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 2 + \ln x$ en el punto de abscisa 1.

$$f'(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f'(1) = 1 \quad f(1) = 2$$

$$y - 2 = 1 \cdot (x - 1) \rightarrow y = x + 1$$

- 63 Dadas la función $f(x) = -x^5 + 3x$ y la recta $r: y = -2x$, calcula.

- La pendiente de la recta r .
 - La derivada de la función $f(x)$.
 - Las coordenadas x de los puntos de $f(x)$ en los que su derivada y la pendiente de la recta coinciden.
 - Las coordenadas y de los puntos anteriores.
 - Las ecuaciones de las rectas paralelas a r que pasan por los puntos $P(x, y)$ calculados.
 - ¿Cómo son estas rectas respecto de la curva?
- $m = -2$
 - $f'(x) = -5x^4 + 3$
 - $-5x^4 + 3 = -2 \rightarrow x^4 = 1 \rightarrow x = \pm 1$
 - $y = f(1) = 2 \quad y = f(-1) = -2$

- $y - 2 = -2(x + 1)$
 $y + 2 = -2(x + 1)$
- Son tangentes a la curva en $x = 1$ y $x = -1$, respectivamente.

- 64 Determina las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x) = x^3$ paralelas a estas rectas.

$$y = -2x$$

$$a) y = x + 1$$

$$b) y = 3x - 2$$

$$a) f'(x) = 3x^2 = 1 \rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{27}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{27}$$

Las rectas tangentes son:

$$y - \frac{3\sqrt{3}}{27} = x - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y + \frac{3\sqrt{3}}{27} = x + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$b) 3x^2 = 3 \rightarrow x = \pm 1$$

$$f(1) = 1 \quad f(-1) = -1$$

Las rectas tangentes son:

$$y - 1 = 3(x - 1) \quad y + 1 = 3(x + 1)$$

- 65 Halla, en cada caso, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ que sea paralela a la recta $3x - y + 6 = 0$.

$$a) f(x) = x^2 + 4x - 2$$

$$b) f(x) = \frac{3x}{1-x}$$

$$c) f(x) = x^3 - 4$$

$$d) f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x}$$

$$y = 3x + 6 \rightarrow m = 3$$

$$a) f'(x) = 2x + 4 = 3 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{15}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow y - \left(-\frac{15}{4}\right) = 3\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow y = 3x - \frac{9}{4}$$

$$b) f'(x) = \frac{3(1-x) - 3x \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{3}{(1-x)^2} = 3 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$f(0) = 0 \rightarrow y = 3x$$

$$f(2) = -6 \rightarrow$$

$$\rightarrow y - (-6) = 3(x - 2) \rightarrow$$

$$\rightarrow y = 3x - 12$$

$$c) f'(x) = 3x^2 = 3 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$$f(1) = -3 \rightarrow$$

$$\rightarrow y - (-3) = 3(x - 1) \rightarrow$$

$$\rightarrow y = 3x - 6$$

$$f(-1) = -5 \rightarrow$$

$$\rightarrow y - (-5) = 3[x - (-1)] \rightarrow$$

$$\rightarrow y = 3x - 2$$

$$d) f'(x) = \frac{6x \cdot x - 3x^2 - 1}{x^2} = \frac{3x^2 - 1}{x^2} = 3$$

$$\rightarrow 3x^2 - 1 = 3x^2 \rightarrow -1 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{No tiene solución.}$$

- 66 Determina la ecuación de las rectas tangentes a la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x}{x+3} \text{ paralelas a estas rectas.}$$

$$a) y - 3x - 1 = 0$$

$$b) y = \frac{1}{3}x - 2$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x+3) - x \cdot 1}{(x+3)^2} = \frac{3}{(x+3)^2}$$

$$a) \frac{3}{(x+3)^2} = 3 \rightarrow (x+3)^2 = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = -2 \rightarrow f(-2) = -2 \\ x = -4 \rightarrow f(-4) = 4 \end{cases}$$

Las rectas tangentes son:

$$y + 2 = 3(x + 2) \quad y - 4 = 3(x + 4)$$

$$b) \frac{3}{(x+3)^2} = \frac{1}{3} \rightarrow (x+3)^2 = 9 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \\ x = -6 \rightarrow f(-6) = 2 \end{cases}$$

Las rectas tangentes son:

$$y = \frac{1}{3}x \quad y - 2 = \frac{1}{3}(x + 6)$$

- 67 Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ que sea paralela a la bisectriz del primer cuadrante y la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $g(x)$ paralela a la bisectriz del segundo cuadrante.

$$f(x) = \frac{x}{x+1} \quad g(x) = x^2 + 3x + 2$$

$$\bullet f'(x) = \frac{1 \cdot (x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

La bisectriz del primer cuadrante es $y = x$.

$$\frac{1}{(x+1)^2} = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \\ x = -2 \rightarrow f(-2) = 2 \end{cases}$$

Las rectas tangentes son $y = x$, $y = x + 4$.

$$\bullet g'(x) = 2x + 3$$

La bisectriz del segundo cuadrante es $y = -x$.

$$2x + 3 = -1 \rightarrow x = -2 \rightarrow g(-2) = 0$$

La recta tangente es $y = -x - 2$.

- 68 Considera la función $f(x) = x^2 - 4x + 6$.

- a) Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a su gráfica paralelas a las bisectrices de los cuadrantes.
b) Halla el punto de corte entre ellas y el de cada una con el eje de coordenadas X .
c) Determina el área del triángulo cuyos vértices son los puntos anteriormente hallados.

$$a) f'(x) = 2x - 4 \rightarrow 2x - 4 = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{5}{2} \rightarrow f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{9}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow y - \frac{9}{4} = x - \frac{5}{2}$$

$$f'(x) = 2x - 4 \rightarrow 2x - 4 = -1 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{3}{2} \rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow y - \frac{9}{4} = -x + \frac{3}{2}$$

$$b) x - \frac{5}{2} = -x + \frac{3}{2} \rightarrow 2x = 4 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 2$$

Sustituyendo en cualquiera de las dos tangentes obtenemos $y = \frac{7}{4}$.

El punto de corte entre ellas es $A\left(2, \frac{7}{4}\right)$.

El punto de corte de la primera con el eje X es:

$$0 - \frac{9}{4} = x - \frac{5}{2} \rightarrow x = \frac{1}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow B\left(\frac{1}{4}, 0\right)$$

El punto de corte de la segunda con el eje X es:

$$0 - \frac{9}{4} = -x + \frac{3}{2} \rightarrow x = \frac{15}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow C\left(\frac{15}{4}, 0\right)$$

- c) Con los vértices $A\left(2, \frac{7}{4}\right)$, $B\left(\frac{1}{4}, 0\right)$, $C\left(\frac{15}{4}, 0\right)$ se obtiene un triángulo isósceles de base BC, cuya longitud es
- $$\frac{15}{4} - \frac{1}{4} = \frac{7}{2} \text{ u.}$$

Y su altura es $\frac{7}{4}$ u.

$$\text{Área} = \frac{\frac{7}{2} \cdot \frac{7}{4}}{2} = \frac{49}{16} \text{ u}^2$$

- 69 Considera la función $f(x) = \ln x$. Calcula los puntos de la curva en los que la recta tangente tiene la misma pendiente que las siguientes rectas.

- a) $r: y - x = 2$ c) $t: y + x - 1 = 0$
b) $s: 4y = 3 - x$ d) $u: 2y - x = -4$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

a) $\frac{1}{x} = 1 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 0)$

b) $\frac{1}{x} = \frac{-1}{4} \rightarrow x = -4$

En ninguno, porque la función no está definida en $x = -4$.

c) $\frac{1}{x} = -1 \rightarrow x = -1$

En ninguno, porque la función no está definida en $x = -1$.

d) $\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \rightarrow x = 2 \rightarrow (2, \ln 2)$

- 70 Calcula el vértice de las siguientes parábolas sabiendo que la tangente en el vértice es una recta paralela al eje X.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 6$

b) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

c) $f(x) = -x^2 + 2x + 1$

d) $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$

e) $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$

f) $f(x) = (x - 1)(2x + 5)$

Como la recta tangente al vértice es horizontal, la pendiente tiene que ser cero.

a) $f'(x) = 2x - 4 = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow x = 2, f(2) = 2 \rightarrow$
 $\rightarrow V(2, 2)$

b) $f'(x) = -2x + 2 = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow x = 1, f(1) = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow V(1, 0)$

c) $f'(x) = -2x + 2 = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow x = 1, f(1) = 2 \rightarrow$
 $\rightarrow V(1, 2)$

d) $f'(x) = 4x + 4 = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow x = -1, f(-1) = -5 \rightarrow$
 $\rightarrow V(-1, -5)$

e) $f'(x) = 6x - 6 = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow x = 1, f(1) = 2 \rightarrow$
 $\rightarrow V(1, 2)$

f) $f(x) = (x - 1)(2x + 5) = 2x^2 + 3x - 5 \rightarrow$
 $f'(x) = 4x + 3 = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow x = -\frac{3}{4}, f\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{49}{8} \rightarrow$
 $\rightarrow V\left(-\frac{3}{4}, -\frac{49}{8}\right)$

- 71 La función derivada de una parábola es una recta que pasa por los puntos $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(-1, -\frac{11}{2}\right)$. Halla la abscisa del vértice de esa parábola.

$$y = ax^2 + bx + c \rightarrow y' = 2ax + b$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} = 2a \cdot 1 + b \\ -\frac{11}{2} = 2a(-1) + b \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{-5}{2} \end{array} \right.$$

La pendiente de la recta tangente es nula en el vértice de la parábola, por lo tanto, la derivada es 0.

$$y' = 3x - \frac{5}{2} = 0 \rightarrow x = \frac{5}{6}$$

- 72 ¿Cuál es la ecuación de una parábola que pasa por el punto (0, 9) y en el punto (2, 9) tiene como recta tangente $y - 6x + 3 = 0$?

$$y = ax^2 + bx + c \rightarrow y' = 2ax + b$$

$$\text{Pasa por (0, 9): } 9 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \rightarrow c = 9$$

$$\text{Pasa por (2, 9): } 9 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$$

Es tangente a la recta de pendiente 6 en el punto (2, 9): $f'(2) = 6 \rightarrow 6 = 2a \cdot 2 + b$

$$\begin{cases} c = 9 \\ 9 = 4a + 2b + c \\ 6 = 4a + b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -6 \\ c = 9 \end{cases}$$

La ecuación de la parábola es $y = 3x^2 - 6x + 9$.

- 73 Indica en cuáles de las siguientes parejas de funciones sus gráficas son tangentes en algún punto.

a) $f(x) = x^2 + 3x + 2$ d) $f(x) = \ln x$
 $g(x) = 3x + 2$ $g(x) = x - 1$

b) $f(x) = e^x$ e) $f(x) = \cos x$
 $g(x) = x$ $g(x) = x^2 + 1$

c) $f(x) = 5x - 2$ f) $f(x) = \sin x$
 $g(x) = x^5 + 2$ $g(x) = \cos x$

a) $\begin{cases} f'(x) = 2x + 3 \\ g'(x) = 3 \end{cases} \rightarrow 2x + 3 = 3 \rightarrow x = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow \begin{cases} f(0) = 2 \\ g(0) = 2 \end{cases}$

Son tangentes.

b) $\begin{cases} f'(x) = e^x \\ g'(x) = 1 \end{cases} \rightarrow e^x = 1 \rightarrow x = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow \begin{cases} f(0) = 1 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

No son tangentes.

c) $\begin{cases} f'(x) = 5 \\ g'(x) = 5x^4 \end{cases} \rightarrow 5x^4 = 5 \rightarrow x = \pm 1$
 $\rightarrow \begin{cases} f(1) = -2 & f(-1) = -7 \\ g(1) = 3 & g(-1) = 1 \end{cases}$
 No son tangentes.

d) $\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{x} \\ g'(x) = 1 \end{cases} \rightarrow \frac{1}{x} = 1 \rightarrow x = 1 \rightarrow$
 $\rightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ g(1) = 0 \end{cases}$

Son tangentes.

e) $\begin{cases} f'(x) = -\sin x \\ g'(x) = 2x \end{cases} \rightarrow -\sin x = 2x \rightarrow$
 $\rightarrow x = 0 \rightarrow \begin{cases} f(0) = 1 \\ g(0) = 1 \end{cases}$

Son tangentes.

f) $\begin{cases} f'(x) = \cos x \\ g'(x) = -\sin x \end{cases} \rightarrow \cos x = -\sin x \rightarrow$
 $\rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$

f y g tienen signos contrarios en esos puntos, por tanto, no son tangentes.

