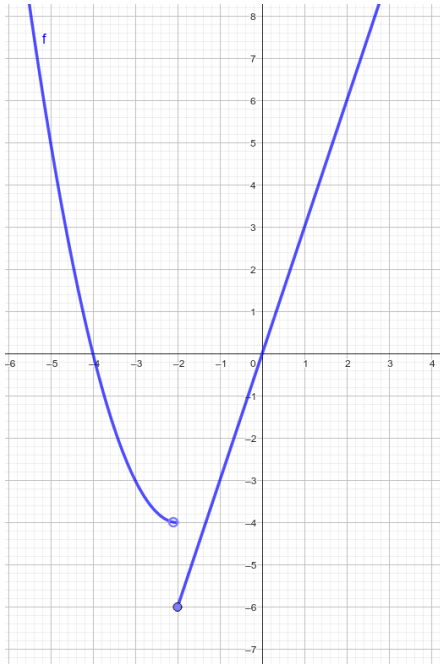


TEMA 9 LÍMITES DE FUNCIONES

1. LÍMITE EN UN PUNTO. CONTINUIDAD

1. Calcula los límites de las funciones a partir de sus gráficas:

a)



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -5} f(x) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -6$$

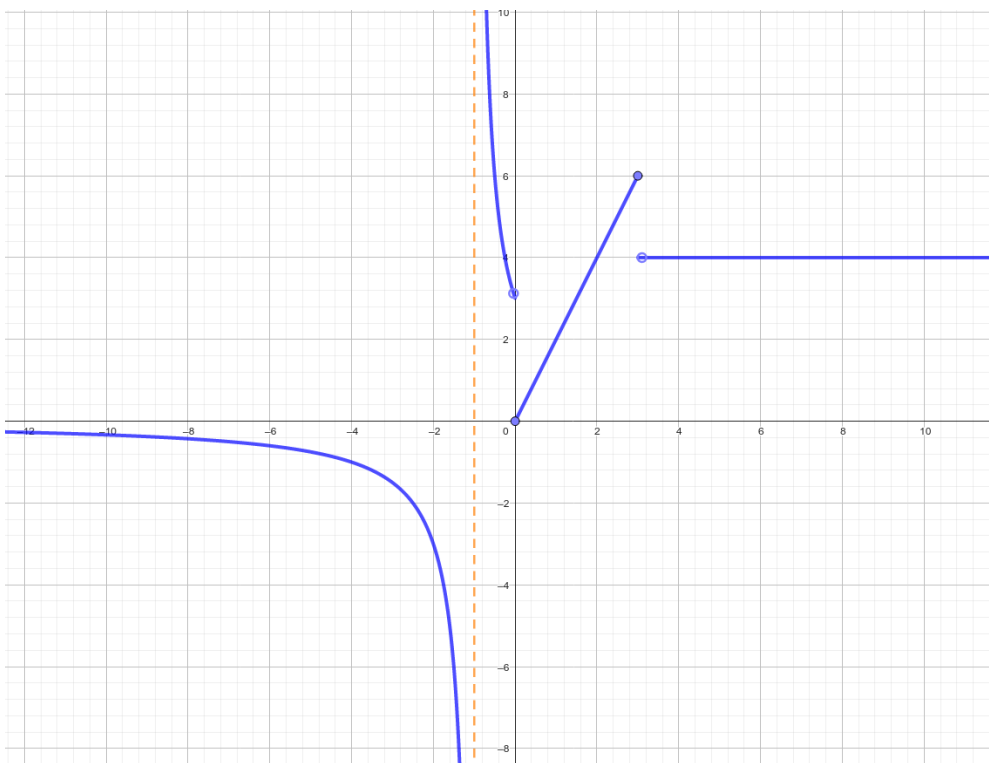
$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \text{No existe}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

b)



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \text{No existe}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \text{No existe}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

