DESAFÍO

Visto y no visto

El primer año se presentaron 13 personas al torneo y la joven Alicia fue la ganadora. ¿En qué posición se puso? Si el segundo año se presentaron 100 personas y también ganó Alicia, ¿en qué posición comenzó?

Alicia siempre conseguía ganar, sin importar cuántas personas se presentaran. ¿Cómo sabía en qué posición debía colocarse?

Se trata del Problema de Flavio Josefo, descrito en el libro *La guerra de los judíos*, en el libro 3, capítulo 8, parte 7.

Trata sobre que cada persona que ocupa un lugar par desaparece. Si hay n personas inicialmente, llamemos $f(n)$ a la posición del ganador del torneo.

En la primera vuelta todas las personas en posición par desaparecen. En la segunda vuelta desaparecen todas las personas que han pasado a ocupar posición par, etc.

Si el número inicial de personas es par, entonces la persona en la posición x durante la segunda vuelta alrededor del círculo estaba originalmente en la posición $2x - 1$ (sea cual sea el valor de x). Es decir, sea $n = 2j$, la persona en $f(j)$ que ganará estaba originalmente en la posición $2f(j) - 1$. Por lo tanto, $f(2j) = 2f(j) - 1$.

Si el número inicial de personas es impar, entonces la primera persona desaparecerá al final de la primera vuelta. Una vez más, durante la segunda vuelta la nueva segunda persona desaparece, después la cuarta, etc. En este caso, la persona en posición x está originalmente en la posición $2x + 1$. Por lo tanto, $f(2j + 1) = 2f(j) + 1$.

Cuando contabilizamos los valores de n y $f(n)$, vemos el patrón.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$f(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1

Esto sugiere que $f(n)$ es una secuencia creciente impar que retorna con $f(n) = 1$, siempre que el índice n sea una potencia de 2. Por tanto, si elegimos m y t de manera que $n = 2^m + t$ y $0 \le t \le 2^m$ entonces $f(t) = 2n + 1$ o específicamente:

$f(n) = 2f(n) = 2(n - 2^{\log_2 n})f(n) =$
$= 2(n - 2^{\log_2 n}) + 1$

En nuestro caso, el primer año Alicia se sitúa en la 11.ª posición.

$n = 13 = 23 + 5$, con $0 \le 5 \le 23 = 8 \rightarrow$
$\rightarrow f(13) = 2 \cdot 5 + 1 = 11$

El segundo año: $n = 100 = 26 + 36$,
con $0 \le 36 \le 26 = 64 \rightarrow$
$\rightarrow f(100) = 2 \cdot 36 + 1 = 73$

Y en general, si hay n magos, Alicia sabe que debe situarse en la posición que cumple que si $n \le 2m + t$ y $0 \le t \le 2m \rightarrow$
$\rightarrow f(n) = 2t + 1$.

PIENSA

PÁG. 197. Halla el dominio de esta función.

$$\frac{\ln\left(\sqrt{15} - \sqrt{x^2 - 1}\right)}{x + 2}$$

El denominador no puede ser nulo.
$x + 2 \neq 0 \rightarrow x \neq -2$

Por tanto, -2 no forma parte del dominio.

El argumento del logaritmo ha de ser siempre positivo.

$\sqrt{15} - \sqrt{x^2 - 1} > 0 \rightarrow \sqrt{15} > \sqrt{x^2 - 1} \rightarrow$
$\rightarrow 15 > x^2 - 1 \rightarrow 16 > x^2 \rightarrow x \in (-4, 4)$

El dominio de esta función es $(-4, -2) \cup (-2, 4)$.

PÁG. 202. Halla el dominio de esta función.

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{x}}$$

El denominador no puede ser nulo.

La raíz, al ser de índice impar, no plantea restricciones.

Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$

PÁG. 204. Calcula la función inversa de $f(x) = e^{x^2}$.

$y = e^{x^2} \rightarrow x = e^{y^2} \rightarrow \ln x = y^2 \rightarrow$
$\rightarrow y = \sqrt{\ln x} \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{\ln x}$

PÁG. 205. Halla el dominio de $f(x) = \log(\log x)$.

Dom $f(x) = (1, +\infty)$

PÁG. 209. Escribe $f(x) = |\ln x|$ como una función definida a trozos.

$$f(x) = \begin{cases} -\ln x & \text{si } \ln x < 0 \\ \ln x & \text{si } \ln x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -\ln x & \text{si } 0 < x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

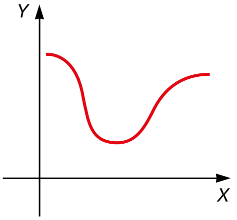
PÁG. 210. Dadas las funciones $f(x) = x + 2$ y $g(x) = \ln(x + 1)$, ¿puedes calcular el valor de $\left(\frac{f}{g}\right)(-2)$?

No se puede, ya que $g(x)$ no está definida en $x = -2$.

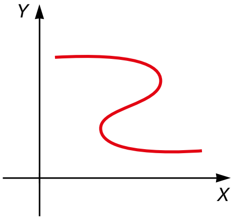
ACTIVIDADES

1 Justifica si las siguientes gráficas corresponden a funciones.

a)



b)



a) La gráfica corresponde a una función, porque a cada valor de x le corresponde un único valor de y.

b) La gráfica no corresponde a una función, porque hay valores de x a los que les corresponden varios valores de y.

2 Indica, de manera razonada, si la relación entre las dos magnitudes es una función o no en cada uno de los siguientes casos.

a) La cantidad de fruta que compra una familia, en kilos, y el número de piezas de fruta que se lleva.

b) El número de kilos de fruta que compra una familia y el precio de la compra.

c) La cantidad de fruta que compra una familia, en kilos, y el precio de un kilo de fruta.

a) No es una función porque un mismo peso puede corresponder a distinto número de piezas de fruta.

b) Es una función, ya que para cada cantidad de fruta comprada hay un único precio según el peso en kilos.

c) Si nos referimos a un único tipo de fruta, sí es una función, puesto que a un mismo peso le corresponde un único precio.

3 Determina el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 9}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

e) $f(x) = \cos(x + 1)$

f) $f(x) = \sqrt{3x - 1}$

g) $f(x) = \log(x - 16)$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

c) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

d) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

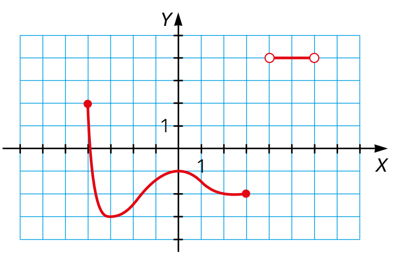
e) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

f) $\text{Dom } f = \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$

g) $\text{Dom } f = (16, +\infty)$

h) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

4 Halla el dominio y el recorrido de la función cuya gráfica es la siguiente.



$\text{Dom } f = [-4, 3] \cup (4, 6)$

$\text{Im } f = [-3, 2] \cup \{4\}$

5 Estudia la simetría de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x}$ c) $f(x) = \dfrac{x^4 - 5}{3x^2}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x - 7}{x^2}$ d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

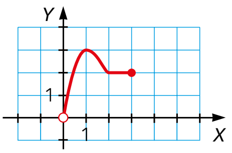
a) $f(-x) = \dfrac{(-x)^2 - 1}{2(-x)} = \dfrac{x^2 - 1}{-2x} =$
$= -\dfrac{x^2 - 1}{2x} = -f(x) \rightarrow f(x)$ es impar.

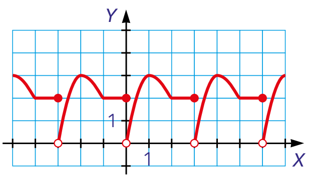
b) $f(-x) = \dfrac{(-x)^2 - 6(-x) - 7}{(-x)^2} =$
$= \dfrac{x^2 + 6x - 7}{x^2} \rightarrow f(x)$ no es par ni impar.

c) $f(-x) = \dfrac{(-x)^4 - 5}{3(-x)^2} = \dfrac{x^4 - 5}{3x^2} = f(x) \rightarrow$
$\rightarrow f(x)$ es par.

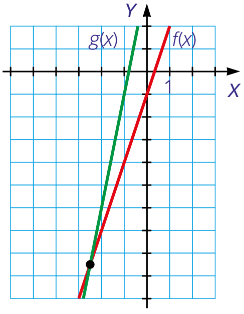
d) $f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 4} = \sqrt{x^2 - 4} = f(x) \rightarrow$
$\rightarrow f(x)$ es par.