- 74 **RETO.** Las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = -x^2$ comparten una misma recta tangente de pendiente positiva. ¿De qué recta se trata?

$$f'(x) = 2x \quad g'(x) = -2x$$

Coinciden para valores opuestos de x . Para que la pendiente de la recta tangente sea la misma, tomamos $x = a$ para $f(x)$ y $x = -a$ para $g(x)$. Las rectas tangentes son:

$$\begin{aligned} y - f(a) &= f'(a)(x - a) \rightarrow \\ \rightarrow y - (a^2 + 1) &= 2a(x - a) \rightarrow \\ \rightarrow y &= 2ax - a^2 + 1 \\ y - g(-a) &= g'(-a)(x + a) \rightarrow \\ \rightarrow y - (-a^2) &= 2a(x + a) \rightarrow y = 2ax + 3a^2 \end{aligned}$$

Para que la recta tangente sea la misma:

$$-a^2 + 1 = 3a^2 \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

La recta tangente de pendiente positiva es común a ambas.

$$y = 2ax - a^2 + 1 \rightarrow y = x + \frac{3}{4}$$

$$y = 2ax + 3a^2 \rightarrow y = x + \frac{3}{4}$$

- 75 Calcula las rectas tangentes a la curva $f(x)$ en los puntos de abscisa 2 y 0. Después, halla el punto de corte entre las dos rectas.

a) $f(x) = x^2 - x$

b) $f(x) = x^2 - 4x + 2$

c) $f(x) = \frac{1}{x+1}$

d) $f(x) = x^2 + 1$

e) $f(x) = \ln(x+1)$

f) $f(x) = \frac{x}{x+2}$

a) $f'(x) = 2x - 1$

$$\left. \begin{array}{l} f'(2) = 3 \\ f(2) = 2 \end{array} \right\} \rightarrow y - 2 = 3(x - 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(0) = -1 \\ f(0) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow y - 0 = -1(x - 0) \rightarrow y = -x$$

El punto de corte es (1, -1).

b) $f'(x) = 2x - 4$

$$\left. \begin{array}{l} f'(2) = 0 \\ f(2) = -2 \end{array} \right\} \rightarrow y + 2 = 0(x - 2) \rightarrow y = -2$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(0) = -4 \\ f(0) = 2 \end{array} \right\} \rightarrow y - 2 = -4(x - 0) \rightarrow y = -4x + 2$$

El punto de corte es (1, -2).

c) $f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$

$$\left. \begin{array}{l} f'(2) = \frac{-1}{9} \\ f(2) = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \rightarrow y - \frac{1}{3} = \frac{-1}{9}(x - 2) \rightarrow y = -\frac{1}{9}x + \frac{5}{9}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(0) = -1 \\ f(0) = 1 \end{array} \right\} \rightarrow y - 1 = -1(x - 0) \rightarrow y = -x + 1$$

El punto de corte es $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

d) $f'(x) = 2x$

$$\left. \begin{array}{l} f'(2) = 4 \\ f(2) = 5 \end{array} \right\} \rightarrow y - 5 = 4(x - 2) \rightarrow y = -4x + 13$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(0) = 0 \\ f(0) = 1 \end{array} \right\} \rightarrow y - 1 = 0(x - 0) \rightarrow y = 1$$

El punto de corte es (1, 1).

e) $f'(x) = \frac{1}{x+1}$

$$\left. \begin{array}{l} f'(2) = \frac{1}{3} \\ f(2) = \ln 3 \end{array} \right\} \rightarrow y - \ln 3 = \frac{1}{3}(x - 2) \rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} + \ln 3$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(0) = 1 \\ f(0) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow y - 0 = 1(x - 0) \rightarrow y = x$$

El punto de corte es

$$\left(-1 + \frac{3}{2} \ln 3, -1 + \frac{3}{2} \ln 3\right).$$

f) $f'(x) = \frac{2}{(x+2)^2}$

$$\left. \begin{array}{l} f'(2) = \frac{1}{8} \\ f(2) = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \rightarrow y - \frac{1}{2} = \frac{1}{8}(x - 2) \rightarrow y = \frac{1}{8}x + \frac{1}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(0) = \frac{1}{2} \\ f(0) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow y - 0 = \frac{1}{2}(x - 0) \rightarrow y = \frac{1}{2}x$$

El punto de corte es $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

76 Averigua en qué puntos de la gráfica de la función $f(x) = x^3 - x^2 + x$ la recta tangente tiene las siguientes pendientes.

a) $m = 2$

b) $m = 6$

c) $m = 9$

d) $m = 17$

La pendiente de la recta tangente a una función en un punto es el valor de su derivada en ese punto.

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

$$\begin{aligned} \text{a) } 3x^2 - 2x + 1 &= 2 \rightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0 \rightarrow \\ &x_1 = 1, x_2 = \frac{-1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 3x^2 - 2x + 1 &= 6 \rightarrow 3x^2 - 2x - 5 = 0 \rightarrow \end{aligned}$$

$$\rightarrow x_1 = -1, x_2 = \frac{5}{3}$$

$$\text{c) } 3x^2 - 2x + 1 = 9 \rightarrow 3x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1 = \frac{-4}{3}, x_2 = 2$$

$$\text{d) } 3x^2 - 2x + 1 = 17 \rightarrow$$

$$\rightarrow 3x^2 - 2x - 16 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1 = -2, x_2 = \frac{8}{3}$$

77 Considera la función $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$. Halla

los valores de la variable x en cada caso y da una interpretación geométrica a lo que se obtiene.

$$\text{a) } f'(x) = 1$$

$$\text{c) } f'(x) = 0$$

$$\text{b) } f'(x) = 4$$

$$\text{d) } f(x) = -3$$

$$f'(x) = \frac{x+2-(x-2)}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2}$$

$$\text{a) } f'(x) = \frac{4}{(x+2)^2} = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

La recta tangente a f tiene pendiente 1 en los puntos de abscisa 0 y -4 .

$$\text{b) } f'(x) = \frac{4}{(x+2)^2} = 4 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

La recta tangente a f tiene pendiente 4 en los puntos de abscisa -1 y -3 .

$$\text{c) } f'(x) = \frac{4}{(x+2)^2} \neq 0$$

No existen puntos en los que la recta tangente a f sea paralela al eje X .

$$\text{d) } f'(x) = \frac{4}{(x+2)^2} = \frac{1}{4} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -6 \end{cases}$$

La recta tangente a f tiene pendiente $\frac{1}{4}$ en los puntos de abscisa 2 y -6 .

78 **INVENTA.** Da la ecuación de una parábola cuya recta tangente en $x = 0$ sea $y = 2x + 1$. ¿Cuántas hay?

$$f(x) = ax^2 + bx + c \rightarrow f'(x) = 2ax + b$$

$$f'(0) = 2 \rightarrow 2a \cdot 0 + b = 2 \rightarrow b = 2$$

Recta y parábola coinciden en el punto de tangencia (0, 1).

$$f(0) = 1 \rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 1 \rightarrow c = 1$$

$$f(x) = ax^2 + 2x + 1.$$

Hay infinitas parábolas que cumplen la condición, tantas como valores de a .
Por ejemplo: $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

79 Razona si existe algún punto en el que la recta tangente a la gráfica de la curva $f(x)$ sea horizontal.

$$\text{a) } f(x) = \frac{x-2}{x-3}$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{3x}{x-3}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{x^2-2}{x-3}$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{-x}{x^2+1}$$

$$\text{a) } f'(x) = \frac{-1}{(x-3)^2} = 0$$

No tiene solución. Por tanto, la recta tangente a la gráfica de f no es horizontal en ningún punto.

$$\text{b) } f'(x) = \frac{x^2-6x+2}{(x-3)^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 + \sqrt{7} \\ x_2 = 3 - \sqrt{7} \end{cases}$$

La recta tangente a la gráfica de f es horizontal en dos puntos.

$$\text{c) } f'(x) = \frac{-9}{(x-3)^2} = 0$$

No tiene solución. Por tanto, la recta tangente a la gráfica de f no es horizontal en ningún punto.

$$\text{d) } f'(x) = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

La recta tangente a la gráfica de f es horizontal en dos puntos.

80 Indica si alguna de las rectas tangentes de las siguientes funciones son paralelas a la recta $r: y - 2x + 3 = 0$.

$$\text{a) } f(x) = x^3 - x + 7 \quad \text{c) } f(x) = \ln x^2$$

$$\text{b) } f(x) = x^2 + 4x + 3 \quad \text{d) } f(x) = \frac{1}{x+3}$$

$$\text{a) } f'(x) = 3x^2 - 1 = 2 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Las rectas tangentes a f en estos puntos son paralelas a la recta r .

$$\text{b) } f'(x) = 2x + 4 = 2 \rightarrow x = -1$$

La recta tangente a f en este punto es paralela a la recta r .

c) $f'(x) = \frac{2}{x} = 2 \rightarrow x = 1$

La recta tangente a f en este punto es paralela a la recta r .

d) $f'(x) = \frac{-1}{(x+3)^2} = 2$

No tiene solución. Por tanto, f no tiene rectas tangentes paralelas a la recta r .

- 81 Encuentra, en cada caso, los puntos en los que la recta tangente a la curva $f(x)$ es paralela a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.

a) $f(x) = x^2 - 3x + 1$ c) $f(x) = x^3 - x^2$

b) $f(x) = \frac{x}{1-x}$ d) $f(x) = x \ln x$

a) $f'(x) = 2x - 3 = 1 \rightarrow x = 2$

En $x = 2$, la recta tangente a f es paralela a las bisectrices del primer y tercer cuadrantes.

b) $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

En $x = 0$ y $x = 2$, la recta tangente a f es paralela a las bisectrices del primer y tercer cuadrantes.

c) $f'(x) = 3x^2 - 2x = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$

En $x = 1$ y $x = -\frac{1}{3}$, la recta tangente a f es paralela a las bisectrices del primer y tercer cuadrantes.

d) $f'(x) = \ln x + 1 = 1 \rightarrow x = 1$

En $x = 1$, la recta tangente a f es paralela a las bisectrices del primer y tercer cuadrantes.

- 82 Encuentra, en cada caso, los puntos en los que la recta tangente a la curva $f(x)$ es paralela a la bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes.

a) $f(x) = x^3 + 2x^2$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$

c) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$

d) $f(x) = -\frac{1}{1-2x}$

a) $f'(x) = 3x^2 + 4x = -1 \rightarrow x = \frac{-1}{3}$
 $x = -1$

b) $f'(x) = \frac{-1}{x^2} = -1 \rightarrow x = \pm 1$

c) $f'(x) = 6x^2 - 6x = -1 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}$

d) $f'(x) = \frac{-2}{(1-2x)^2} = -1 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$

- 83 Considera la función $f(x) = \frac{2}{x+3}$.

a) Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función cuya pendiente sea $\frac{-1}{2}$.

b) ¿Es la gráfica de $f(x)$ tangente en algún punto a la recta $y + 2x + 2 = 0$?
¿Es único este punto?

a) $f'(x) = \frac{-2}{(x+3)^2} = \frac{-1}{2} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} x = -1 \rightarrow f(-1) = 1 \\ x = -5 \rightarrow f(-5) = -1 \end{cases}$

Las rectas tangentes son:

$y - 1 = \frac{-1}{2}(x + 1)$

$y + 1 = \frac{-1}{2}(x + 5)$

b) $f'(x) = \frac{-2}{(x+3)^2} = -2 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} x = -2 \rightarrow \begin{cases} f(-2) = 2 \\ y(-2) = 2 \end{cases} \\ x = -4 \rightarrow \begin{cases} f(-4) = -2 \\ y(-4) = 6 \end{cases} \end{cases}$

La gráfica de la función es tangente a la recta en un único punto $(-2, 2)$.

- 84 La recta tangente a una función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$ es $y = 5x - 7$. Determina el valor de la función y de su derivada en el punto de abscisa $x = 2$.

La derivada coincide con la pendiente de la recta tangente $f'(2) = 5$.

El valor de la función en $x = 2$ coincide con el valor en el mismo punto de la recta tangente: $f(2) = 5 \cdot 2 - 7 = 3$.

- 85 La recta $y = ax + b$ pasa por $(1, 6)$ y $(2, 8)$ y es tangente a la curva $g(x)$ en $x = 0$.
Halla el valor de $g(0)$ y $g'(0)$.

$$\begin{cases} 6 = a \cdot 1 + b \\ 8 = a \cdot 2 + b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases} \rightarrow y = 2x + 5$$

$$g'(0) = 2 \quad g(0) = 2 \cdot 0 + 5 = 5$$

- 86 ¿Cuál es la mayor inclinación de la función $f(x) = \sin x$ en uno de sus puntos?

$$f'(x) = \cos x$$

Como $-1 \leq \cos x \leq 1$, la máxima inclinación que puede tener la recta tangente es 1.