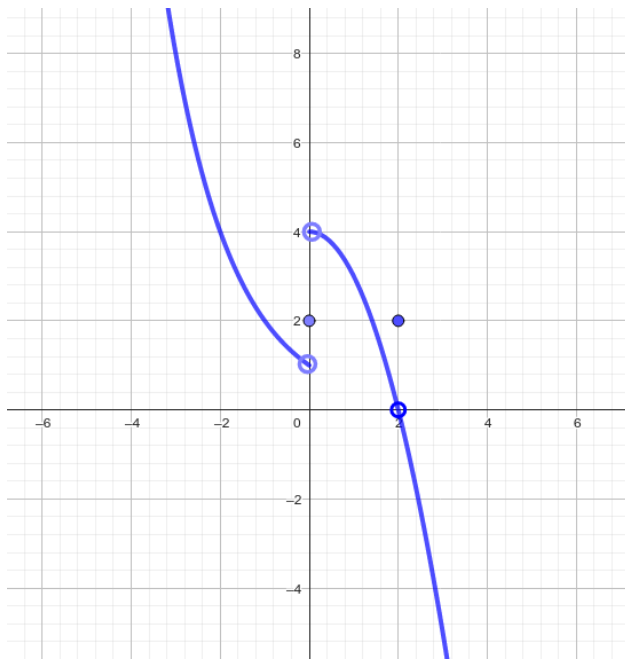
$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \text{No existe}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4$$

c)



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \text{No existe}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

2. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x}{x+2} = \frac{3 \cdot 4}{4+2} = \frac{12}{6} = 2$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} (3x+4)^3 = (3 \cdot (-1) + 4)^3 = 1^3 = 1$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-2}{x+2} = \frac{-2-2}{-2+2} = \frac{-4}{0} = \infty$ No hay límite:

$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x-2}{x+2} = +\infty$ valores menores que -2 $\frac{-2,001-2}{-2,001+2} = \frac{-}{-} = +$

$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x-2}{x+2} = -\infty$ valores mayores que -2 $\frac{-1,999-2}{-1,999+2} = \frac{-}{+} = -$

d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-1}{(x+2)^2} = \frac{2 \cdot 3 - 1}{(3+2)^2} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$

e) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x-1}{(x+2)^2} = \frac{2 \cdot (-2) - 1}{(-2+2)^2} = \frac{-5}{0} = \infty$ En este caso el límite existe y es $-\infty$:

$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x-1}{(x+2)^2} = -\infty$ valores menores que -2 $\frac{2(-2,001)-1}{(-2,001+2)^2} = \frac{-}{+} = -$

$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x-1}{(x+2)^2} = -\infty$ valores mayores que -2 $\frac{2(-1,999)-1}{(-1,999+2)^2} = \frac{-}{+} = -$

$$f) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{4-1}{4^2-1} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+2}{x^2-16} = \frac{2 \cdot (-2) - 1}{(-2+2)^2} = \frac{-5}{0} = \infty \quad \text{En este caso el límite no existe:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x+2}{x^2-16} = -\infty \quad \text{valores menores que 4} \quad \frac{3,999+2}{3,999^2-16} = \frac{+}{-} = -$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x+2}{x^2-16} = +\infty \quad \text{valores mayores que 4} \quad \frac{4,001+2}{4,001^2-16} = \frac{+}{+} = +$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{x+5}-5} = \frac{\sqrt{2 \cdot 4+1}-1}{\sqrt{4+5}-5} = \frac{3-1}{3-5} = -1$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x+5}-5} = \frac{\sqrt{2 \cdot 4+1}-3}{\sqrt{4+5}-5} = \frac{3-3}{3-5} = \frac{0}{-2} = 0$$

$$j) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x-1}{x^2-4} \cdot \frac{3x-1}{3x} = \frac{2(-1)-1}{(-1)^2-4} \cdot \frac{3(-1)-1}{3(-1)} = \frac{-3}{-3} \cdot \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{4x+5}-3 = \sqrt{4 \cdot 5+5}-3 = 5-3 = 2$$

$$l) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1+\operatorname{sen}x}{\operatorname{cos}x} = \frac{1+\operatorname{sen} \pi}{\operatorname{cos} \pi} = \frac{1+0}{-1} = -1$$

$$m) \lim_{x \rightarrow -1} (\sqrt{2x+6}-3)^{2x+3} = (\sqrt{2(-1)+6}-3)^{2(-1)+3} = (-1)^1 = -1$$

$$n) \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{3x-2}{4x+4} \right)^{\frac{x}{x-2}} = \left(\frac{3 \cdot 4-2}{4 \cdot 4+4} \right)^{\frac{4}{4-2}} = \left(\frac{10}{20} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

3. Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ en las funciones definidas a trozos:

$$a) f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & x < 1 \\ 2 & x = 1 \\ 2(x-1) & x > 1 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1-x^2) = 1-0^2 = 1$$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ hay que estudiar los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x^2) = 1-1^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2(x-1)) = 2(1-1) = 0$$

Son iguales, por tanto, existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} 2(x-1) = 2(2-1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x < 2 \\ \frac{x-1}{4} & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0} = \infty \quad \text{hay que estudiar los límites laterales:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad (1/(0,99999)^2 = +) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{1,001^2} = +\infty$$

Son iguales, por tanto, existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1/1^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \text{hay que estudiar los límites laterales:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-1}{4} = \frac{1}{4}$$

Son iguales, por tanto, existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1/4$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

4. Representa las funciones definidas a trozos y estudia su continuidad indicando el tipo de discontinuidad si la hay:

$$a) f(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ 2 & x = 0 \\ 2^x & x > 0 \end{cases}$$

La función es continua para $x < 0$, porque $f(x) = 2x$ es una recta.

La función es continua en $x > 0$, porque $f(x) = 2^x$ es exponencial.

Hay que estudiar la continuidad en $x = 0$:

1º) Existe $f(0) = 2$

2º) No existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ porque los límites laterales son distintos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2^x = 2^0 = 1$$

Por tanto, la función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$. En $x = 0$ presenta una discontinuidad de salto finito.

$$b) \quad g(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x} & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ 2x+1 & x > 0 \end{cases}$$

La función es continua para $x < 0$, porque $f(x) = -1/x$ es una función racional que no se anula en ese intervalo.

La función es continua en $x > 0$, porque $f(x) = 2x+1$ es una recta.

Hay que estudiar la continuidad en $x = 0$:

1º) Existe $f(0) = 1$

2º) No existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ porque los límites laterales son distintos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x+1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

Por tanto, la función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$. En $x = 0$ presenta una discontinuidad de salto infinito.

$$c) \quad h(x) = \begin{cases} x^2-4 & x < 3 \\ 2 & 3 \leq x < 6 \\ 8-x & x \geq 6 \end{cases}$$

La función es continua para $x < 3$, porque $f(x) = x^2 - 4$ es una parábola.

La función es continua en $3 < x < 6$, porque $f(x) = 2$ es una recta.

La función es continua en $x > 6$, porque $f(x) = 8-x$ es una recta.

Hay que estudiar la continuidad en $x = 3$ y $x = 6$:

1º) Existe $f(3) = 2$

2º) No existe $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ porque los límites laterales son distintos:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} x^2 - 4 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} 2 = 2$$

1º) Existe $f(6) = 2$

2º) Existe $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = 2$ porque los límites laterales son iguales:

$$\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^-} 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} 8 - x = 2$$

3º) $f(6) = \lim_{x \rightarrow 6} f(x)$ la función es continua en $x = 6$

Por tanto, la función es continua en $\mathbb{R} - \{3\}$. En $x = 3$ presenta una discontinuidad de salto finito.