6 Completa la gráfica de esta función periódica de periodo 3.





7 Representa, sobre los mismos ejes, las funciones $f(x) = 3x - 1$ y $g(x) = 5x + 4$. Halla el punto en el que se intersecan las dos funciones.



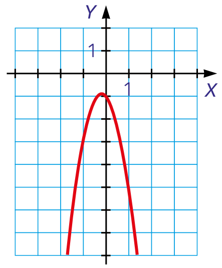
$3x - 1 = 5x + 4 \rightarrow$
$\rightarrow 2x = -5 \rightarrow$
$\rightarrow x = -\dfrac{5}{2} \rightarrow$
$\rightarrow y = -\dfrac{17}{2} \rightarrow$
El punto de intersección es:
$\left(-\dfrac{5}{2}, -\dfrac{17}{2}\right)$

8 Representa gráficamente las siguientes funciones cuadráticas.

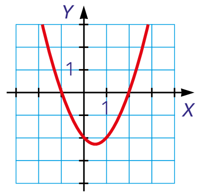
a) $f(x) = -3x^2 - x - 1$

b) $f(x) = x^2 - x - 2$

a) $V\left(-\dfrac{1}{6}, -\dfrac{11}{12}\right)$

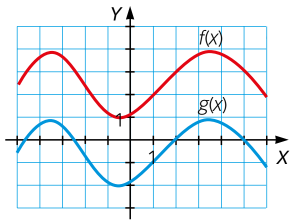


b) $V\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{9}{4}\right)$

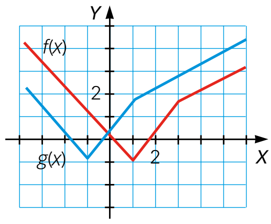


9 Expresa $g(x)$ en función de $f(x)$.

a)



b)



a) $g(x) = f(x) - 3$ b) $g(x) = f(x + 2)$

10 Representa gráficamente esta función.

$$f(x) = x^2 - 2x + 1$$

A partir de ella, representa las siguientes funciones.

a) $g(x) = x^2 - 2x + 3$

b) $h(x) = x^2 - 2x - 2$

c) $i(x) = (x - 1)^2 - 2(x - 1) + 1$

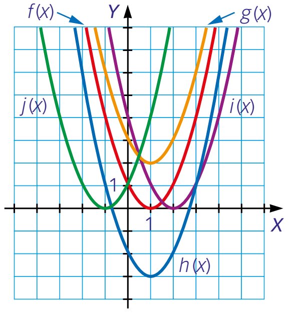
d) $j(x) = x^2 + 2x + 1$

a) $g(x) = f(x) + 2$

b) $h(x) = f(x) - 3$

c) $i(x) = f(x - 1)$

d) $j(x) = f(-x)$



11 Representa gráficamente estas funciones.

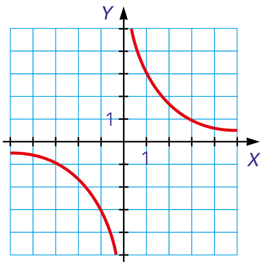
a) $f(x) = \dfrac{3}{x}$

b) $f(x) = -\dfrac{3}{x}$

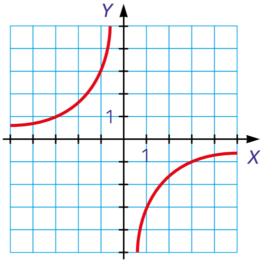
c) $f(x) = \dfrac{-4}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{-1}{x}$

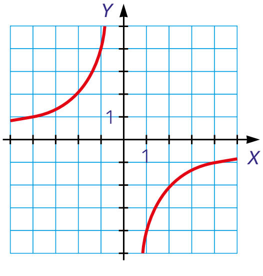
a)



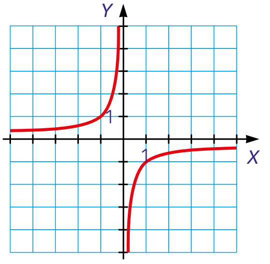
b)



c)



d)



12 Representa gráficamente las siguientes funciones.

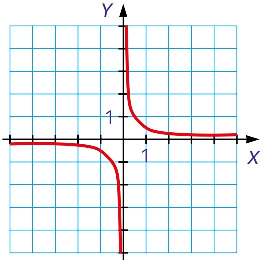
a) $f(x) = \dfrac{1}{2x}$

b) $f(x) = -\dfrac{1}{2x}$

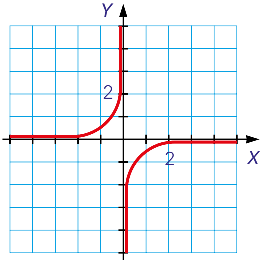
c) $f(x) = \dfrac{5}{3x}$

d) $f(x) = \dfrac{-2}{5x}$

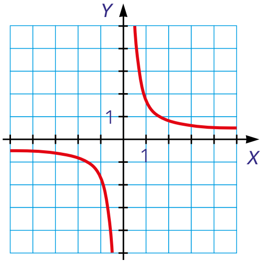
a)



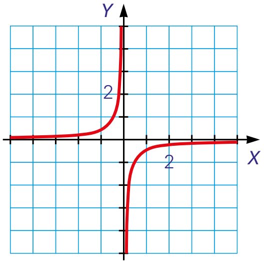
b)



c)



d)



13 Halla el dominio de las funciones con radicales.

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 36}$

a) Dom $f = \mathbb{R}$

b) Dom $f = (-\infty, -6] \cup [6, +\infty)$

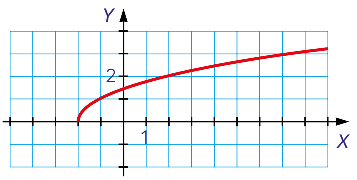
14 Representa gráficamente estas funciones.

a) $f(x) = \sqrt{x + 2}$

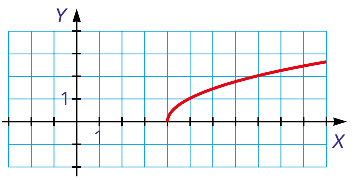
b) $f(x) = \sqrt{x - 4}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

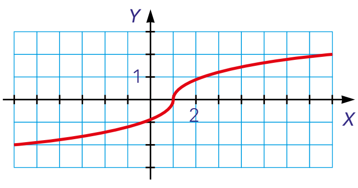
a)



b)



c)



15 Calcula la función inversa de las funciones que aparecen a continuación.

a) $f(x) = -\dfrac{x}{2} + 1$

b) $f(x) = -x^2 + 4$

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{2} - 2}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

a) $x = -\dfrac{y}{2} + 1 \rightarrow f^{-1}(x) = -2x + 2$

b) $x = -y^2 + 4 \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{4 - x}$

c) $x = \sqrt{\dfrac{y}{2} - 2} \rightarrow f^{-1}(x) = 2x^2 + 4$

d) $x = \sqrt[3]{y^2 - 1} \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x^3 + 1}$

16 Averigua cuál es la función inversa de $f(x) = \dfrac{7 + x}{x}$ y realiza lo siguiente.

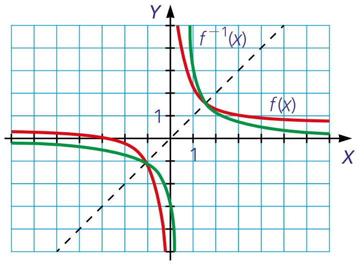
a) Representa las funciones $f(x)$ y $f^{-1}(x)$.

b) Comprueba si sus gráficas son simétricas respecto a la recta $y = x$.

a) $y = \dfrac{7 + x}{x} \rightarrow xy = 7 + x \rightarrow$

$\rightarrow xy - x = 7 \rightarrow x = \dfrac{7}{y - 1} \rightarrow$

$\rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{7}{x - 1}$



b) Las funciones son simétricas respecto a la recta $y = x$.

17 Razona, sin hacer la gráfica, si las siguientes funciones son crecientes o decrecientes.

a) $f(x) = 1{,}2^x$

b) $f(x) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$

c) $f(x) = e^x$

d) $f(x) = 0{,}8^x$

e) $f(x) = \left(\dfrac{\pi}{4}\right)^x$

f) $f(x) = \left(\sqrt{3}\right)^x$

a) Creciente, pues $a > 1$.

b) Decreciente, pues $a < 1$.

c) Creciente, pues $a > 1$.

d) Decreciente, pues $a < 1$.

e) Decreciente pues $a < 1$.

f) Creciente, pues $a > 1$.