- 87 Considera la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 20$. Escribe la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 4$.

En $x = 4$ hay dos rectas tangentes a la circunferencia.

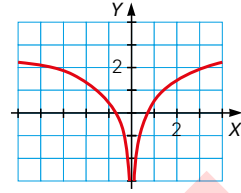
$$y = \sqrt{20 - x^2} \rightarrow y' = \frac{-x}{\sqrt{20 - x^2}}$$

$$\begin{cases} y(4) = 2 \\ y'(4) = -2 \end{cases} \rightarrow y - 2 = -2(x - 4)$$

$$y = -\sqrt{20 - x^2} \rightarrow y' = \frac{x}{\sqrt{20 - x^2}}$$

$$\begin{cases} y(4) = -2 \\ y'(4) = 2 \end{cases} \rightarrow y + 2 = 2(x - 4)$$

- 89 Dada la gráfica de la función $f(x) = \ln x^2$, calcula.



- La derivada de $f(x)$.
- El valor de $f(e)$ y $f'(e)$.
- La ecuación de la recta tangente en $x = e$.
- La pendiente de la recta perpendicular a la tangente.
- La ecuación de la recta normal a la recta tangente en el punto de abscisa $x = e$.

a) $f'(x) = \frac{2}{x}$

b) $f(e) = 2 \quad f'(e) = \frac{2}{e}$

c) $y - 2 = \frac{2}{e}(x - e)$

d) $\frac{-e}{2}$

e) $y - 2 = \frac{-e}{2}(x - e)$

- 90 Determina la ecuación de la recta normal de cada función $f(x)$ en el punto indicado.

a) $f(x) = x^2 - 2x$ en $x = 2$

b) $f(x) = 2 - x^2$ en $x = 3$

c) $f(x) = x^3$ en $x = 1$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x = -1$

a) $f'(x) = 2x - 2 \quad f'(2) = 2 \quad f(2) = 0$

La recta tangente es: $y = 2(x - 2)$

La recta normal es: $y = -\frac{1}{2}(x - 2)$

b) $f'(x) = -2x \quad f'(3) = -6 \quad f(3) = -7$

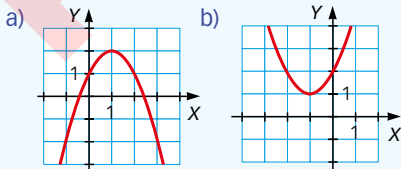
La recta tangente es: $y + 7 = -6(x - 3)$

La recta normal es:

$y + 7 = \frac{1}{6}(x - 3)$

ACTIVIDADES FLASH

- 88 Indica la ecuación de la recta normal a los vértices de estas parábolas.



Como en los vértices la pendiente de la tangente es 0 y, por tanto, es horizontal, las rectas normales son verticales.

- a) $x = 1$ b) $x = -1$

c) $f'(x) = 3x^2$ $f'(1) = 3$ $f(1) = 1$

La recta tangente es: $y - 1 = 3(x - 1)$

La recta normal es: $y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 1)$

d) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$f'(-1) = -1$ $f(-1) = -1$

La recta tangente es:

$y + 1 = -(x + 1) \rightarrow y = -x$

La recta normal es: $y = x$

- 91 Determina la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de $f(x) = x^2$ que sean paralelas a la recta $y = 2x - 3$.

$f'(x) = 2x = 2 \rightarrow x = 1$

$f(1) = 1$ $f'(1) = 2$

La recta tangente es: $y - 1 = 2(x - 1)$

La recta normal es: $y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1)$

- 92 Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la función $y = \cos x$ en el punto de abscisa π .

$f'(x) = -\operatorname{sen} x$ $f(\pi) = -1$ $f'(\pi) = 0$

La recta tangente es: $y = -1$

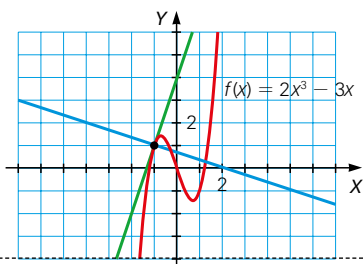
La recta normal es: $x = \pi$

- 93 **INVESTIGA.** Si $x + 5y = 20$ es normal a la gráfica de f en $(1, 2)$, ¿cuánto vale $f'(1)$?

La pendiente de la recta normal es $-\frac{1}{5}$.

Por tanto, la pendiente de la recta tangente es 5 y $f'(1) = 5$.

- 94 Averigua las ecuaciones de las rectas perpendiculares que aparecen en la gráfica.



$f'(x) = 6x^2 - 3$

$f'(-1) = 3$

$f(-1) = 1$

Ecuación recta tangente:

$y - 1 = 3(x + 1) \rightarrow y = 3x + 4$

Ecuación recta normal:

$y - 1 = -\frac{1}{3}(x + 1) \rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

- 95 Halla la recta tangente y la recta normal a las funciones en los puntos indicados.

a) $f(x) = e^{3x}$ en $x = 0$

b) $f(x) = 2^{3x-8}$ en $x = 3$

c) $f(x) = x^2 \ln(x)$ en $x = 2$

d) $f(x) = (3x - 5)^6$ en $x = 2$

a) $f'(x) = 3e^{3x}$

$f(0) = 1$ $f'(0) = 3$

Ecuación recta tangente:

$y - 1 = 3(x - 0) \rightarrow y = 3x + 1$

Ecuación recta normal:

$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 0) \rightarrow y = -\frac{1}{3}x + 1$

b) $f'(x) = 3 \cdot 2^{3x-8} \cdot \ln 2$

$f(3) = 2$

$f'(3) = 6 \ln 2$

Ecuación recta tangente:

$y - 2 = 6 \ln 2(x - 3)$

Ecuación recta normal:

$y - 2 = \frac{-1}{6 \ln 2}(x - 3)$

c) $f'(x) = 2x \ln x + x$

$f(2) = 4 \ln 2$

$f'(2) = 4 \ln 2 + 2$

Ecuación recta tangente:

$y - 4 \ln 2 = (4 \ln 2 + 2)(x - 2)$

Ecuación recta normal:

$y - 4 \ln 2 = \frac{-1}{4 \ln 2 + 2}(x - 2)$

d) $f'(x) = 18 \cdot (3x - 5)^5$

$f(2) = 1$

$f'(2) = 18$

Ecuación recta tangente:

$y - 1 = 18(x - 2) \rightarrow y = 18x - 35$

Ecuación recta normal:

$$y - 1 = \frac{-1}{18}(x - 2) \rightarrow y = \frac{-1}{18}x + \frac{8}{9}$$

- 96 Determina la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a las funciones en los puntos indicados.

a) $f(x) = \sqrt{2x + 6}$ en $x = 5$

b) $f(x) = \sin(2x + \pi)$ en $x = 0$

c) $f(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi - x}{2}$ en $x = \pi$

d) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ en $x = 0$

a) $f'(x) = \frac{1}{2}(2x + 6)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x + 6}}$

$$f(5) = 4 \quad f'(5) = \frac{1}{4}$$

Ecuación recta tangente:

$$y - 4 = \frac{1}{4}(x - 5) \rightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{11}{4}$$

Ecuación recta normal:

$$y - 4 = -4(x - 5) \rightarrow y = -4x + 16$$

b) $f'(x) = \cos(2x + \pi) \cdot 2$

$$f(0) = 0 \quad f'(0) = -2$$

Ecuación recta tangente:

$$y - 0 = -2(x - 0) \rightarrow y = -2x$$

Ecuación recta normal:

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x - 0) \rightarrow y = \frac{1}{2}x$$

c) $f'(x) = \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi - x}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$$f(\pi) = 0 \quad f'(\pi) = -\frac{1}{2}$$

Ecuación recta tangente:

$$y - 0 = -\frac{1}{2}(x - \pi) \rightarrow$$

$$\rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}$$

Ecuación recta normal:

$$y - 0 = 2(x - \pi) \rightarrow y = 2x - 2\pi$$

d) $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

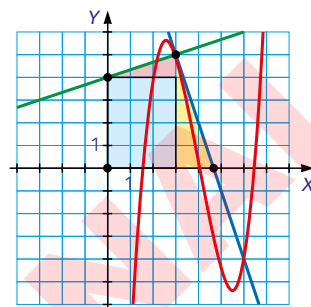
$$f(0) = 0 \quad f'(0) = 0$$

Ecuación recta tangente:

$$y - 0 = 0(x - 0) \rightarrow y = 0$$

Ecuación recta normal: $x = 0$

- 97 Si se traza la recta tangente y la recta normal a la función $f(x) = x^3 - 12x^2 + 42x - 40$, en el punto (3, 5) se forma, con los semiejes positivos de coordenadas, un cuadrilátero. Determina su área.



$$f'(x) = 3x^2 - 24x + 42$$

$$f'(3) = -3$$

Ecuación recta tangente:

$$y - 5 = -3(x - 3) \rightarrow y = -3x + 14$$

Ecuación recta normal:

$$y - 5 = \frac{1}{3}(x - 3) \rightarrow y = \frac{1}{3}x + 4$$

El cuadrilátero tiene como vértices: (0, 0), (0, 4), (3, 5) y $\left(\frac{14}{3}, 0\right)$.

Para calcular su área se descompone en tres figuras:

El rectángulo de vértices (0, 0), (0, 4), (3, 4) y (3, 0). Su área es 12 u^2 .

El triángulo de vértices (4, 0), (3, 4) y (3, 5).

Su área es $\frac{3}{2} \text{ u}^2$.

El triángulo de vértices (3, 5), (3, 0) y $\left(\frac{14}{3}, 0\right)$.

Su área es $\frac{25}{6} \text{ u}^2$.

Luego el área del cuadrilátero es:

$$12 + \frac{3}{2} + \frac{25}{6} = \frac{53}{3} \text{ u}^2$$

- 98 Considera la función $f(x) = \frac{2x - 9}{x - 3}$.

- a) Calcula los puntos de corte de esta función con los ejes de coordenadas.
b) Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva en cada uno de esos puntos.

- c) Halla el área de los triángulos que determinan esas rectas con los ejes de coordenadas.

- a) Corte con el eje X:

$$2x - 9 = 0 \rightarrow x = \frac{9}{2} \rightarrow \left(\frac{9}{2}, 0\right)$$

Corte con el eje Y: $f(0) = 3 \rightarrow (0, 3)$

$$\begin{aligned} \text{b) } f'(x) &= \frac{2(x-3) - (2x-9) \cdot 1}{(x-3)^2} = \\ &= \frac{3}{(x-3)^2} \end{aligned}$$

Ecuación recta tangente en $x = 0$:

$$f(0) = 3 \quad f'(0) = \frac{1}{3}$$

$$y - 3 = \frac{1}{3}(x - 0) \rightarrow y = \frac{1}{3}x + 3$$

Ecuación recta tangente en $x = \frac{9}{2}$:

$$f\left(\frac{9}{2}\right) = 0 \quad f'\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{4}{3}$$

$$y - 0 = \frac{4}{3}\left(x - \frac{9}{2}\right) \rightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$$

- c) La recta tangente en $x = 0$ corta al eje X en el punto $(-9, 0)$ y al eje Y en el $(0, 3)$. Por tanto:

$$\text{Área} = \frac{9 \cdot 3}{2} = 13,5 \text{ u}^2$$

La recta tangente en $x = \frac{9}{2}$ corta

al eje X en el punto $\left(\frac{9}{2}, 0\right)$ y al eje Y en $(0, -6)$. Por tanto:

$$\text{Área} = \frac{6 \cdot \frac{9}{2}}{2} = \frac{27}{2} = 13,5 \text{ u}^2$$

2. Calcula la derivada de una función



ACTIVIDADES FLASH

- 99 Calcula la derivada de estas funciones.