TEMA 9 LÍMITES DE FUNCIONES

1. LÍMITE EN UN PUNTO. CONTINUIDAD

5. Indica el dominio, la continuidad y los puntos de discontinuidad de estas funciones indicando el tipo de discontinuidad que presentan:

a) $f(x) = \frac{x+3}{x+2}$

Las funciones racionales son continuas excepto en los puntos que anulan el denominador, es decir, en el dominio: $\text{Dom}f = \mathbb{R} - \{-2\}$

En $x = -2$ presenta una discontinuidad de salto infinito:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x+3}{x+2} = -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+3}{x+2} = +\infty$$

b) $f(x) = \log(x-2)$

Las funciones logarítmicas son continuas en su dominio, es decir, en los valores positivos: $x - 2 > 0 \rightarrow \text{Dom}f = (2, +\infty)$

c) $f(x) = 3^{x+2}$

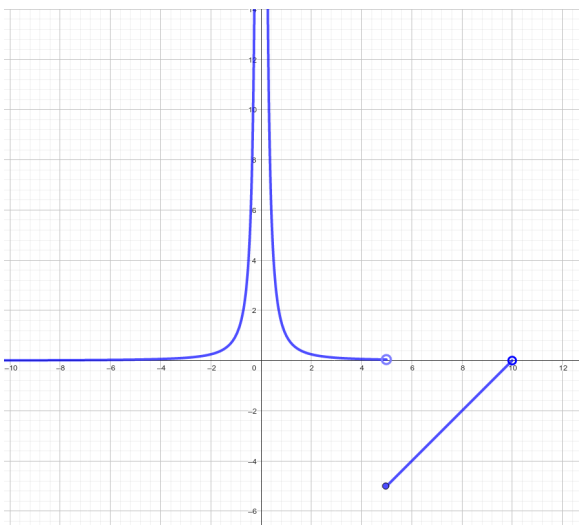
Las funciones exponenciales son continuas en todo \mathbb{R} $\text{Dom}f = \mathbb{R}$

d) $f(x) = \sqrt{2x-4}$

Las funciones con radicales de índice par son continuas en su dominio, es decir, en los valores que hacen el radicando positivo: $2x-4 \geq 0 \rightarrow x \geq 2$ $\text{Dom}f = [2, +\infty)$

6. Estudia la continuidad de estas funciones indicando los tipos de discontinuidad si los hay:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x < 5 \\ x-10 & 5 \leq x < 10 \end{cases}$



La función es continua para $x < 0$ y $0 < x < 5$ porque $f(x) = 1/x^2$ es una función racional que no se anula en ese intervalo.

La función es continua en $5 < x < 10$, porque $f(x) = x - 10$ es una recta.

Hay que estudiar la continuidad en $x = 0$:

1º) No existe $f(0)$

2º) Existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ porque los

límites laterales son iguales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Al no existir la función en $x = 0$ no es continua, es una discontinuidad de salto infinito. Hay que estudiar la continuidad en $x = 5$:

TEMA 9 LÍMITES DE FUNCIONES

1. LÍMITE EN UN PUNTO. CONTINUIDAD

1º) Existe $f(5) = 5 - 10 = -5$

2º) No existe $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ porque los límites laterales no son iguales:

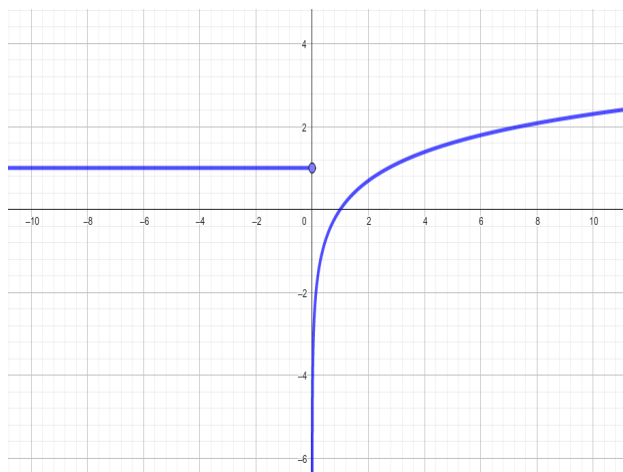
$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{25}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} 5 - 10 = -5$$

Al no existir $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ y ser los límites laterales finitos es una discontinuidad de salto finito.