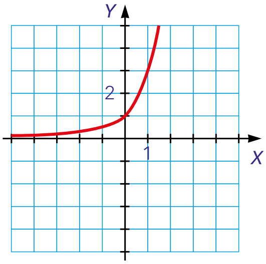
18 Haz una tabla de valores y representa gráficamente estas funciones.

a) $f(x) = 3^x$ d) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

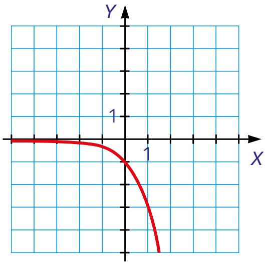
b) $f(x) = -3^x$ e) $f(x) = \left(-\frac{2}{3}\right)^x$

c) $f(x) = 3^{-x}$ f) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$

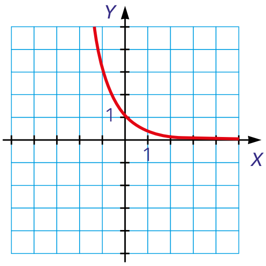
a)



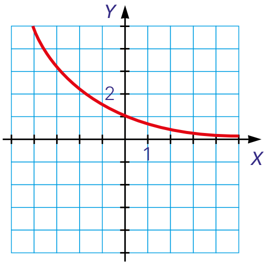
b)



c)



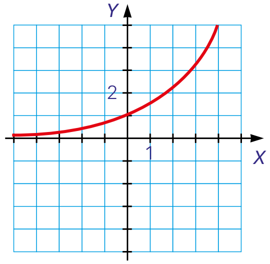
d)



e) $a < 0$

No se puede representar.

f)



19 Razona, sin hacer la gráfica, si las siguientes funciones son crecientes o decrecientes.

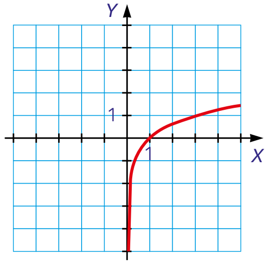
a) $f(x) = \log_{1,2} x$
b) $f(x) = \log_{\frac{2}{3}} x$
c) $f(x) = \log_7 x$
d) $f(x) = \log_{0,8} x$
e) $f(x) = \log_{\sqrt{3}} x$
f) $f(x) = \log_{8,2} x$
g) $f(x) = \log x$
h) $f(x) = \ln x$

a) Creciente, pues $a > 1$.
b) Decreciente, pues $a < 1$.
c) Creciente, pues $a > 1$.
d) Decreciente, pues $a < 1$.
e) Creciente, pues $a > 1$.
f) Creciente, pues $a > 1$.
g) Creciente, pues $a > 1$.
h) Creciente, pues $a > 1$.

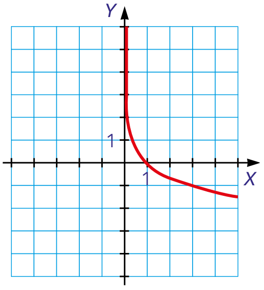
20 Representa gráficamente las funciones que aparecen a continuación.

a) $f(x) = \log_3 x$ e) $f(x) = -\log_3(-x)$
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ f) $f(x) = -\log_{\frac{1}{3}}(-x)$
c) $f(x) = \log_3(-x)$ g) $f(x) = -\log_3 x$
d) $f(x) = -\log_{\frac{1}{3}} x$ h) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(-x)$

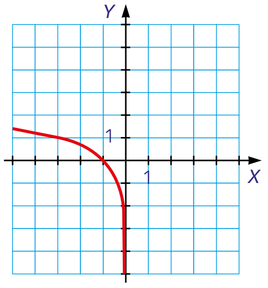
a)



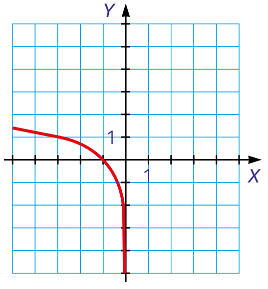
b)



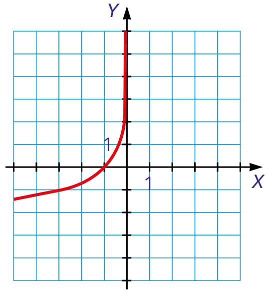
c)



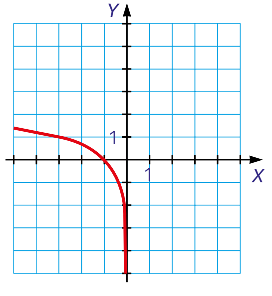
d)



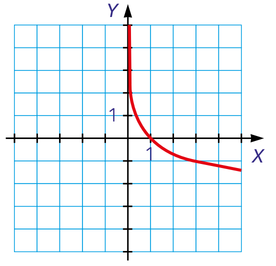
e)



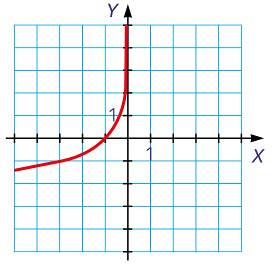
f)



g)



h)

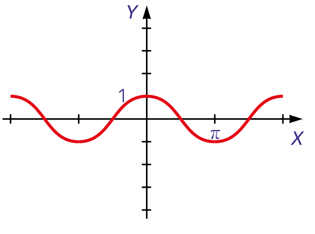


21 Representa gráficamente estas funciones.

a) $f(x) = sen\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

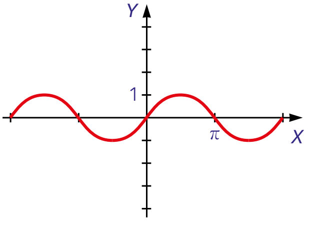
b) $f(x) = cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

a)



$$f(x) = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = cos\ x$$

b)

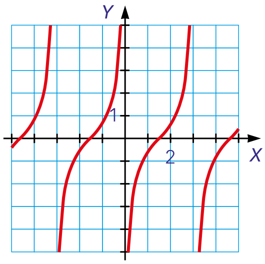


$$g(x) = cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = sen\ x$$

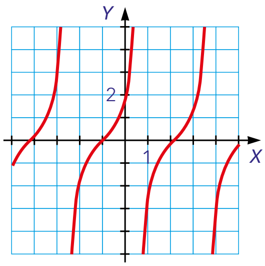
22 Representa estas funciones.

a) $f(x) = tg\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ b) $f(x) = tg\ (x + 1)$

a)



b)



23 Calcula las siguientes expresiones.

a) *arc cos* $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) *arc sen* 0

c) *arc tg* (-1)

a) $\frac{\pi}{4}$

b) 0

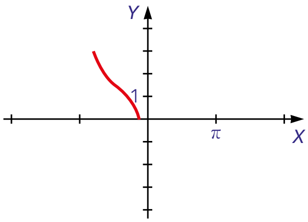
c) $-\frac{\pi}{4}$

24 Representa gráficamente estas funciones.

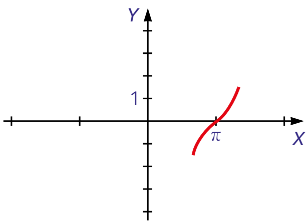
a) $f(x) = \text{arc cos}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

b) $f(x) = \text{arc sen}\,(x - \pi)$

a)



b)



25 Representa gráficamente esta función definida a trozos.

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ x^2 - 7 & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ -7 - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Describe sus principales características e indica los valores de la función en estos puntos.