- a) $f(x) = x^5 + 2x^3 - x + 1$
b) $f(x) = x^2 + x^{-1} + x^{-2}$

$$\text{c) } f(x) = 2(x+4) - 3(x^2 - 1)$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x}{4}$$

$$\text{a) } f'(x) = 5x^4 + 6x^2 - 1$$

$$\text{b) } f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$$

$$\text{c) } f'(x) = 2 - 6x$$

$$\text{d) } f'(x) = 2x^3 + x^2 - \frac{1}{4}$$

- 100 Aplica las reglas de derivación a la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$ para calcular:

- a) La función derivada.
b) La derivada en los puntos de abscisa $-1, 0$ y 3 .
c) La ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa 3 y la ecuación de la recta normal a la curva en el punto de abscisa 0 .

$$\text{a) } f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

$$\text{b) } f'(-1) = 11$$

$$f'(0) = 2$$

$$f'(3) = 11$$

$$\text{c) } x = 3 \rightarrow \begin{cases} f(3) = 1 \\ f'(3) = 11 \end{cases} \rightarrow$$

Ecuación recta tangente en $x = 3$:

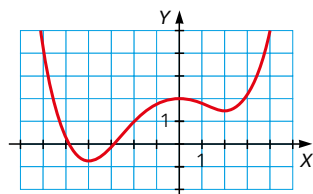
$$y - 1 = 11(x - 3).$$

$$x = 0 \rightarrow \begin{cases} f(0) = -5 \\ f'(0) = 2 \end{cases} \rightarrow$$

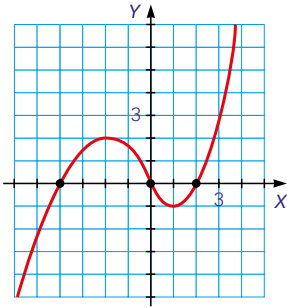
Ecuación recta normal en $x = 0$:

$$\rightarrow y + 5 = \frac{-1}{2}(x - 0).$$

- 101 **INVENTA.** Se considera la función f con esta representación gráfica. ¿Cuál podría ser la gráfica de su derivada?



Respuesta abierta. Por ejemplo:



- 102 INVESTIGA.** Verifica que, si un polinomio tiene una raíz doble, también es raíz de su derivada.

Resuelve la ecuación

$12x^3 - 16x^2 + 7x - 1 = 0$ sabiendo que una de sus raíces es doble.

Si un polinomio, $P(x)$, de grado $n \geq 2$ tiene raíz doble $x = a$, se puede factorizar como $P(x) = (x - a)^2 \cdot Q(x)$, siendo

$\text{Gr}(Q(x)) = n - 2$.

$$P'(x) = 2(x - a)Q(x) + (x - a)^2 Q'(x) = (x - a)(2Q(x) + (x - a)Q'(x))$$

Por tanto, $x = a$ también es raíz de $P'(x)$.

$$P(x) = 12x^3 - 16x^2 + 7x - 1 \rightarrow \\ \rightarrow P'(x) = 36x^2 - 32x + 7 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \quad x_2 = \frac{7}{18}$$

Sabemos que una de las dos raíces es también raíz de $P(x)$.

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 7 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0$$

Por tanto, $x = \frac{1}{2}$ es raíz de $P(x)$.

Utilizando el método de Ruffini con $x_1 = \frac{1}{2}$ obtenemos:

$$12x^2 - 10x + 2 = 0 \rightarrow x_2 = \frac{1}{2} \quad x_3 = \frac{1}{3}$$

- 103** Utiliza las reglas de derivación para calcular la función derivada de estas funciones.

a) $f(x) = (3x^2 - 1) \cdot 4x$
 b) $f(x) = (-3x^2 + x - 1) \cdot \left(\frac{2x - 3}{3}\right)$
 c) $f(x) = 2x \cdot (5x - 3) \cdot (x^2 - 3x + 1)$

a) $f'(x) = 6x \cdot 4x + (3x^2 - 1) \cdot 4 = 36x^2 - 4$

b) $f'(x) = (-6x + 1) \cdot \frac{2x - 3}{3} + (-3x^2 + x - 1) \cdot \frac{2}{3} = \frac{-18x^2 + 22x - 5}{3}$

c) $f'(x) = 2[(5x - 3)(x^2 - 3x + 1)] + 2x[5(x^2 - 3x + 1) + (5x - 3)(2x - 3)] = 40x^3 - 108x^2 + 56x - 6$

- 104** Calcula la función derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \frac{7x^3 - 2x + 4}{x - 2}$

b) $f(x) = \frac{6x^4}{7x^2 - x + 3}$

c) $f(x) = \frac{4}{x^2 - 1}$

d) $f(x) = \frac{x^2 + 3 - x}{2x^2 - x}$

a) $f'(x) = \frac{14x^3 - 42x^2}{(x - 2)^2}$

b) $f'(x) = \frac{84x^5 - 18x^4 + 72x^3}{(7x^2 - x + 3)^2}$

c) $f'(x) = \frac{-8x}{(x^2 - 1)^2}$

d) $f'(x) = \frac{x^2 - 12x + 3}{(2x^2 - x)^2}$

- 105** Halla la derivada de estas operaciones de funciones.

a) $f(x) = (x - 2)(x^2 + 3x)$

b) $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$

c) $f(x) = x^2 \log x - 1$

d) $f(x) = \frac{8}{2x - 1}$

e) $f(x) = \ln x + e^x$

f) $f(x) = \sqrt[3]{x} \sqrt{x}$

g) $f(x) = x^2 \cdot 2^x$

h) $f(x) = \frac{3x + 4}{2x - 1}$

$$\text{a) } f'(x) = 1(x^2 + 3x) + (x - 2)(2x + 3) = 3x^2 + 2x - 6$$

$$\text{b) } f(x) = x^{1/2} - x^{1/3} \rightarrow \\ \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\text{c) } f'(x) = 2x \log x + x^2 \cdot \frac{1}{x \ln 10}$$

$$\text{d) } f'(x) = \frac{-16}{(2x - 1)^2}$$

$$\text{e) } f'(x) = \frac{1}{x} + e^x$$

$$\text{f) } f(x) = x^{1/3} x^{1/2} = x^{5/6} \rightarrow \\ \rightarrow f'(x) = \frac{5}{6\sqrt[6]{x}}$$

$$\text{g) } f'(x) = 2x \cdot 2^x + x^2 2^x \ln 2$$

$$\text{h) } f'(x) = \frac{3(2x - 1) - 2(3x + 4)}{(2x - 1)^2} = \\ = \frac{-11}{(2x - 1)^2}$$

106 ●●● Calcula la derivada de las siguientes funciones.

$$\text{a) } f(x) = \sqrt[3]{x^7}$$

$$\text{b) } f(x) = \sqrt{x^3} - 3\sqrt[5]{x}$$

$$\text{c) } f(x) = \sqrt[5]{x} \cdot (1 - \sqrt{x})$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1 - \sqrt[3]{x}}$$

$$\text{a) } f'(x) = \frac{7}{3} x^{\frac{4}{3}} = \frac{7\sqrt[3]{x^4}}{3}$$

$$\text{b) } f'(x) = \frac{3}{2} x^{1/2} - \frac{3}{5} x^{-4/5} = \frac{3\sqrt{x}}{2} - \frac{3}{5\sqrt[5]{x^4}}$$

$$\text{c) } f(x) = \sqrt[5]{x} - \sqrt[10]{x^7} \rightarrow \\ \rightarrow f'(x) = \frac{1}{5} x^{-4/5} - \frac{7}{10} x^{-3/10} = \\ = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} - \frac{7}{10\sqrt[10]{x^3}}$$

$$\text{d) } f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (1 - \sqrt[3]{x}) + \frac{\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{x^2}}}{(1 - \sqrt[3]{x})^2} = \\ = \frac{\frac{3\sqrt[6]{x} - \sqrt{x}}{6\sqrt[3]{x^2}(1 - \sqrt[3]{x})^2}}$$

107 ●●● **INVENTA.** Escribe tres funciones diferentes tales que su derivada sea $2x$.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$f(x) = x^2 \quad g(x) = x^2 + 5 \quad h(x) = x^2 - 3$$

108 ●●● **INVENTA.** Escribe tres funciones diferentes cuya derivada en $x = 0$ sea 1.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$f(x) = x \quad g(x) = x^2 + x \quad h(x) = x^3 + x$$

109 ●●● Calcula la derivada de las siguientes funciones exponenciales y logarítmicas.

$$\text{a) } f(x) = \ln x + e^x \quad \text{d) } f(x) = \frac{\ln x + 4}{e^x}$$

$$\text{b) } f(x) = x^2 \log x - 1 \quad \text{e) } f(x) = \frac{\ln x}{e^x} + 4$$

$$\text{c) } f(x) = (x^2 + 3) \log_2 x \quad \text{f) } f(x) = 5e^x - 3^x$$

$$\text{a) } f'(x) = \frac{1}{x} + e^x$$

$$\text{b) } f'(x) = 2x \log x + x^2 \frac{1}{x \ln 10} = \\ = x \left(2 \log x + \frac{1}{\ln 10} \right)$$

$$\text{c) } f'(x) = 2x \log_2 x + \frac{x^2 + 3}{x \ln 2}$$

$$\text{d) } f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot e^x - (\ln x + 4) \cdot e^x}{e^{2x}} = \\ = \frac{1 - x \ln x - 4x}{xe^{2x}}$$

$$\text{e) } f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot e^x - \ln x \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{1 - x \ln x}{xe^x}$$

$$\text{f) } f'(x) = 5e^x - 3^x \ln 3$$

110 ●●● Deriva las siguientes funciones trigonométricas.

$$\text{a) } f(x) = \sin x \cos x$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{\cos x}{x^2}$$

$$\text{c) } f(x) = \sec x \operatorname{cosec} x$$

$$\text{d) } f(x) = x \operatorname{tg} x$$

$$\text{e) } f(x) = x \operatorname{arc} \cos x$$

$$\text{f) } f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

$$\text{a) } f'(x) = \cos x \cdot \cos x + (-\operatorname{sen} x) \cdot \operatorname{sen} x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

$$\text{b) } f'(x) = \frac{-\operatorname{sen} x \cdot x^2 - \cos x \cdot 2x}{x^4} = \frac{-x \operatorname{sen} x - 2 \cos x}{x^3}$$

$$\text{c) } f'(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \cdot \operatorname{cosec} x + \sec x \cdot \left(-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \right) = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$\text{d) } f'(x) = 1 \cdot \operatorname{tg} x + x \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x) = x + \operatorname{tg} x + x \operatorname{tg}^2 x$$

$$\text{e) } f'(x) = 1 \cdot \arccos x + x \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) = \arccos x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{f) } f'(x) = -\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x}$$

111 Calcula la derivada de las siguientes funciones trigonométricas.

$$\text{a) } f(x) = 2x + \arcsen x + \arccos x$$

$$\text{b) } f(x) = (1 + x^2) \arctg x$$

$$\text{c) } f(x) = \ln x \cdot \operatorname{tg} x$$

$$\text{d) } f(x) = e^x \operatorname{sen} x$$

$$\text{e) } f(x) = \frac{\cos x}{2-x}$$

$$\text{a) } f'(x) = 2 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2$$

$$\text{b) } f'(x) = 2x \cdot \arctg x + (1 + x^2) \cdot \frac{1}{1+x^2} = 1 + 2x \arctg x$$

$$\text{c) } f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \operatorname{tg} x + \ln x \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x)$$

$$\text{d) } f'(x) = e^x \cdot \operatorname{sen} x + e^x \cdot \cos x = e^x (\operatorname{sen} x + \cos x)$$

$$\text{e) } f'(x) = \frac{-\operatorname{sen} x \cdot (2-x) - \cos x \cdot (-1)}{(2-x)^2} = \frac{(x-2)\operatorname{sen} x + \cos x}{(2-x)^2}$$

112 RETO. Halla la derivada de esta función.

$$f(x) = \sqrt{x + a\sqrt{x + a\sqrt{x + \dots}}}$$

Si consideramos que hay n raíces anidadas en la función, podemos escribir:

$$f(x) = \sqrt{x + a \cdot f(x)}$$

$$g(x) = x + a \cdot f(x) \rightarrow f(x) = \sqrt{g(x)} \rightarrow$$

$$\rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}} \rightarrow$$

$$\rightarrow f'(x) = \frac{1 + a \cdot f'(x)}{2\sqrt{x + a \cdot g(x)}} \rightarrow$$

$$\rightarrow f'(x)(2\sqrt{x + a \cdot g(x)} - a) = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x + a\sqrt{x + a\sqrt{x + \dots}}}}$$

113 INVESTIGA. Obtén la expresión algebraica de una función que pasa por el punto $(-1, 5)$, sabiendo que su derivada es:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$$

$$f(-1) = 5 \rightarrow$$

$$\rightarrow (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + c = 5$$

$$\rightarrow -1 + 1 + 1 + c = 5 \rightarrow$$

$$\rightarrow c = 4$$

La función es $f(x) = x^3 + x^2 + x + 4$.