Por tanto, la función es continua en $(-\infty, 10) - \{0, 5\}$. En $x = 0$ presenta una discontinuidad de salto infinito y en $x = 5$ de salto finito.

b) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ \ln x & x > 0 \end{cases}$



La función es continua para $x < 0$ porque $f(x) = 1$ es una recta constante.

La función es continua en $x > 0$, porque $f(x) = \ln x$ es una función logarítmica.

Hay que estudiar la continuidad en $x = 0$:

1º) Existe $f(0) = 1$

2º) No existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ porque los

límites laterales no son iguales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

Al no existir $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ no es continua en $x = 0$, es una discontinuidad de salto infinito.

Por tanto, la función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

7. Calcula el valor de los parámetros a y b que hacen continuas las funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x - a & x < 1 \\ 2 & x = 1 \\ 3x + b & x > 1 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x-a} & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ 2^{x-b} & x > 0 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} x^2 - ax - 4 & x < 3 \\ b - x & x \geq 3 \end{cases}$

d) $h(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x + a & 0 \leq x < \pi \\ \operatorname{cos} x & x = \pi \\ \operatorname{tg}(x - b) & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$

a) La función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$ porque está definida por rectas. Para que sea continua en $x = 1$ tienen que existir y ser iguales: $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

TEMA 9 LÍMITES DE FUNCIONES**1. LÍMITE EN UN PUNTO. CONTINUIDAD**

$$f(1) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x - a = 2 - a \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 3x + b = 3 + b$$

Por tanto, $2 - a = 2 \rightarrow a = 0$ y $3 + b = 2 \rightarrow b = -1$. La función quedaría definida como:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \leq 1 \\ 3x - 1 & x > 1 \end{cases}$$

b) $a = 1 \quad b = 0$

c) $5 - 3a = b - 3 \rightarrow b = 8 - 3a, \quad a \in \mathbb{R}$ (a cualquier número real)

d) $\sin \pi + a = \cos \pi \rightarrow a = -1$

$\operatorname{tg}(\pi - b) = \cos \pi = -1 \rightarrow \pi - b = 3\pi/4 + \pi k, \quad k \in \mathbb{R} \rightarrow b = \pi/4 + \pi k, \quad k \in \mathbb{R}$

De todos modos, $\operatorname{tg}(x - \pi/4)$ no es continua cuando $x - \pi/4 = 3\pi/2$. Es decir, para $x = 7\pi/4$ la función no es continua. No hay un valor de b que solucione esta discontinuidad de salto infinito.

8. Calcula los siguientes límites resolviendo las indeterminaciones:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{0}{0}$ Indeterminación

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-8x+16} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-8x+16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{(x-4)^2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x-4} = \frac{1}{0}$$
 calculo los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{x-4} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{x-4} = +\infty \quad \text{no existe límite}$$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-6}{\sqrt{x+6}-3} = \frac{0}{0}$ Indeterminación

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-6}{\sqrt{x+6}-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(2x-6)(\sqrt{x+6}+3)}{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(2x-6)(\sqrt{x+6}+3)}{(\sqrt{x+6})^2 - 3^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} 2(\sqrt{x+6}+3) = 2(\sqrt{3+6}+3) = 2(3+3) = 12$$

d) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{3x+4}-\sqrt{5x-4}} = \frac{0}{0}$ Indeterminación

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{3x+4}-\sqrt{5x-4}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{2x+1}+3)(\sqrt{3x+4}+\sqrt{5x-4})}{(\sqrt{3x+4}-\sqrt{5x-4})(\sqrt{2x+1}+3)(\sqrt{3x+4}+\sqrt{5x-4})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{((\sqrt{2x+1})^2-3^2)(\sqrt{3x+4}+\sqrt{5x-4})}{((\sqrt{3x+4})^2-(\sqrt{5x-4})^2)(\sqrt{2x+1}+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2x-8)(\sqrt{3x+4}+\sqrt{5x-4})}{(-2x+8)(\sqrt{2x+1}+3)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2x-8)(\sqrt{3x+4}+\sqrt{5x-4})}{-(2x-8)(\sqrt{2x+1}+3)} = \frac{\sqrt{3 \cdot 4+4}+\sqrt{5 \cdot 4-4}}{-(\sqrt{2 \cdot 4+1}+3)} = \frac{4+4}{-(3+3)} = \frac{-8}{6} = \frac{-4}{3}$$

e) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1-\sin x} = \frac{0}{0}$ Indeterminación (NO ENTRA EN EXAMEN)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1-\sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x(1+\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x(1+\sin x)}{1-\sin^2 x} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x(1+\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{\cos x} = \frac{1+\sin \frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\pi}{2}} = \frac{1+1}{0} = \infty \text{ calculo los límites laterales:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1+\sin x}{\cos x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1+\sin x}{\cos x} = -\infty$$

no existe límite

El próximo curso se resolverá más fácilmente por la regla de L'Hôpital

9. Las siguientes funciones presentan una discontinuidad evitable en $x = 2$, redefine el valor de $f(2)$ para que sean continuas en ese punto:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x^2-4} & x < 2 \\ 2 & x = 2 \\ \frac{x}{8} & x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{1-\sqrt{x-1}} & x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ x-4 & x > 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2-x-4 & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \log(4x+2) & 0 < x < 2 \\ 4 & x = 2 \\ 2^{x-1}-1 & x > 2 \end{cases}$

a) $f(2) = \frac{1}{4}$

TEMA 9 LÍMITES DE FUNCIONES

1. LÍMITE EN UN PUNTO. CONTINUIDAD

(La función es continua para $x < (-\infty, -2) \cup (-2, 2)$ porque $f(x)$ es racional, excepto en los puntos que anulan el denominador: $x = -2$.

La función es continua en $x > 2$, porque $f(x) = x/8$ es una recta.

No es necesario este estudio de la continuidad, el ejercicio no lo pide)

Hay que estudiar la continuidad en $x = 2$:

1º) Existe $f(2) = 2$

2º) Existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ porque los límites laterales son iguales:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación se resuelve:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{8} = \frac{1}{4}$$

3º) Para que sea continua en $x = 2$ es necesario redefinir $f(2)$ para que $f(2) = 1/4$.

b) Hay que estudiar la continuidad en $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{1-\sqrt{x-1}} & x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ x-4 & x > 2 \end{cases}$$

1º) Existe $f(2) = 1$

2º) Existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ porque los límites laterales son iguales:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{1-\sqrt{x-1}} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación se resuelve:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(1+\sqrt{x-1})}{(1-\sqrt{x-1})(1+\sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(1+\sqrt{x-1})}{2-x} = \lim_{x \rightarrow 2^-} -(1+\sqrt{x-1}) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x-4 = -2$$

3º) Para que sea continua en $x = 2$ es necesario redefinir $f(2)$ para que $f(2) = -2$.

c) $f(2) = -2$

d) $f(2) = 1$

10. Dada la función $f(x) = \frac{x^2-9}{x^3-3x^2}$ halla $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$.

Estudia su continuidad y clasifica sus discontinuidades. Indica que valor debería tomar $f(x)$ en $x = 3$ para evitar la discontinuidad.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 9}{x^3 - 3x^2} = \frac{-9}{0} \quad \text{calculo los límites laterales:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 9}{x^3 - 3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x-3)(x+3)}{x^2(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+3}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 9}{x^3 - 3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x-3)(x+3)}{x^2(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+3}{x^2} = +\infty$$

Por tanto, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 9}{x^3 - 3x^2} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^3 - 3x^2} = \frac{0}{0} \quad \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^3 - 3x^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x^2(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x^2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^3 - 3x^2} = \frac{9-9}{-27-27} = 0$$

Es una función racional y por tanto continua excepto en los puntos que anulan el denominador: $\mathbb{R} - \{0, 3\}$. En $x = 0$ tiene una discontinuidad de salto infinito, mientras que en $x = 3$ tiene una discontinuidad evitable.

El valor de la función en 3 debe ser $2/3$ para evitar la discontinuidad:

$$f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2/3$$