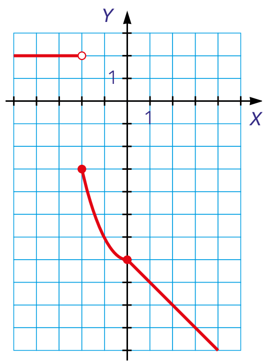
a) $x = -3$ b) $x = -2$ c) $x = 1$

- Primer intervalo $(-\infty, -2)$:
  $f(x) = 2 \rightarrow$ Recta horizontal, paralela al eje X.
- Segundo intervalo $[-2, 0]$:
  $f(x) = x^2 - 7 \rightarrow$ Parábola con mínimo ($a = 1 > 0$) en el vértice $(0, -7)$ y con extremos en $(-2, -3)$ y $(0, -7)$.
- Tercer intervalo $(0, +\infty)$:
  $f(x) = -7 - x \rightarrow$ Recta decreciente ($m = -1 < 0$) con extremo en $f(0) = (0, -7)$.

a) $f(-3) = 2$

b) $f(-2) = (-2)^2 - 7 = -3$

c) $f(1) = -7 - 1 = -8$

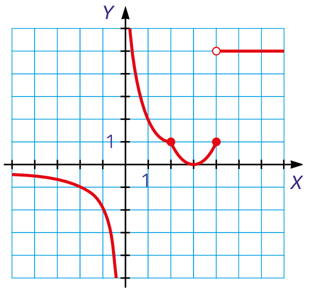


26 Representa la gráfica de esta función describiendo sus principales características y, después, calcula.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 6x + 9 & \text{si } 2 < x \leq 4 \\ 5 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

a) $f(-8)$ c) $f(3)$ e) $f(4)$

b) $f(2)$ d) $f(10)$ f) $f(5)$



- Primer intervalo $(-\infty, 2]$:

  $f(x) = \dfrac{2}{x} \rightarrow$ Rama de hipérbola, decreciente en este intervalo.

- Segundo intervalo $(2, 4]$:

  $f(x) = x^2 - 6x + 9 \rightarrow$ Parábola con mínimo ($a = 1 > 0$) en el vértice $(3, 0)$ y con extremos en $(2, 1)$ y $(4, 1)$.

- Tercer intervalo $(4, +\infty)$:

  $f(x) = 5 \rightarrow$ Recta horizontal, paralela al eje X.

a) $f(-8) = \dfrac{2}{-8} = -\dfrac{1}{4}$

b) $f(2) = \dfrac{2}{2} = 1$

c) $f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 9 = 0$

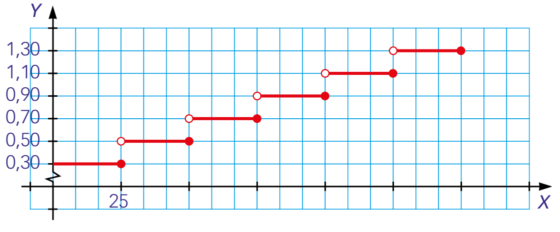
d) $f(10) = 5$

e) $f(4) = 42 - 6 \cdot 4 + 9 = 1$

f) $f(5) = 5$

27 El servicio de correos cobra 0,30 € por los primeros 25 g de envío y, a partir de esa cantidad, cobra 0,20 € por cada 25 g (o fracción) de peso extra. Representa la gráfica del coste del envío de cartas hasta 150 g.

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}30 & \text{si } x \in (0, 25] \\ 0{,}30 + 0{,}20 & \text{si } x \in (25, 50] \\ 0{,}30 + 0{,}20 \cdot 2 & \text{si } x \in (50, 75] \\ \ldots & \end{cases}$$



28 La función que asocia a cada número su parte decimal se puede expresar como:

$$f(x) = x - [x]$$

Representa la función y analiza sus propiedades.

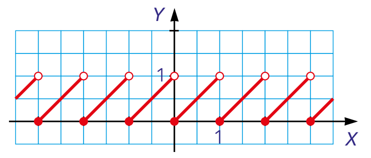
Dom $f = \mathbb{R}$

Im $f = [0, 1)$

No es continua. Todos los números enteros son puntos de discontinuidad inevitable de salto finito.

Es periódica, de periodo 1. No es simétrica.

Es creciente en $(k, k + 1)$, siendo $k \in \mathbb{Z}$.
No tiene máximos ni mínimos.



29 Determina el valor de estas funciones en el punto $x = -5$ teniendo en cuenta que:

$f(x) = x^2 - 3$

$g(x) = \dfrac{x + 3}{x}$

a) $(f - g)(x)$

b) $(f + g)(x)$

c) $(f \cdot g)(x)$

d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

e) $(g - f)(x)$

f) $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x)$

$f(-5) = 22 \qquad g(-5) = \dfrac{2}{5}$

a) $(f - g)(x) = \dfrac{x^3 - 4x - 3}{x} \rightarrow$

$\rightarrow (f - g)(-5) = \dfrac{108}{5}$

b) $(f + g)(x) = \dfrac{x^3 - 2x + 3}{x} \rightarrow$

$\rightarrow (f + g)(-5) = \dfrac{102}{5}$

c) $(f \cdot g)(x) = \dfrac{(x^2 - 3)(x + 3)}{x} \rightarrow$

$\rightarrow (f \cdot g)(-5) = \dfrac{44}{5}$

d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{x^3 - 3x}{x + 3} \rightarrow \left(\dfrac{f}{g}\right)(-5) = 55$

e) $(g - f)(x) = \dfrac{-(x^3 - 4x - 3)}{x} \rightarrow$

$\rightarrow (g - f)(-5) = -\dfrac{108}{5}$

f) $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x) = \left(\dfrac{f}{g}\right)^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{x^3 - 3x} \rightarrow$

$\rightarrow \left(\dfrac{g}{f}\right)(-5) = \dfrac{1}{55}$

30 Halla el valor de las siguientes funciones en los puntos que se indican teniendo en cuenta que:

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad g(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$$

a) $(f \cdot g)(4)$ c) $(f^2)(2)$

b) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(-1)$ d) $\left(\dfrac{g}{f}\right)(9)$

a) $(f \cdot g)(x) = \sqrt{x} \cdot \dfrac{x^2+3}{x+1} \rightarrow$

$\rightarrow (f \cdot g)(4) = \dfrac{38}{5}$

b) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\sqrt{x} \cdot (x+1)}{x^2+3} \rightarrow$

$\rightarrow$ No existe $\left(\dfrac{f}{g}\right)(-1)$ porque $\sqrt{-1}$ no es un número real.

c) $f^2(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x \rightarrow f^2(2) = 2$

d) $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x) = \left(\dfrac{f}{g}\right)^{-1}(x) = \dfrac{x^2+3}{\sqrt{x} \cdot (x+1)} \rightarrow$

$\rightarrow \left(\dfrac{g}{f}\right)(9) = \dfrac{14}{5}$

31 Determina el valor de la composición de funciones que se indica en cada apartado, en $x = -4$, teniendo en cuenta que:

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = \frac{x-1}{x}$$

a) $(f \circ g)(x)$ c) $(f \circ f)(x)$

b) $(g \circ f)(x)$ d) $(g \circ g)(x)$

a) $(f \circ g)(-4) = f(g(-4)) = f\left(\dfrac{5}{4}\right) = \dfrac{25}{16}$

b) $(g \circ f)(-4) = g(f(-4)) = g(16) = \dfrac{15}{16}$

c) $(f \circ f)(-4) = f(f(-4)) = f(16) = 256$

d) $(g \circ g)(-4) = g(g(-4)) = g\left(\dfrac{5}{4}\right) = \dfrac{1}{5}$

32 Considera las funciones $f(x) = \sqrt{2x^3}$ y $g(x) = x - 4$. A partir de ellas, halla el valor de las siguientes funciones en los puntos indicados, determinando primero la composición de funciones.

a) $(f \circ g)(5)$

b) $(g \circ f)(5)$

Justifica, a partir de los resultados, si la composición de funciones es conmutativa.

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-4) = \sqrt{2(x-4)^3}$

$(f \circ g)(5) = \sqrt{2}$

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{2x^3}\right) = \sqrt{2x^3} - 4$

$(g \circ f)(5) = \sqrt{250} - 4 = 5\sqrt{10} - 4$

$(f \circ g)(5) \neq (g \circ f)(5) \rightarrow$

$\rightarrow$ La composición de funciones no es conmumativa.

PRACTICA

33 Calcula el dominio de $f(x) = \dfrac{1}{x} + \sqrt{x+3}$.

$\dfrac{1}{x}$ está definida en $x \neq 0$.

$\sqrt{x+3}$ está definida en $x + 3 \geq 0 \rightarrow$

$\rightarrow x \geq -3$.