114 Encuentra los valores donde se anula la derivada segunda de las siguientes funciones.

$$\text{a) } f(x) = -3x^3 + 4x^2 - 3x + 1$$

$$\text{b) } f(x) = \ln(x^2 + 2)$$

$$\text{c) } f(x) = \operatorname{sen}(2x)$$

$$\text{a) } f'(x) = -9x^2 + 8x - 3$$

$$f''(x) = -18x + 8 = 0 \rightarrow x = \frac{4}{9}$$

$$\text{b) } f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 2}$$

$$f''(x) = \frac{-2x^2 + 4}{(x^2 + 2)^2} = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$\text{c) } f'(x) = 2 \cos(2x)$$

$$f''(x) = -4 \operatorname{sen}(2x) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 0 + \frac{\pi}{2} k \text{ rad, con } k \in \mathbb{Z}$$

115 Calcula las seis primeras derivadas de las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x & f^{(4)}(x) &= \sin x \\ f''(x) &= -\sin x & f^{(5)}(x) &= \cos x \\ f'''(x) &= -\cos x & f^{(6)}(x) &= -\sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\sin x & g^{(4)}(x) &= \cos x \\ g''(x) &= -\cos x & g^{(5)}(x) &= -\sin x \\ g'''(x) &= \sin x & g^{(6)}(x) &= -\cos x \end{aligned}$$

- 116 Escribe las tres primeras derivadas de estas funciones.

a) $f(x) = x^5$
 $f'(x) = 5x^4$
 $f''(x) = 20x^3$
 $f'''(x) = 60x^2$

b) $f(x) = \ln x$
 $f'(x) = \frac{1}{x}$
 $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$
 $f'''(x) = \frac{2}{x^3}$

c) $f(x) = 2^x \ln 2$
 $f'(x) = 2^x \ln^2 2$
 $f''(x) = 2^x \ln^3 2$

- 117 **INVESTIGA.** Calcula la derivada enésima de esta función.

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a \\ f'(x) &= n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1 \\ f''(x) &= n(n-1) a_n x^{n-2} + \\ &\quad + (n-1)(n-2) a_{n-1} x^{n-3} + \dots + a_2 \end{aligned}$$

La derivada n -ésima es: $f^{(n)}(x) = n! \cdot a_n$

- 118 **INVESTIGA.** Si $f(x) = \frac{1}{x}$, ¿cuál es la enésima derivada de la función?

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{x^2} & f'''(x) &= -\frac{6}{x^4} \\ f''(x) &= \frac{2}{x^3} & f^{(4)}(x) &= \frac{24}{x^5} \end{aligned}$$

La derivada n -ésima es: $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}$

- 119 **INVESTIGA.** Sea $f(x) = \ln x$, demuestra que $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ y $f^{(100)}(x) = -\frac{99!}{x^{100}}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} \rightarrow f''(x) = -\frac{1}{x^2} \\ \rightarrow f'''(x) &= \frac{2}{x^3} \rightarrow f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4} \rightarrow \\ \rightarrow f^{(5)}(x) &= \frac{24}{x^5} \end{aligned}$$

La derivada n -ésima es:

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)!}{x^n} \\ f^{(100)}(x) &= \frac{(-1)^{100+1} \cdot (100-1)!}{x^{100}} = -\frac{99!}{x^{100}} \end{aligned}$$

- 120 **RETO.** Calcula la derivada enésima, $f^{(n)}(x)$, de esta función.

$$f(x) = \frac{2}{x-1}$$

Calculamos las primeras derivadas:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2(x-1)^{-2} \\ f''(x) &= 4(x-1)^{-3} \\ f'''(x) &= -12(x-1)^{-4} \\ f^{(4)}(x) &= 48(x-1)^{-5} \end{aligned}$$

La derivada n -ésima es de la forma:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot 2 \cdot n! (x-1)^{-(n+1)}$$

- 121 **MATEMÁTICAS Y... FÍSICA.** Se lanza hacia abajo una pelota desde una cierta altura. El espacio recorrido viene dado

$$\text{por la ecuación } s(t) = 10t + \frac{1}{2} \cdot 9,8t^2,$$

siendo s el espacio que recorre la pelota y t el tiempo transcurrido desde que se lanza.

- a) Determina la tasa de variación media en el intervalo $[0, 2]$ s.
 ¿Cuál es la velocidad media en ese intervalo?
- b) Calcula la función velocidad respecto del tiempo, $v(t)$, que coincide con la derivada de la función posición, $s(t)$.
- c) Halla la velocidad de la pelota en el instante $t = 4$ s.



$$\begin{aligned} \text{a) } T.V.M.([0, 2]) &= \frac{s(2) - s(0)}{2 - 0} = \\ &= \frac{39,6 - 0}{2} = 19,8 \end{aligned}$$

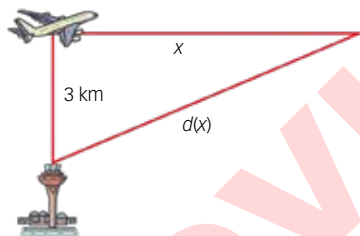
La velocidad media en ese intervalo es de 19,8 m/s.

$$\text{b) } v(t) = s'(t) = 10 + 9,8t$$

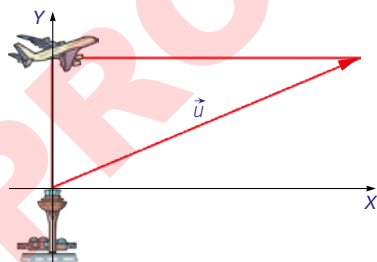
$$\text{c) } v(4) = 10 + 9,8 \cdot 4 = 49,2 \text{ m/s}$$

122 MATEMÁTICAS Y... AVIACIÓN.

La velocidad de un objeto depende del punto de referencia desde donde se mida. Por ejemplo, la velocidad a la que viaja un avión difiere de la velocidad a la que se aleja de un punto fijo en tierra. Un avión vuela a una velocidad de 480 km/h con una altura de 3 km sobre la torre de control, ¿a qué velocidad se apreciará que viaja desde la torre de control tras 30 segundos?



$$v = 180 \text{ km/h} = 133,3 \text{ m/s}$$



Suponemos el sistema de referencia situado en la torre de control. Desde este punto, el vector de posición que describe el avión es:

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} = 133,3t\vec{i} + 3000\vec{j}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{u}}{dt} = 133,3\vec{i}$$

$$|\vec{v}| = 133,3 \text{ m/s}$$

Esta actividad puede utilizarse para trabajar el ODS 9, industria, innovación e infraestructura.

123 MATEMÁTICAS Y... CINÉTICA.

El espacio, en metros, que recorre un móvil en función del tiempo, en segundos, viene dado por $e(t) = \frac{2}{3}t^2 + t$. Calcula su velocidad instantánea a los 3 segundos.

$$e'(t) = \frac{4}{3}t + 1 \rightarrow e'(3) = 5$$

La velocidad instantánea del móvil a los 3 segundos es de 5 m/s.

El espacio recorrido por un objeto, en metros, en t segundos se expresa como $e(t) = -0,25t^2 + 2t + 1$.



- a) ¿Qué espacio ha recorrido a los 4 segundos? ¿Y a los 7?
- b) ¿Cuál es la velocidad media que ha mantenido entre los 4 y los 7 segundos?

$$\text{a) } e(4) = -0,25 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 1 = 5 \text{ m}$$

$$e(7) = -0,25 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7 + 1 = 2,75 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } T.V.M.([4, 7]) &= \frac{e(7) - e(4)}{7 - 4} = \\ &= \frac{2,75 - 5}{3} = -0,75 \text{ m/s} \end{aligned}$$

125 MATEMÁTICAS Y... FÍSICA.

Se lanza verticalmente una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de 49 m/s desde la parte superior de un edificio de 39 m de altura. Su altura $h(t)$ sobre el suelo después de t segundos está dada por $h(t) = 39 + 49t - 4,9t^2$. Determina la velocidad media de la pelota en cada uno de los siguientes intervalos.

- a) $[0, 1]$ b) $[4, 6]$ c) $[11, 13]$

¿Qué se puede concluir del movimiento de la pelota?

- a) $\frac{h(1) - h(0)}{1 - 0} = \frac{83,1 - 39}{1} = 44,1 \text{ m/s}$
 b) $\frac{h(6) - h(4)}{6 - 4} = \frac{156,6 - 156,6}{2} = 0 \text{ m/s}$
 c) $\frac{h(13) - h(11)}{13 - 11} = \frac{0 - 0}{2} = 0 \text{ m/s}$

En el primer intervalo la pelota está subiendo y, por tanto, la velocidad media es positiva; en el segundo intervalo la pelota recorre el mismo tramo hacia arriba y hacia abajo; en el último intervalo la pelota ya está en el suelo y no se mueve, por lo que la velocidad media es cero.

126 MATEMÁTICAS Y... SEGURIDAD.

La distancia, d , que recorre un objeto en caída libre en t segundos se puede calcular con $d(t) = 4,9t^2$. Una de las mayores norias del mundo con una altura máxima de 135 m es el London Eye. Si se desprende un tornillo y cae al suelo desde lo más alto:



- a) ¿Cuánto tarda en caer al suelo?
 b) ¿A qué velocidad, en km/h, llegará al suelo? (Recuerda que la velocidad es la derivada de $d(t)$).

- a) $4,9t^2 = 135 \rightarrow t = 5,25 \text{ s}$
 b) $v(t) = d'(t) = 9,8t$
 $v(5,25) = 51,45 \text{ m/s} = 185,22 \text{ km/h}$

3. Deriva funciones mediante la regla de la cadena

127 Escribe las funciones elementales que componen estas funciones y halla sus derivadas.

- a) $f(x) = \ln(2x^2)$
 b) $f(x) = \log_3(x^2 - 1)$

c) $f(x) = 10^{x+3}$

d) $f(x) = e^{3x}$

e) $f(x) = \cos(3x - 1)$

f) $f(x) = \sin(x^2 - 3)$

a) $f(x) = g[h(x)]$, donde $g(x) = \ln x$

y $h(x) = 2x^2 \rightarrow f'(x) = \frac{2}{x}$

b) $f(x) = g[h(x)]$, donde $g(x) = \log_3 x$

y $h(x) = x^2 - 1 \rightarrow f'(x) = \frac{2x}{(x^2 - 1) \ln 3}$

c) $f(x) = g[h(x)]$, donde $g(x) = 10^x$

y $h(x) = x + 3 \rightarrow f'(x) = 10^{x+3} \ln 10$

d) $f(x) = g[h(x)]$, donde $g(x) = e^x$

y $h(x) = 3x \rightarrow f'(x) = 3e^{3x}$

e) $f(x) = g[h(x)]$, donde $g(x) = \cos x$ y

$h(x) = 3x - 1 \rightarrow f'(x) = -3 \sin(3x - 1)$

f) $f(x) = g[h(x)]$, donde $g(x) = \sin x$ y

$h(x) = x^2 - 3 \rightarrow f'(x) = 2x \cos(x^2 - 3)$

128 Aplica la regla de la cadena para calcular las derivadas de estas funciones exponenciales y logarítmicas.

a) $f(x) = \ln \frac{x^3}{2x + 1}$

b) $f(x) = e^x \ln x$

c) $f(x) = e^{\frac{3x^2-1}{x}}$

d) $f(x) = \log_2 \frac{2x^2}{x-7}$

e) $f(x) = 3^{\ln(x^4+2)}$

f) $f(x) = \frac{\ln x^3}{e^{-x^2-x}}$

a) $f'(x) = \frac{2x+1}{x^3} \cdot \frac{3x^2(2x+1) - 2x^3}{(2x+1)^2} =$
 $= \frac{4x+3}{x(2x+1)}$

b) $f'(x) = e^x \ln x + \frac{e^x}{x}$

c) $f'(x) = e^{\frac{3x^2-1}{x}} \cdot \frac{6x \cdot x - (3x^2-1)}{x^2} =$
 $= e^{\frac{3x^2-1}{x}} \cdot \frac{3x^2+1}{x^2}$

d) $f'(x) = \frac{x-7}{2x^2} \cdot \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{4x(x-7) - 2x^2}{(x-7)^2} =$
 $= \frac{x-14}{x(x-7) \ln 2}$

$$e) f'(x) = 3^{\ln(x^4+2)} \cdot \ln 3 \cdot \frac{4x^3}{x^4+2}$$

$$f) f'(x) = \frac{\frac{3}{x} e^{-x^2-x}}{(e^{-x^2-x})^2} - \frac{\ln x^3 \cdot e^{-x^2-x} \cdot (-2x-1)}{(e^{-x^2-x})^2} = \frac{e^{x^2+x} (3 + (2x^2+x) \ln x^3)}{x}$$

129 Aplica la regla de la cadena para calcular las derivadas de las siguientes funciones trigonométricas.

$$a) f(x) = \sin 3x^2$$

$$b) f(x) = \cos(x^2 + 1)$$

$$c) f(x) = \sin \sqrt{x^2 + 3x}$$

$$d) f(x) = \cos \frac{x-1}{x}$$

$$e) f(x) = \operatorname{tg} \sqrt{x-1}$$

$$f) f(x) = \operatorname{tg} \frac{2}{\sqrt{1-x}}$$

$$a) f'(x) = 6x \cos(3x^2)$$

$$b) f'(x) = -2x \sin(x^2 + 1)$$

$$c) f'(x) = \cos \sqrt{x^2 + 3x} \cdot \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}$$

$$d) f'(x) = -\frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

$$e) f'(x) = (1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x-1}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

$$f) f'(x) = \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{2}{\sqrt{1-x}}\right) \frac{1}{\sqrt{(1-x)^3}} = \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{2}{\sqrt{1-x}}\right) \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x}}$$

130 Aplica la regla de la cadena para calcular las derivadas de las siguientes funciones potenciales.

$$a) f(x) = (3x^4 - 2x + 1)^5$$

$$b) f(x) = \left(\frac{x}{1-x^3}\right)^5$$

$$c) f(x) = (\sqrt[3]{x^3-1})^5$$

$$d) f(x) = (1 + 2e^x)^4$$

$$e) f(x) = \ln^4(x^2 - 1)^3$$

$$f) f(x) = (1 - 3e^x)^6$$

$$g) f(x) = \sin^2 x^2$$

$$h) f(x) = \cos^3(x^2 - 7x + 1)$$

$$i) f(x) = \operatorname{tg}^2(x^3 - 8)$$

$$j) f(x) = \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}\right)^3$$

$$a) f'(x) = 5(3x^4 - 2x + 1)^4(12x^3 - 2)$$

$$b) f'(x) = 5\left(\frac{x}{1-x^3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1-x^3-x \cdot (-3x^2)}{(1-x^3)^2}\right) = \frac{5x^4(1+2x^3)}{(1-x^3)^6}$$

$$c) f'(x) = 5x^2(x^3 - 1)^{2/3} = 5x^2 \sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}$$

$$d) f'(x) = 8(1 + 2e^x)^3 e^x$$

$$e) f'(x) = 4 \ln^3(x^2 - 1)^3 \cdot \frac{1}{(x^2 - 1)^3} \cdot 3(x^2 - 1)^2 \cdot 2x = \frac{24x \ln^3(x^2 - 1)^3}{x^2 - 1}$$

$$f) f'(x) = -18e^x(1 - 3e^x)^5$$

$$g) f'(x) = 4x \sin x^2 \cos x^2 = 2x \sin(2x^2)$$

$$h) f'(x) = -3 \cos^2(x^2 - 7x + 1) \cdot \sin(x^2 - 7x + 1) \cdot (2x - 7)$$

$$i) f'(x) = 6x^2 \operatorname{tg}(x^3 - 8) \cdot [1 + \operatorname{tg}^2(x^3 - 8)]$$

$$j) f'(x) = \frac{3}{x^2} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}\right)^2 \cdot \left(\sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\right)$$

131 Aplica la regla de la cadena para determinar la función derivada de cada una de estas funciones.

$$a) f(x) = \ln \operatorname{tg} x$$

$$b) f(x) = \sqrt{\cos x}$$

$$c) f(x) = \log_2 x^2$$

$$d) f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x^2$$

$$e) f(x) = \operatorname{tg} \ln x$$

$$f) f(x) = \cos \sqrt{x}$$

$$g) f(x) = (\log_2 x)^2$$

$$h) f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg}^2 x$$

$$a) f'(x) = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x)$$

$$b) f'(x) = \frac{1}{2} (\cos x)^{-1/2} \cdot (-\operatorname{sen} x) = \\ = -\frac{\operatorname{sen} x}{2\sqrt{\cos x}}$$

$$c) f'(x) = \frac{1}{x^2 \cdot \ln 2} \cdot 2x = \frac{2}{x \ln 2}$$

$$d) f'(x) = \frac{1}{1 + (x^2)^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1 + x^4}$$

$$e) f'(x) = (1 + \operatorname{tg}^2 \ln x) \cdot \frac{1}{x}$$

$$f) f'(x) = (-\operatorname{sen} \sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2} = \\ = -\frac{\operatorname{sen} \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

$$g) f'(x) = 2 \log_2 x \cdot \frac{1}{x \ln 2}$$

$$h) f'(x) = 2 \operatorname{arctg} x \cdot \frac{1}{1 + x^2}$$

$$a) f'(x) = e^{(\sqrt{x}+1)^2} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$$

$$b) f'(x) = \frac{2x - 2x^2 + 2}{x^2 - 1}$$

$$c) f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2e^x + \log_2 3x}} \left(2e^x + \frac{1}{x \ln 2} \right)$$

$$d) f'(x) = 2[\ln(\ln x)] \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$e) f'(x) = 6x \cos x^2 + 4 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$f) f'(x) = \frac{6 \operatorname{sen}(x^3 + 1)^2 \cdot (x^3 + 1)x^2}{\cos^2(x^3 + 1)^2}$$

$$g) f'(x) = 2x \operatorname{sen}[\operatorname{sen}(\operatorname{tg} x^2)] \cos(\operatorname{tg} x^2) \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x^2)$$

$$h) f'(x) = \frac{2x \cos x^2 \cos(2x)}{\operatorname{sen} x^2 \cos(2x)} + \\ + \frac{2 \operatorname{sen} x^2 \operatorname{en}(2x)}{\operatorname{sen} x^2 \cos(2x)} = \\ = 2x \operatorname{tg} x^2 + 2 \operatorname{tg}(2x)$$

$$i) f'(x) = 2e^{2x} \cos x^2 - 2xe^{2x} \operatorname{sen} x^2$$

$$j) f'(x) = \frac{-2x^2 \operatorname{sen} x^3}{\sqrt[3]{\cos x^3}}$$

132 Deriva estas funciones aplicando la regla de la cadena.

$$a) f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$$

$$b) f(x) = \operatorname{tg}(\cos(\operatorname{sen} x))$$

$$a) f'(x) = \cos(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)) \cdot \cos(\operatorname{sen} x) \cdot \cos x$$

$$b) f'(x) = \frac{-\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) \cdot \cos x}{\cos^2(\cos(\operatorname{sen} x))}$$

133 Deriva las siguientes funciones.

$$a) f(x) = e^{(\sqrt{x}+1)^2}$$

$$b) f(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 1}{e^{2x}}\right)$$

$$c) f(x) = \sqrt{2e^x + \log_2 3x}$$

$$d) f(x) = [\ln(\ln x)]^2$$

$$e) f(x) = 3 \operatorname{sen} x^2 + 2 \operatorname{sen}^2 x$$

$$f) f(x) = \sec(x^3 + 1)^2$$

$$g) f(x) = -\cos(\operatorname{sen}(\operatorname{tg} x^2))$$

$$h) f(x) = \ln \frac{\operatorname{sen} x^2}{\cos 2x}$$

$$i) f(x) = e^{2x} \cdot \cos x^2$$

$$j) f(x) = \sqrt[3]{\cos^2 x^3}$$

134 Calcula la derivada.

$$a) f(x) = \left(\frac{2x^4}{5} - \frac{3x^3}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x}{2} + \frac{2}{3} \right)^5$$

$$b) f(x) = \sqrt{\operatorname{sen}^3 x - \cos^2(3x - 1) + \operatorname{tg} \frac{-3}{x^2 + 2}}$$

$$c) f(x) = \operatorname{tg}^4 \left(\frac{\sqrt{4x^2 + 10x - 1}}{x - 16} \right)$$

$$a) f'(x) = 5 \left(\frac{2x^4}{5} - \frac{3x^3}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x}{2} + \frac{2}{3} \right)^4 \cdot \\ \cdot \left(\frac{8x^3}{5} - \frac{9x^2}{2} - \frac{2x}{3} + \frac{1}{2} \right)$$

$$b) f'(x) = \\ = \frac{3 \operatorname{sen}^2 x \cos x}{2 \sqrt{\operatorname{sen}^3 x - \cos^2(3x - 1) + \operatorname{tg} \frac{-3}{x^2 + 2}}} + \\ + \frac{+ 6 \cos(3x - 1) \operatorname{sen}(3x - 1)}{2 \sqrt{\operatorname{sen}^3 x - \cos^2(3x - 1) + \operatorname{tg} \frac{-3}{x^2 + 2}}} + \\ + \frac{\frac{6x}{x^2 + 2} \cdot \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{-3}{x^2 + 2} \right)}{2 \sqrt{\operatorname{sen}^3 x - \cos^2(3x - 1) + \operatorname{tg} \frac{-3}{x^2 + 2}}}$$

$$c) f'(x) = 4tg^3\left(\frac{\sqrt{4x^2 + 10x - 1}}{x - 16}\right) \cdot \left(1 + tg^2\left(\frac{\sqrt{4x^2 + 10x - 1}}{x - 16}\right)\right) \cdot \frac{(4x + 5)(x - 16) - \sqrt{4x^2 + 10x - 1}}{(x - 16)^2}$$

135 INVESTIGA. Calcula las derivadas de estas funciones.

a) $f(x) = (x^2 + 1)^{3x}$

b) $f(x) = x^{3x^2 - 7x - 1}$

c) $f(x) = (3x^2 + 1)^{\ln x}$

d) $f(x) = \operatorname{sen}^x x^2$

e) $f(x) = \cos^{3x} 2x$

f) $f(x) = (\sqrt[5]{-x^3 - 15})^{x^2}$

g) $f(x) = (-x^{10} + 3x^5 - 1)^{\operatorname{sen} x}$

h) $f(x) = x^{-5x^3 + 4x - 1}$

a) $\ln f(x) = 3x \ln(x^2 + 1)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 3 \ln(x^2 + 1) + \frac{6x^2}{x^2 + 1}$$

$$f'(x) = \left(3 \ln(x^2 + 1) + \frac{6x^2}{x^2 + 1}\right) (x^2 + 1)^{3x}$$

b) $\ln f(x) = (3x^2 - 7x - 1) \ln x$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (6x - 7) \ln x + \frac{3x^2 - 7x - 1}{x}$$

$$f'(x) = \left((6x - 7) \ln x + \frac{3x^2 - 7x - 1}{x}\right) \cdot x^{3x^2 - 7x - 1}$$

c) $\ln f(x) = \ln x \ln(3x^2 + 1)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\ln(3x^2 + 1)}{x} + \ln x \cdot \frac{6x}{3x^2 + 1}$$

$$f'(x) = \left(\frac{\ln(3x^2 + 1)}{x} + \frac{6x \ln x}{3x^2 + 1}\right) \cdot (3x^2 + 1)^{\ln x}$$

d) $\ln f(x) = x \ln(\operatorname{sen} x^2)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(\operatorname{sen} x^2) + \frac{2x^2 \cos x^2}{\operatorname{sen} x^2}$$

$$f'(x) = \left[\ln(\operatorname{sen} x^2) + \frac{2x^2 \cos x^2}{\operatorname{sen} x^2}\right] \operatorname{sen}^x x^2$$

e) $\ln f(x) = 3x \ln(\cos(2x))$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 3 \ln(\cos(2x)) - 6x \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)}$$

$$f'(x) = \left[3 \ln(\cos(2x)) - 6x \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)}\right] \cdot \cos^{3x}(2x)$$

f) $\ln f(x) = \frac{x^2}{5} \ln(-x^3 - 15)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2x}{5} \ln(-x^3 - 15) + \frac{3x^4}{5(x^3 + 15)}$$

$$f'(x) = \left(\frac{2x}{5} \ln(-x^3 - 15) + \frac{3x^4}{5(x^3 + 15)}\right) \cdot (\sqrt[5]{-x^3 - 15})^{x^2}$$

g) $\ln f(x) = \operatorname{sen} x \ln(-x^{10} + 3x^5 - 1)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \ln(-x^{10} + 3x^5 - 1) + \frac{(-10x^9 + 15x^4) \operatorname{sen} x}{-x^{10} + 3x^5 - 1}$$

$$f'(x) = (\cos x \ln(-x^{10} + 3x^5 - 1) + \frac{(-10x^9 + 15x^4) \operatorname{sen} x}{-x^{10} + 3x^5 - 1})$$

h) $\ln f(x) = (-5x^3 + 4x - 1) \ln x$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (-15x^2 + 4) \ln x + (-5x^3 + 4x - 1) \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = ((-15x^2 + 4) \ln x + \frac{4x - 5x^3 - 1}{x}) \cdot x^{-5x^3 + 4x - 1}$$

136 INVESTIGA. Sean $g(x) = f(x) - f(2x)$ y $h(x) = f(x) - f(4x)$. Si se sabe que $g'(1) = 5$ y $g'(2) = 7$, ¿cuánto vale $h'(1)$?

$$g'(x) = f'(x) - 2f'(2x)$$

$$g'(1) = f'(1) - 2f'(2) = 5$$

$$g'(2) = f'(2) - 2f'(4) = 7$$

Tenemos estas dos ecuaciones:

$$f'(1) - 2f'(2) = 5$$

$$2f'(2) - 4f'(4) = 14$$

Sumándolas obtenemos la ecuación:

$$f'(1) - 4f'(4) = 19$$

$$h'(x) = f'(x) - 4f'(4x) \rightarrow$$

$$\rightarrow h'(1) = f'(1) - 4f'(4) = 19$$

- 137 **RETO.** Sea la ecuación
 ... $2x f(x) + e^{f(x)} \cos x = e$. Si $f(0) = 1$,
 ¿cuánto vale $f'(x)$ en $x = 0$?