$\text{Dom } f = [-3, 0) \cup (0, +\infty) =$

$= [-3, +\infty) - \{0\}$

34 Determina el periodo de $f(x) = \cos 2x$.

$\cos x = \cos(x + 2\pi) \rightarrow f(x) = \cos 2x =$

$= \cos(2x + 2\pi) = \cos(2(x + \pi)) =$

$= f(x + \pi) \rightarrow$ Periodo $= \pi$

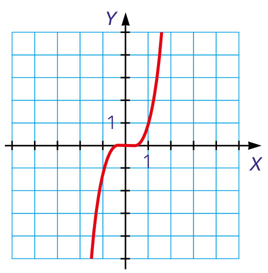
35 Representa gráficamente estas funciones.

a) $f(x) = x^5$

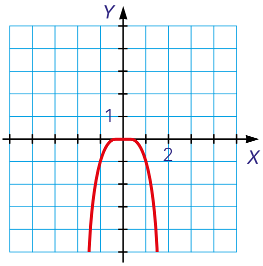
b) $f(x) = -x^4$

c) $f(x) = 4x^5$

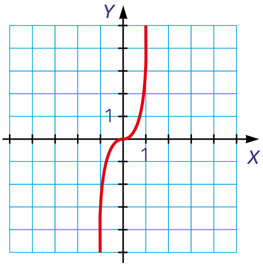
a)



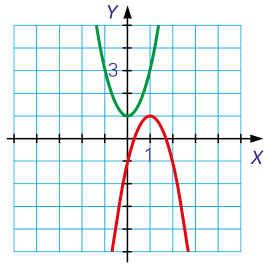
b)



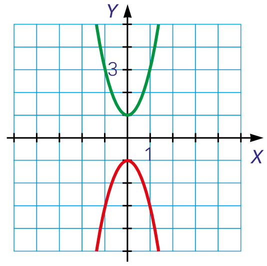
c)



c)



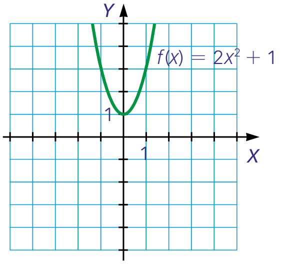
d)



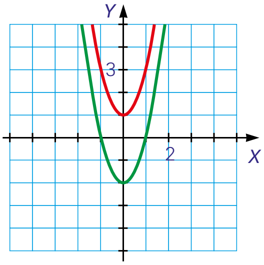
36 Dibuja la gráfica de la función $f(x) = 2x^2 + 1$ y, a partir de ella, representa.

a) $g(x) = f(x) - 3$ c) $g(x) = 2 - f(x - 1)$

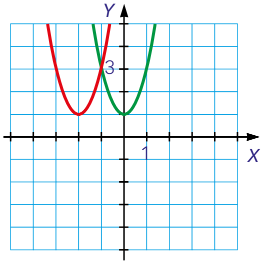
b) $g(x) = f(x + 2)$ d) $g(x) = -f(x) - 1$



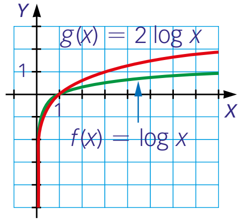
a)



b)



37 Representa la función $f(x) = 2 \log x$.



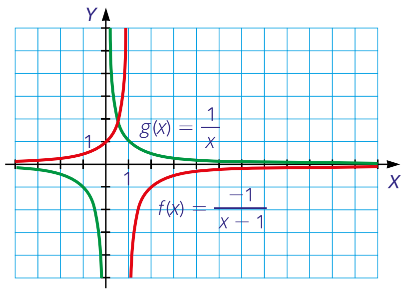
38 Representa gráficamente las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{-1}{x - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{2x + 2}{x - 2}$

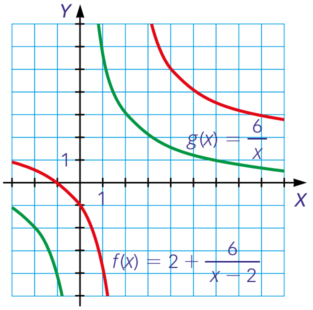
c) $f(x) = \dfrac{-5}{x + 1}$

a) $f(x) = -g(x - 1)$ con $g(x) = \dfrac{1}{x}$

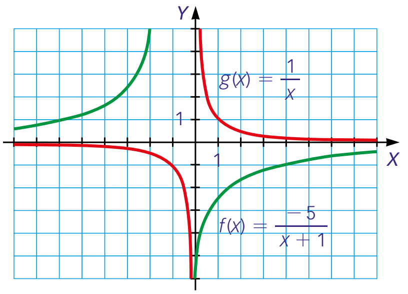


b) $f(x) = 2 + \dfrac{6}{x-2} \rightarrow$

$\rightarrow f(x) = 2 + g(x-2)$ con $g(x) = \dfrac{6}{x}$



c) $f(x) = -5 \cdot g(x+1)$ con $g(x) = \dfrac{1}{x}$



PRACTICA

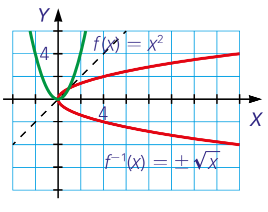
39 Representa la gráfica de las funciones inversas de estas funciones.

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = \log(x-1)$

Podemos representar la función inversa considerando que su gráfica es simétrica a la gráfica de la función original respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.

a)

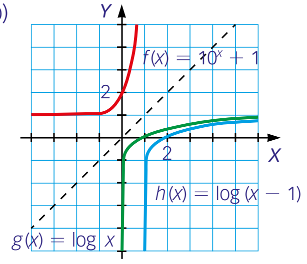


$y = x^2 \rightarrow x = y^2 \rightarrow y = \pm\sqrt{x} \rightarrow$

$\rightarrow f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$

No es una función, ya que para cada valor de x se tienen dos valores y.

b)



$y = \log(x-1) \rightarrow x = \log(y-1) \rightarrow$

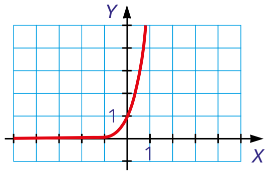
$\rightarrow 10^x = y - 1 \rightarrow y = 10^x + 1$

$f^{-1}(x) = 10^x + 1$

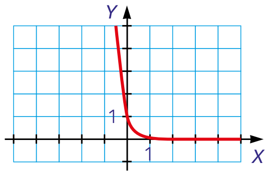
40 Dibuja la gráfica de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 3^{2x}$ b) $f(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{3x}$

a)



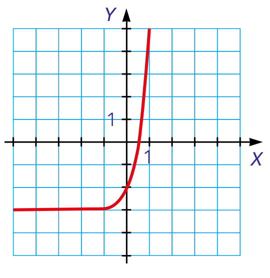
b)



41 Representa gráficamente la función exponencial $f(x) = 3^{2x} - 3$.

Teniendo en cuenta el apartado a) de la actividad anterior:

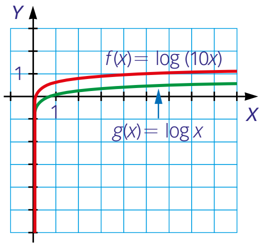
$f(x) = g(x) - 3$ con $g(x) = 9^x$



42 Dibuja la gráfica de $f(x) = \log 10x$.

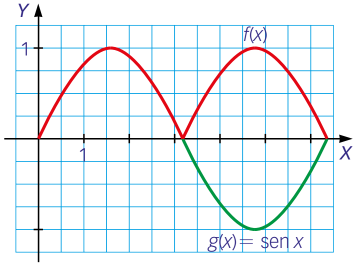
$f(x) = \log 10x = \log 10 + \log x = 1 + \log x$

Podemos representar primero $f(x) = \log x$ y desplazarla 1 u hacia arriba.



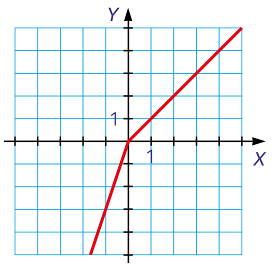
43 Dibuja la gráfica de la función $f(x) = |sen\ x|$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

$$f(x) = \begin{cases} sen\ x & \text{si } x \in [0, \pi] \\ -sen\ x & \text{si } x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$$



44 Dibuja la gráfica de la función $f(x) = 2x - |x|$.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 3x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



45 Expresa estas funciones como composición de funciones más sencillas.

a) $f(x) = sen^2(x^2 + 1)$ b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x - 1}}$

a) $f_1(x) = x^2 + 1$

$f_2(x) = sen\ x$

$f_3(x) = x^2 \rightarrow f(x) = (f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x)$

b) $f_1(x) = x - 1$

$f_2(x) = \dfrac{1}{x}$

$f_3(x) = \sqrt{x} \rightarrow f(x) = (f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x)$

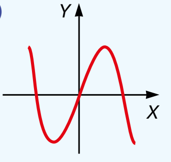
ACTIVIDADES FINALES

1. Reconoce analítica y gráficamente las funciones elementales

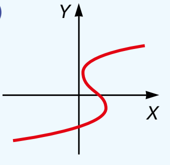
ACTIVIDADES FLASH

46 Di si estas gráficas corresponden a una función.

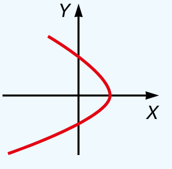
a)



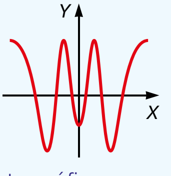
b)



c)



d)



a) La gráfica corresponde a una función porque a cada valor de x le corresponde un único valor de y.

b) La gráfica no corresponde a una función porque hay valores de x a los que les corresponden dos valores de y.

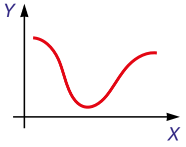
c) La gráfica no corresponde a una función porque hay valores de x a los que les corresponden dos valores de y.

d) La gráfica corresponde a una función porque a cada valor de x le corresponde un único valor de y.

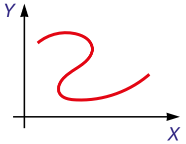
47 **INVENTA.** Esboza una gráfica que pueda ser la representación de una función y otra que no pueda serlo.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Es función:



No es función:



48 Realiza una tabla de valores y representa estas funciones.

a) Cada número entero se relaciona con su número de divisores positivos.

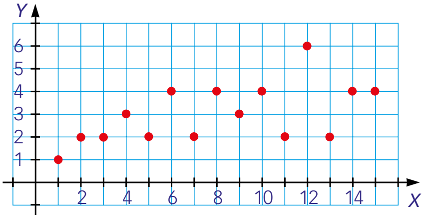
b) Cada número real se relaciona con su parte entera.

c) A cada real le corresponde él menos su valor absoluto.

d) A cada número le corresponde el valor 2.

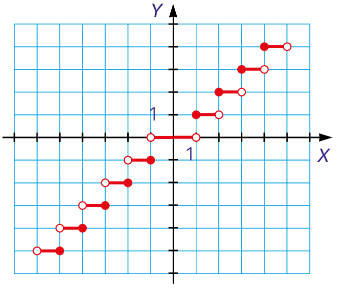
a)

x	$f(x)$ = n.º de divisores positivos de x
1	1
2	2
3	2
4	3
5	2
6	4
7	2
8	4
9	3
10	4
11	2
12	6
13	2



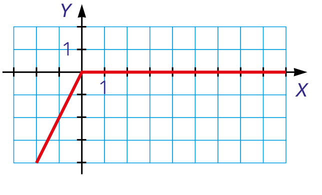
b)

x	$f(x) = [x]$
0	0
0,1	0
0,2	0
0,6	0
0,999	0
1	1
1,3	1
1,95	1
2,01	2
2,37	2
2,97	2
3,09	3
3,91	3
4	4



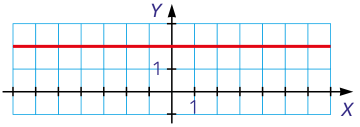
c)

x	0	1	2	-1	-2
$f(x) = x - \|x\|$	0	0	0	-2	-4



d)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x) = 2$	2	2	2	2	2



49 A lo largo de un día se mide la longitud, en metros, de la sombra que proyecta una farola desde el amanecer hasta que anochece.

Las medidas, tomadas cada dos horas, desde las 6:00 h, son estas:

0 25 17 5 2 6 19 32 0

a) ¿Crees que esta relación define una función?

b) Si es así, identifica sus variables.

a) La tabla define una función, pues a cada hora le corresponde un valor único de la longitud de la sombra de la farola.

b) La variable independiente es la hora (medida de dos en dos desde las 6:00 h) y la variable dependiente es la longitud de la sombra de la farola, en metros.

50 Comprueba si los puntos $x = -3$, $x = 0$, $x = 2$ pertenecen al dominio de estas funciones.

a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

b) $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x^2 + 3x}$

c) $f(x) = \sqrt{-2x + 1}$

d) $f(x) = \ln(-x - 4)$

a) Dom $f = \mathbb{R}$
Los tres puntos pertenecen al dominio de la función.

b) $x^2 + 3x = 0 \rightarrow$ Dom $f = \mathbb{R} - \{0, -3\}$
Solo $x = 2$ pertenece al dominio de la función.

c) $-2(-3) + 1 = 7 > 0 \rightarrow$
$\rightarrow x = -3$ pertenece al dominio.
$0 + 1 = 1 > 0 \rightarrow$
$\rightarrow x = 0$ pertenece al dominio.
$-2 \cdot 2 + 1 = -3 < 0 \rightarrow$
$\rightarrow x = 2$ no pertenece al dominio.

d) $-(-3) - 4 = -1 < 0 \rightarrow$
$\rightarrow x = -3$ no pertenece al dominio.
$0 - 4 = -4 < 0 \rightarrow$
$\rightarrow x = 0$ no pertenece al domino.
$-2 - 4 = -6 < 0 \rightarrow$
$\rightarrow x = 2$ no pertenece al dominio.

51 Determina si estas funciones tienen simetrías.

a) $f(x) = x^3 - 3x$

b) $f(x) = x^4 - 1$

c) $f(x) = x^2 - x$

d) $f(x) = x^4 - 2x^2$

a) $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x =$
$= -f(x) \rightarrow f(x)$ es impar.

b) $f(-x) = (-x)^4 - 1 = x^4 - 1 = f(x) \rightarrow$
$\rightarrow f(x)$ es par.

c) $f(-x) = (-x)^2 - (-x) = x^2 + x \rightarrow$
$\rightarrow f(x)$ no es simétrica.

d) $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 =$
$= f(x) \rightarrow f(x)$ es par.

52 Determina el tipo de simetría de estas funciones.

a) $f(x) = \dfrac{3x^2 - x}{x}$

b) $f(x) = \dfrac{2x^3 - x}{x^2 + 1}$

a) $f(-x) = \dfrac{3(-x)^2 - (-x)}{(-x)} = -\dfrac{3x^2 + x}{x}$

$f(x)$ no es simétrica.

b) $f(-x) = \dfrac{2(-x)^3 - (-x)}{(-x)^2 + 1} =$
$= \dfrac{-2x^3 + x}{x^2 + 1} = -f(x) \rightarrow f(x)$ es impar.

53 **INVENTA.** Dibuja una función $f(x)$ de simetría impar que pase por (2, 0) de tal forma que $f(x + 3)$ sea una función par.

La función es impar y su trasladada 3 unidades a la izquierda debe ser par. Es imposible, pues la función trasladada no cambia su simetría.

54 Estudia si los valores de la ordenada, y, están incluidos en los recorridos de estas funciones.

a) $y = 3, y = 2, y = -5$ para $f(x) = \sqrt{3x - 3}$

b) $y = 0, y = 30, y = -3$ para $f(x) = x^2 - 5x + 6$

a) $\sqrt{3x-3} = 3 \rightarrow 3x - 3 = 9 \rightarrow$
$\rightarrow x = 4 \rightarrow y = 3 \in \text{Im } f$

$\sqrt{3x-3} = 2 \rightarrow 3x - 3 = 4 \rightarrow$
$\rightarrow x = \dfrac{7}{3} \rightarrow y = 2 \in \text{Im } f$

$y = -5 \notin \text{Im } f$, porque la raíz no puede tomar valores negativos.

b) $x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow x = 2$ o $x = 3 \rightarrow$
$\rightarrow y = 0 \in \text{Im } f$

$x^2 - 5x + 6 = 30 \rightarrow$
$\rightarrow x^2 - 5x - 24 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow x = 8$ o $x = -3 \rightarrow y = 30 \in \text{Im } f$

$x^2 - 5x + 6 = -3 \rightarrow$
$\rightarrow x^2 - 5x + 9 = 0 \rightarrow \Delta = -11 < 0 \rightarrow$
$\rightarrow$ La ecuación no tiene solución. $\rightarrow$
$\rightarrow y = -3 \notin \text{Im } f$

INTERNET

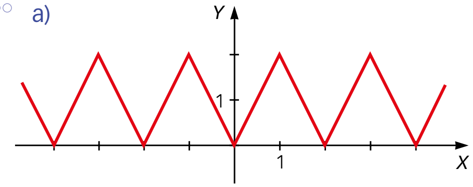
55 **MATEMÁTICAS… Y ASTRONOMÍA.** Considera la función que relaciona el tiempo, en días, con la superficie visible de la Luna. ¿Es una función periódica? En caso afirmativo, indica el periodo.