Derivamos la ecuación.

$$2f(x) + 2xf'(x) + e^{f(x)}f'(x)\cos x - e^{f(x)}\operatorname{sen} x = 0$$

Sustituimos $x = 0$.

$$\begin{aligned} 2f(0) + 2 \cdot 0 \cdot f'(0) + e^{f(0)}f'(0)\cos 0 - e^{f(0)}\operatorname{sen} 0 &= 0 \rightarrow \\ \rightarrow 2 \cdot 1 + 0 + e^1 \cdot f'(0) \cdot 1 - e^1 \cdot 0 &= 0 \rightarrow \\ \rightarrow f'(0) &= \frac{-2}{e} \end{aligned}$$

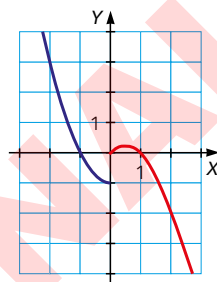
4. Halla el valor de parámetros para que una función sea continua y derivable

- 138 Dada la función
 ... $f(x) = \begin{cases} ax - 2 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + b\sqrt{x} - 5 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$
 resuelve.
- Calcula $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.
 - ¿Qué condición deben cumplir a y b para que la función sea continua en $x = 1$?
 - Halla $f'(x)$ cuando $x < 1$.
 - Calcula $f'(x)$ cuando $x > 1$.
 - ¿Qué condición deben cumplir a y b para que exista $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x)$?
 - ¿Puede una función no continua en un punto ser derivable en dicho punto?
 - Calcula a y b para que la función sea continua y derivable en $x = 1$.
 - $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a \cdot 1 - 2 = a - 2$
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1^2 + b\sqrt{1} - 5 = b - 4$
 - $a - 2 = b - 4 \rightarrow a = b - 2$
 - $f'(x) = a$ si $x < 1$
 - $f'(x) = 2x + \frac{b}{2\sqrt{x}}$, si $x > 1$
 - $a = 2 \cdot 1 + \frac{b}{2\sqrt{1}} \rightarrow a = 2 + \frac{b}{2}$
 - No, para que una función sea derivable en un punto debe ser necesariamente continua en él.

$$g) \left. \begin{aligned} a &= b - 2 \\ a &= 2 + \frac{b}{2} \end{aligned} \right\} \rightarrow a = 6 \quad b = 18$$

- 139 Esta es la gráfica de $f(x)$ para $a = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < a \\ -x^2 + x & \text{si } x \geq a \end{cases}$$



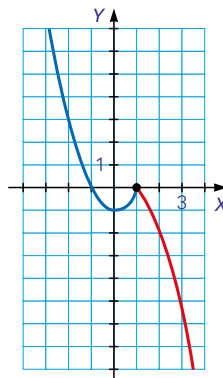
Halla los posibles valores de a para que sea continua en todos sus puntos y represéntala. ¿Es también derivable?

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) &= a^2 - 1 \\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) &= -a^2 + a \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} \rightarrow a^2 - 1 &= -a^2 + a \rightarrow \\ \rightarrow 2a^2 - a - 1 &= 0 \rightarrow \\ \rightarrow a_1 &= 1 \quad a_2 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Para $a = 1$ y $a = -\frac{1}{2}$, $f(x)$ es continua en todos los números reales.

Para $a = 1$:

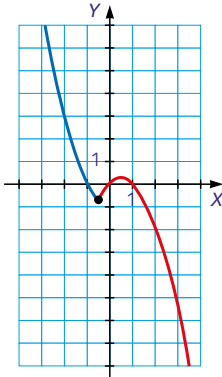


$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x < a \\ -2x & x \geq a \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = -1 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$\rightarrow f$ no es derivable para $a = 1$.

Para $a = -\frac{1}{2}$:



$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1/2^-} f'(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -1/2^+} f'(x) = 2 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$\rightarrow f$ no es derivable para $a = -\frac{1}{2}$.



140 ●●○ Calcula el valor de los parámetros para que estas funciones sean continuas y derivables en $\mathbb{R}$.

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + a & \text{si } x < 0 \\ -x^2 - bx + 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 1 & \text{si } x < 0 \\ -x^2 - x + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

En ambos casos, como son funciones polinómicas, son continuas y derivables. Hay que estudiar el punto $x = 0$.

$$a) \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = a \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3 \end{array} \right\} \rightarrow f \text{ es continua si } a = 3.$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & x < 0 \\ -2x - b & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -b \end{array} \right\} \rightarrow$$

$\rightarrow f$ es derivable si $b = -2$.

$$b) \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = b \end{array} \right\} \rightarrow$$

$\rightarrow f$ es continua si $b = -1$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & x < 0 \\ -2x - 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = a \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -1 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$\rightarrow f$ es derivable si $a = -1$.

141 ●●○ Halla el valor de a y b para que estas funciones sean continuas y derivables en $\mathbb{R}$.

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 5 & \text{si } x < 2 \\ \frac{1}{x-1} + b & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & \text{si } x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) La función polinómica es continua y derivable, y la racional no está definida en $x = 1$. Hay que estudiar el punto $x = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4 + 2a - 5 = 2a - 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1 + b \end{array} \right\} \rightarrow$$

$\rightarrow f$ es continua si cumple:

$$2a - 1 = 1 + b \rightarrow 2a - b = 2$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & x < 2 \\ \frac{-1}{(x-1)^2} & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = 4 + a \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = -1 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$\rightarrow f$ es derivable si $a = -5$.

Por tanto, f es continua y derivable si $a = -5$ y cumple: $2 \cdot (-5) - b = 2 \rightarrow b = -12$.

b) La función polinómica es continua y derivable, y la logarítmica no está definida en $x \leq 0$. Hay que estudiar el punto $x = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a + b + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$\rightarrow f$ es continua si cumple:

$$a + b + 1 = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & x < 1 \\ \frac{1}{x} & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) &= 2a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) &= 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

→ f es derivable si cumple: $2a + b = 1$

Por tanto, f es continua y derivable si cumple:

$$\left. \begin{aligned} a + b + 1 &= 0 \\ 2a + b &= 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow a = 2 \quad b = -3$$

- 142** ●●● Calcula a para que la función sea continua en $\mathbb{R}$. ¿Es derivable en todos los puntos?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 1 & \text{si } x < a \\ -x + 4x^2 + 2 & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

Las funciones polinómicas son continuas. Hay que estudiar el punto $x = a$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) &= a^2 + 3a + 1 \\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) &= -a^2 + 4a + 2 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

→ f es continua si cumple:

$$a^2 + 3a + 1 = -a^2 + 4a + 2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2a^2 - a - 1 = 0 \rightarrow a_1 = 1 \quad a_2 = \frac{-1}{2}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 3 & x < a \\ -2x + 4 & x \geq a \end{cases}$$

Las funciones polinómicas son derivables. Hay que estudiar el punto $x = a$. Solo hay que comprobarlo para los valores de a obtenidos, ya que son los únicos para los que la función es continua.

Para $a = 1$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) &= 5 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) &= 2 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

→ f no es derivable en $x = 1$ para $a = 1$.

$$\text{Para } a = \frac{-1}{2}:$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1/2^-} f'(x) &= 2 \\ \lim_{x \rightarrow -1/2^+} f'(x) &= 5 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

→ f no es derivable en $x = \frac{-1}{2}$

para $a = \frac{-1}{2}$.

- 143** ●●● Dada la función $f(x) = ax^2 + bx + 2$, responde.

a) ¿Qué condición deben cumplir a y b para que la gráfica de la función pase por el punto $(1, 0)$?

b) ¿Qué condición deben cumplir a y b para que la recta tangente a $f(x)$ en $x = 1$ tenga como pendiente -1 ?

c) Calcula el valor de a y de b para que se cumplan las condiciones anteriores a la vez.

$$\begin{aligned} a) \quad f(1) &= 0 \rightarrow a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 2 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow a + b = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad f'(x) &= 2ax + b \rightarrow \\ &\rightarrow f'(1) = 2 \cdot a \cdot 1 + b = -1 \rightarrow \\ &\rightarrow 2a + b = -1 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} a + b &= -2 \\ 2a + b &= -1 \end{aligned} \right\} \rightarrow a = 1 \quad b = -3$$

- 144** ●●● Calcula a , b y c en la función

$f(x) = ax^2 + bx + c$, sabiendo que su gráfica pasa por $(0, -3)$ y $(2, 5)$ y que la recta tangente en $x = -1$ es horizontal.

$$f(0) = c = -3 \quad f(2) = 4a + 2b + c = 5$$

$$f'(x) = 2ax + b \rightarrow$$

$$\rightarrow f'(-1) = -2a + b$$

$$\left. \begin{aligned} c &= -3 \\ 4a + 2b + c &= 5 \\ -2a + b &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases}$$

Por tanto: $f(x) = x^2 + 2x - 3$

- 145** ●●● Determina los valores de a , b y c para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ pase por el origen de coordenadas, su recta tangente en $x = 1$ tenga pendiente 3 y la segunda derivada en $x = -1$ sea nula.

$$f(0) = c = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \rightarrow$$

$$\rightarrow f'(1) = 3 + 2a + b = 3$$

$$f''(x) = 6x + 2a \rightarrow$$

$$\rightarrow f''(-1) = -6 + 2a = 0$$

$$\left. \begin{aligned} c &= 0 \\ 3 + 2a + b &= 3 \\ -6 + 2a &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -6 \\ c = 0 \end{cases}$$

Por tanto: $f(x) = 3x^3 - 6x^2$

- 146 ●●○ Calcula a , b y c en la función $f(x) = ax^4 + bx + c$, sabiendo que su gráfica pasa por $(1, -1)$, la recta tangente en $x = 1$ es horizontal y la recta tangente en $x = 0$ es paralela a la recta $y = 4x$.

$$f(1) = a + b + c = -1$$

$$f'(x) = 4ax^3 + b \rightarrow f'(1) = 4a + b = 0$$

La pendiente de la recta $y = 4x$ es 4, entonces:

$$f'(0) = b = 4$$

$$\begin{cases} a + b + c = -1 \\ 4a + b = 0 \\ b = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 4 \\ c = -4 \end{cases}$$

- 147 ●●○ Determina los valores de a , b y c para que la función $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ pase por $(1, 6)$ y las rectas tangentes a la gráfica en $x = 1$ y $x = 2$ sean horizontales.

$$f(1) = 2 + a + b + c = 6$$

$$f'(x) = 6x^2 + 2ax + b$$

$$f'(1) = 6 + 2a + b = 0$$

$$f'(2) = 24 + 4a + b = 0$$

$$\begin{cases} 2 + a + b + c = 6 \\ 6 + 2a + b = 0 \\ 24 + 4a + b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -9 \\ b = 12 \\ c = 1 \end{cases}$$

- 148 ●●○ Determina los valores de a , b y c para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ pase por $(3, 0)$ y las rectas tangentes a su gráfica en $x = 2$ y $x = 4$ sean paralelas al eje X .

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

Pasa por $(3, 0)$.

$$f(3) = 0 \rightarrow 27 + 9a + 3b + c = 0$$

La recta tangente en $x = 2$ tiene pendiente nula.

$$f'(2) = 0 \rightarrow 12 + 4a + b = 0$$

La recta tangente en $x = 4$ tiene pendiente nula.

$$f'(4) = 0 \rightarrow 48 + 8a + b = 0$$

$$\begin{cases} 9a + 3b + c = 0 \\ 4a + b + 12 = 0 \\ 8a + b + 48 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -9 \\ b = 24 \\ c = -18 \end{cases}$$

- 149 ●●○ Halla los valores de a y b para que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tengan la misma recta tangente en $x = 3$.

$$f(x) = ax^2 - 1 \quad g(x) = x^2 + 3x + b$$

$$f'(x) = 2ax \quad g'(x) = 2x + 3$$

$$f'(3) = g'(3) \rightarrow 6a = 9 \rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 1 \rightarrow f(3) = \frac{25}{2}$$

$$f(3) = g(3) \rightarrow g(3) = 9 + 9 + b = \frac{25}{2} \rightarrow b = \frac{-11}{2}$$

- 150 ●●○ Considera la función $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4$.