Día	% de visibilidad	Tipo de luna
0	50 %	Creciente
3	81 %	Creciente
7	100 %	Luna llena
11	81 %	Menguante
15	39 %	Menguante
21	0	Luna nueva

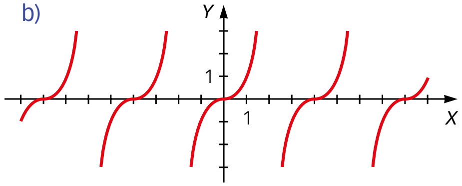
Se trata de una función periódica, puesto que la superficie visible de la Luna varía en función del día del ciclo lunar en el que estamos, y su periodo es de 28 días.

56 Determina el periodo de estas funciones.

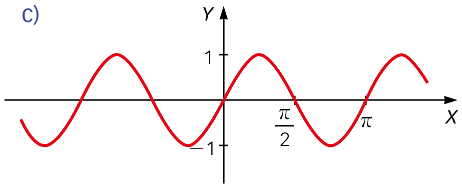
a)



b)



c)



a) $T = 2$ b) $T = 4$ c) $T = \pi$

57 **INVESTIGA.** Una función $f(x)$ toma todos los valores entre 0 y 1 pero ningún otro. ¿Cuál de las siguientes funciones toma todos los valores entre -1 y 1?

a) $f(x) - 1$
b) $f(x) + 1$
c) $2f(x) - 1$
d) $2f(x) + 1$

La función del apartado c) es la única cuya imagen es $[-1, 1]$.

58 El dominio de una función f es $[0, 2]$, y su recorrido, $[0, 1]$. ¿Cuál es el dominio y el recorrido de la función $g(x) = 1 - f(x + 1)$?

$g(x)$ es la función simétrica de $f(x)$ respecto del eje X, trasladada 1 unidad hacia arriba y 1 unidad a la izquierda, por lo tanto, $\text{Dom } g(x) = [-1, 1]$, $\text{Im } g(x) = [0, 1]$.

59 **RETO.** La función f toma solamente valores mayores o iguales que cero y satisface las dos condiciones siguientes: $f(1) = 2$, $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$.

¿Cuánto vale $f\left(\frac{1}{2}\right)$?

$$f(1) = f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \rightarrow$$

$$\rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}$$

60 **RETO.** Sea $f\left(\frac{1}{x}\right) + 6x + x^2 = (x^2 + x)f(x)$.

¿Cuánto es $f(4)$?

$$f\left(\frac{1}{4}\right) + 40 = 20f(4)$$

$$f(4) + \frac{25}{16} = \frac{5}{16}f\left(\frac{1}{4}\right)$$

Despejando en ambas $f\left(\frac{1}{4}\right)$ obtenemos que:

$$f\left(\frac{1}{4}\right) + 40 = 20f(4) \rightarrow f\left(\frac{1}{4}\right) = 20f(4) - 40$$

$$f(4) + \frac{25}{16} = \frac{5}{16}f\left(\frac{1}{4}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{f(4) + \frac{25}{16}}{\frac{5}{16}} = \frac{16f(4) + 25}{5}$$

Igualamos ambas expresiones.

$$20f(4) - 40 = \frac{16f(4) + 25}{5} \rightarrow$$

$$\rightarrow 100f(4) - 200 = 16f(4) + 25 \rightarrow$$

$$\rightarrow 84f(4) = 225 \rightarrow f(4) = \frac{225}{84} = \frac{75}{28}$$

2. Selecciona de manera adecuada ejes, unidades, dominio y escalas

Funciones polinómicas

ACTIVIDADES FLASH

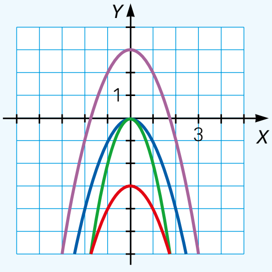
61 Asocia cada función con su gráfica.

a) $f(x) = -x^2$

b) $g(x) = -x^2 + 3$

c) $h(x) = -x^2 - 3$

d) $i(x) = -2x^2$



a) Azul

b) Morada

c) Roja

d) Verde

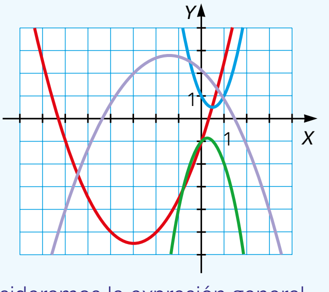
62 Relaciona cada gráfica con su expresión algebraica.

a) $f(x) = \frac{x^2}{2} + 3x - 1$

b) $g(x) = 2x^2 - 2x + 1$

c) $h(x) = -\frac{x^2}{3} - x + 2$

d) $i(x) = -2x^2 + x - 1$



Consideramos la expresión general de una parábola: $y = ax^2 + bx + c$.

a) Es la roja, porque si $a = \frac{1}{2} > 0$ y $c = -1$, la parábola es abierta hacia arriba y corta al eje OY en $y = -1$.

b) Es la azul, porque si $a = 2 > 0$, y $c = 1$, la parábola es abierta hacia arriba y corta al eje OY en $y = 1$.

c) Es la morada, porque si $a = -\frac{1}{3} < 0$ y $c = 2$, la parábola es abierta hacia abajo y corta al eje OY en $y = 2$.

d) Es la verde, porque si $a = -2 < 0$ y $c = -1$, la parábola es abierta hacia abajo y corta al eje OY en $y = -1$.

63 Representa, sin completar las tablas de valores correspondientes, las funciones lineales y afines.

a) $f(x) = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{2}$

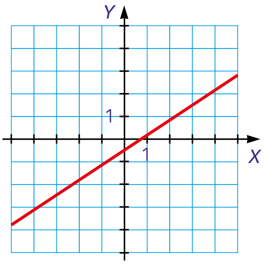
b) $f(x) = \dfrac{2x - 3}{5}$

c) $f(x) = \dfrac{7}{2}$

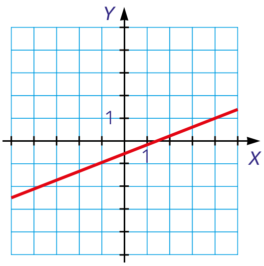
d) $f(x) = -\dfrac{2}{3}x$

Como su representación gráfica es siempre una recta, basta con identificar la pendiente y un punto, por ejemplo, el punto de corte con el eje OY.

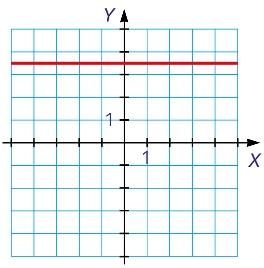
a)



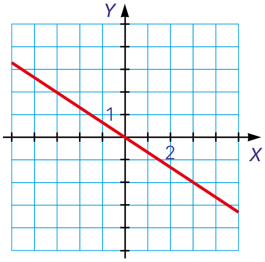
b)



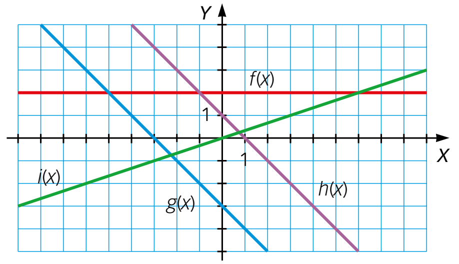
c)



d)



64 Escribe la expresión algebraica de estas funciones y calcula su pendiente y su ordenada en el origen.



$f(x) = 2 \rightarrow m = 0 \quad n = 2$

$g(x) = -x - 3 \rightarrow m = -1 \quad n = -3$

$h(x) = -x + 1 \rightarrow m = -1 \quad n = 1$

$i(x) = \dfrac{1}{3}x \rightarrow m = \dfrac{1}{3} \quad n = 0$

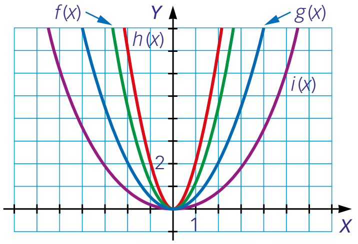
65 Representa estas funciones en los mismos ejes de coordenadas y relaciona la abertura de las ramas de cada parábola con el coeficiente de x^2.

a) $f(x) = x^2$

b) $g(x) = \dfrac{1}{2}x^2$

c) $h(x) = 2x^2$

d) $i(x) = \dfrac{1}{4}x^2$



Ordenamos las parábolas de menor a mayor abertura: $h(x)$, $f(x)$, $g(x)$, $i(x)$.