- a) Calcula los puntos en que la gráfica de la función tiene recta tangente horizontal.
b) Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos calculados en el apartado anterior.
c) Halla los puntos de la curva que tienen por recta tangente una paralela a esa recta.

$$a) f'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \rightarrow 3x(x + 2) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = -2$$

$$f(0) = 4 \rightarrow (0, 4)$$

$$f(-2) = 8 \rightarrow (-2, 8)$$

$$b) m = \frac{8 - 4}{-2 - 0} = -2$$

$$4 = -2 \cdot 0 + n \rightarrow n = 4 \rightarrow y = -2x + 4$$

$$c) f'(x) = 3x^2 + 6x = -2 \rightarrow 3x^2 + 6x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

- 151 ●●○ **INVESTIGA.** Calcula el valor del parámetro c sabiendo que las funciones $f(x) = x^2 + c$ y $g(x) = \sqrt{x}$ se tocan tangencialmente en un punto.

$$f'(x) = 2x \quad g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$2x = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow 16x^3 = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

$$f\left(\frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right) = g\left(\frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{4} \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + c = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow c = \frac{3}{4} \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

- 152** La recta cuya ecuación es $y = 9x - 14$ es tangente a la función $y = x^3 - 3x + k$. Determina en qué punto son tangentes y halla el valor de k . La función tiene dos puntos en los que la recta tangente es horizontal. Hállalos y escribe la ecuación de esas rectas.

$$\left. \begin{array}{l} y' = 3x^2 - 3 \\ y' = 9 \end{array} \right\} \rightarrow 3x^2 - 3 = 9 \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1 = 2 \quad x_2 = -2$$

Son tangentes en $x = 2$ y $x = -2$.

Para $x = 2$:

$$\left. \begin{array}{l} y(2) = 2 + k \\ y(2) = 4 \end{array} \right\} \rightarrow 2 + k = 4 \rightarrow k = 2$$

Para $x = -2$:

$$\left. \begin{array}{l} y(-2) = -2 + k \\ y(-2) = -32 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow -2 + k = -32 \rightarrow k = -30$$

Si la recta tangente es horizontal, tiene pendiente 0.

$$y' = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = 1 \quad x = -1$$

Para $k = 2, x = 1$:

$$y(1) = 0 \rightarrow y = 0$$

Para $k = 2, x = -1$:

$$y(-1) = 4 \rightarrow y = 4$$

Para $k = -30, x = 1$:

$$y(1) = -32 \rightarrow y = -32$$

Para $k = -30, x = -1$:

$$y(-1) = -28 \rightarrow y = -28$$

- 153** Halla el valor de k para que la función

$f(x) = \frac{kx - 5}{2x + 3}$ cumpla que $f'(-1) = 19$.

$$f'(x) = \frac{k(2x + 3) - 2(kx - 5)}{(2x + 3)^2} = \frac{3k + 10}{(2x + 3)^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow f'(-1) = \frac{3k + 10}{1} = 19 \rightarrow k = 3$$

- 154** ¿Cuánto tiene que valer a para que la función $f(x) = x \ln x - ax$ tenga en

el punto de abscisa e , una recta tangente paralela a la bisectriz del primer cuadrante?

$$f'(x) = \ln x + 1 - a$$

La pendiente de la bisectriz del primer cuadrante es 1. Por tanto:

$$f'(e) = 1$$

$$f'(e) = 1 + 1 - a = 1 \rightarrow a = 1$$

- 155** Considera la curva $f_1(x) = \sqrt{5-x}$ y la recta de ecuación $f_2(x) = ax$. Calcula el valor de a para que la recta tangente a $f_1(x)$ sea:

a) Perpendicular a $f_2(x)$ en $x = 1$.

b) Paralela a $f_2(x)$ en $x = -4$.

$$f'_1(x) = \frac{-1}{2\sqrt{5-x}}$$

$$\text{a) } f'(1) = \frac{-1}{a} \rightarrow \frac{-1}{2\sqrt{5-1}} = \frac{-1}{a} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{-1}{4} = \frac{-1}{a} \rightarrow a = 4$$

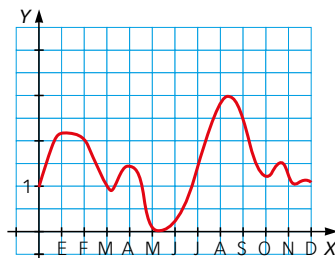
$$\text{b) } f'(-4) = a \rightarrow \frac{-1}{2\sqrt{5+4}} = a \rightarrow$$

$$\rightarrow a = \frac{-1}{6}$$

FAKE NEWS

¿El cambio climático existe?

Un equipo de científicos y científicas ha presentado los resultados de su último estudio sobre la variación de temperatura en Vostok, el punto más frío de la Antártida. Los resultados se han utilizado por grupos negacionistas del cambio climático para asegurar que no existe.



Y tú, ¿qué opinas?

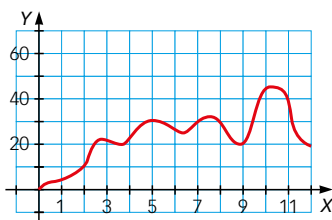
La T.V.M. $([0, 12])$ es 0, y parece que no hay variación media de temperatura y que, por tanto, no existe el cambio climático, pero si calculamos...

por ejemplo la T.V.M. $([1, 6])$ o T.V.M. $([6, 9])$ vemos que es positiva y que, por tanto, sí está existiendo esa variación de temperatura que hace que en la Antártida se estén notando las consecuencias del cambio climático.

Esta actividad puede utilizarse para trabajar el ODS 13, acción por el clima.

PROBLEMAS APARENTEMENTE DISTINTOS

- 156 Fíjate en la siguiente gráfica.



- a) Halla la T.V.M. en $[0, 6]$ y $[6, 12]$.
¿Cuál es mayor?

- b) Calcula la T.V.M. en $[0, 12]$.

$$f(6) \approx 26$$

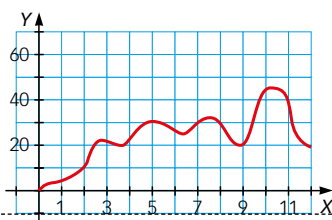
$$\begin{aligned} \text{a) } T.V.M.([0, 6]) &= \frac{f(6) - f(0)}{6 - 0} = \frac{26 - 0}{6} = \\ &= \frac{13}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T.V.M.([6, 12]) &= \frac{f(12) - f(6)}{12 - 6} = \\ &= \frac{20 - 26}{6} = -1 \end{aligned}$$

Es mayor la T.V.M. $([0, 6])$.

$$\begin{aligned} \text{b) } T.V.M.([0, 12]) &= \frac{f(12) - f(0)}{12 - 0} = \\ &= \frac{20 - 0}{12} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

- 157 La gráfica muestra el ahorro de una cooperativa a lo largo de un año (en miles de euros).



- a) Halla la T.V.M. en cada mitad del año y compáralas. ¿En qué mitad del año les fue mejor?

- b) Compara la T.V.M. anual con las dos semestrales.

$$\begin{aligned} \text{a) } T.V.M.([0, 6]) &= \frac{f(6) - f(0)}{6 - 0} = \frac{26 - 0}{6} = \\ &= \frac{13}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T.V.M.([6, 12]) &= \frac{f(12) - f(6)}{12 - 6} = \\ &= \frac{20 - 26}{6} = -1 \end{aligned}$$

Les fue mejor en la primera mitad del año, cuando el ahorro fue mayor.

$$\begin{aligned} \text{b) } T.V.M.([0, 12]) &= \frac{f(12) - f(0)}{12 - 0} = \\ &= \frac{20 - 0}{12} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

La tasa de ahorro anual fue menor comparada con la del primer semestre, pero mayor comparada con la del segundo semestre.

- 158 Sea la función $f(x) = \frac{\sin(10x) + 1}{2x + 3}$, $x \geq 0$.

- a) Calcula $f'(x)$.

- b) Halla $f'(1)$. La recta tangente en $x = 1$, ¿es creciente o decreciente?

- c) Calcula $f'(0)$.

$$\text{a) } f'(x) = \frac{(20x + 30)\cos(10x) - 2\sin(10x) - 2}{(2x + 3)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f'(1) &= \frac{50\cos 10 - 2\sin 10 - 2}{25} = \\ &= -1,71 < 0 \end{aligned}$$

Por tanto, la recta tangente en $x = 1$ es decreciente.

$$\text{c) } f'(0) = \frac{28}{9} = 3,11$$

- 159 Zahira juega con un yoyó cuya altura viene descrita por la función

$$h(t) = \frac{\sin(10t) + 1}{2t + 3}, t \geq 0.$$



- a) Halla la función de la velocidad del yoyó en cada instante.
 b) ¿Cuál es su velocidad tras 1 segundo?
 ¿Qué significa el signo del resultado?
 c) ¿Se puede calcular la velocidad en $t = 0$?

$$\begin{aligned} \text{a) } v(t) &= h'(t) = \\ &= \frac{(20t + 30) \cos(10t) - 2 \sin(10t) - 2}{(2t + 3)^2} = \\ &= \frac{30 \cos(10t) - 2 \sin(10t) - 2}{(2t + 3)^2} \end{aligned}$$

- b) $v(1) = -1,71$ m/s
 El signo $-$ indica que el yoyó se mueve en ese instante en la dirección que se ha considerado negativa, es decir, está subiendo.

- c) Sí, es la velocidad inicial.

$$v(0) = \frac{28}{9} = 3,11 \text{ m/s}$$

- 160 Sean las funciones $f(x) = 2,3 \cdot 10^8 \cdot x^{\frac{3}{2}}$
 y $g(x) = \frac{x}{12}$.

- a) Calcula $f'(x)$.
 b) Halla la derivada de $f(g(x))$.

$$\begin{aligned} \text{a) } f'(x) &= 3,45 \cdot 10^8 \cdot \sqrt{x} \\ \text{b) } f(g(x))' &= f'(g(x)) \cdot g'(x) = \\ &= 3,45 \cdot 10^8 \cdot \sqrt{\frac{x}{12}} \cdot \frac{1}{12} = \\ &= 1,44 \cdot 10^7 \cdot \sqrt{\frac{x}{3}} \end{aligned}$$

- 161 Los kilómetros recorridos por la sonda Voyager II tras t años hasta Júpiter vienen dados por la función $d(t) = 2,3 \cdot 10^8 \cdot t^{\frac{3}{2}}$ ($0 < t < 5$). Además, se sabe que los años en Júpiter se calculan con $j(t) = \frac{t}{12}$.

- a) Calcula la velocidad a la que viajaba en kilómetros por años terrestres.
 b) ¿Y su velocidad en kilómetros por años jovianos?

$$\begin{aligned} \text{a) } v(t) &= d'(t) = \\ &= 3,45 \cdot 10^8 \cdot \sqrt{t} \text{ km/año terrestre} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } d(j(t))' &= d'(j(t)) \cdot j'(t) = \\ &= 3,45 \cdot 10^8 \cdot \sqrt{\frac{t}{12}} \cdot \frac{1}{12} = \\ &= 1,44 \cdot 10^7 \cdot \sqrt{\frac{t}{3}} \text{ km/año joviano} \end{aligned}$$

¿PARA QUÉ SIRVE...?

- 1 ¿Qué es el coste marginal de la producción del que se habla en el texto?

El coste marginal es la derivada del coste total de producción con respecto a la producción.

- 2 Explica qué significa el término *insumo* que aparece en el texto anterior.

Los insumos son todos los elementos necesarios para producir un bien.

- 3 ¿Por qué se puede considerar el coste marginal de producción como una derivada?

Porque mide la tasa de variación del coste total respecto de la variación de la producción.

- 4 Teniendo en cuenta la función coste, ¿qué signo crees que tendrá el parámetro a ?
 Tendrá signo positivo.

- 5 Halla la función del coste marginal en el ejemplo de la manufactura de medicamentos si a y b son números reales.
 $f(x) = 3ax^2 + 2bx$

- 6 ¿Qué tipo de función es el coste marginal?
 Es una función cuadrática cuya representación es una parábola cóncava. En el eje de abscisas se representa la producción y en el eje de ordenadas los costes.