Se puede observar que a medida que aumenta el valor del coeficiente de x^2 disminuye la abertura de la parábola.

66 Halla el vértice de estas parábolas.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 10$

b) $f(x) = -x^2 - 4x + 10$

c) $f(x) = x^2 - 4$

d) $f(x) = -x^2 - 4x + 2$

Consideramos la expresión general de una parábola: $y = ax^2 + bx + c$.

La coordenada x del vértice de la parábola es: $x = -\dfrac{b}{2a}$

a) $V\left(\dfrac{-(-6)}{2 \cdot 1}, -\dfrac{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}{4 \cdot 1}\right) = V(3, 1)$

b) $V\left(\dfrac{-(-4)}{2 \cdot (-1)}, -\dfrac{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 10}{4 \cdot (-1)}\right) =$
$= V(-2, 14)$

c) $V\left(0, -\dfrac{-4 \cdot 1 \cdot (-4)}{4 \cdot 1}\right) = V(0, -4)$

d) $V\left(\dfrac{-(-4)}{2 \cdot (-1)}, -\dfrac{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}{4 \cdot (-1)}\right) =$
$= V(-2, 6)$

67 **INVENTA.** Escribe la ecuación de tres parábolas cuyo vértice sea (2, 3).

$f(x) = ax^2 + bx + c$

Vértice:

$x = \dfrac{-b}{2a} \rightarrow -b = 4a$

$y = \dfrac{-b^2 - 4ac}{4a} = 3 = f(2) =$

$= 4a + 2b + c \rightarrow 3 = -b + 2b + c \rightarrow$
$\rightarrow 3 = b + c$

Dando valores a b y c, obtenemos:

$a = -1 \rightarrow -x^2 + 4x - 1 = 0$

$a = 1 \rightarrow -x^2 - 4x + 7 = 0$

$a = -1 \rightarrow 2x^2 - 8x + 11 = 0$

68 Representa las siguientes funciones polinómicas, indicando los puntos de corte con los ejes.

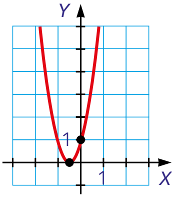
a) $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$

b) $f(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$

c) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4$

d) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 3$

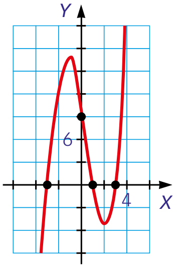
a)



Punto de corte con el eje X: $\left(\dfrac{-1}{2}, 0\right)$

Punto de corte con el eje Y: (0, 1)

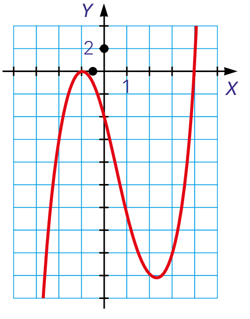
b)



Puntos de corte con el eje X: $(-3, 0)$, $(1, 0)$ y $(3, 0)$

Punto de corte con el eje Y: (0, 9)

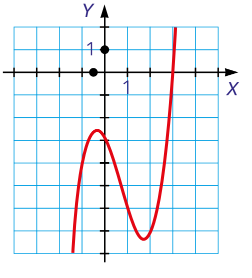
c)



Puntos de corte con el eje X: $(-1, 0)$ y $(4, 0)$

Punto de corte con el eje Y: $(0, -4)$

d)



Punto de corte con el eje X: (3, 0)

Punto de corte con el eje Y: $(0, -3)$

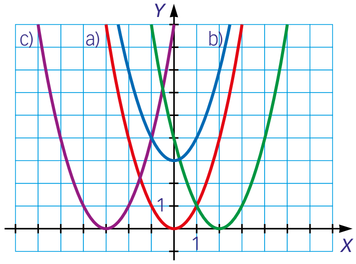
69 Representa la función $y = x^2$. A partir de ella, dibuja las gráficas de estas funciones polinómicas.

a) $f(x) = (x - 2)^2$

b) $f(x) = x^2 + 3$

c) $f(x) = (x + 3)^2$

¿Qué relación guardan las gráficas de las últimas tres funciones con la gráfica de la primera?



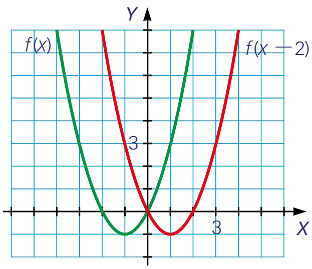
70 Haz la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 2x$. Determina la expresión algebraica de cada una de las siguientes funciones y represéntalas.

a) $f(x - 2)$ c) $f(x + 1)$

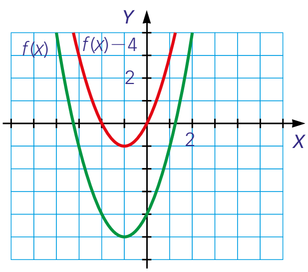
b) $f(x) - 4$ d) $f(x) + 2$

¿Hay alguna relación entre estas gráficas?

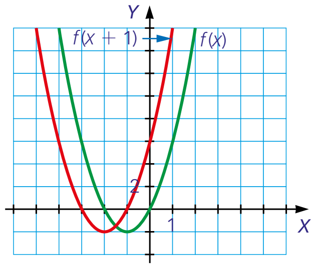
a) $f(x - 2) = (x - 2)^2 + 2(x - 2) =$
$= x^2 - 2x$



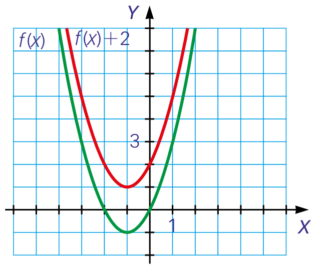
b) $f(x) - 4 = x^2 + 2x - 4$



c) $f(x + 1) = (x + 1)^2 + 2(x + 1) =$
$= x^2 + 4x + 3$



d) $f(x) + 2 = x^2 + 2x + 2$

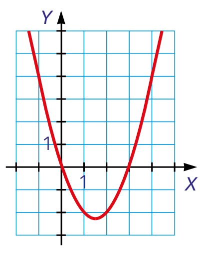


71 Obtén la expresión algebraica y representa la función cuadrática que pasa por los puntos $A(1, -2)$, $B(2, -2)$ y $C(3, 0)$.

Como la función pasa por los puntos A y B, la abscisa del vértice de la función es $\frac{3}{2}$, por lo tanto:

$$\frac{-b}{2a} = \frac{3}{2} \rightarrow b = -3 \qquad a = 1$$

Como la función pasa por $C(0, 3)$, el simétrico respecto al eje de simetría $x = \frac{3}{2}$ es $D(0, 0)$, luego $c = 0$ y la ecuación de la función es $f(x) = x^2 - 3x$.



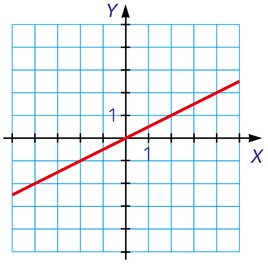
72 Halla y representa las funciones polinómicas de grado mínimo que pasan por los siguientes puntos.

a) $A(0, 0)$, $B\left(5, \frac{5}{2}\right)$ y $C(-2, -1)$

b) $A(3, 0)$, $B(4, 1)$ y $C(5, 0)$

c) $A(1, 0)$, $B(2, 1)$, $C(3, 0)$ y $D(4, 1)$

a) Los puntos A, B y C están alineados. La función que pasa por ellos es $f(x) = \frac{x}{2}$.



b) Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$.

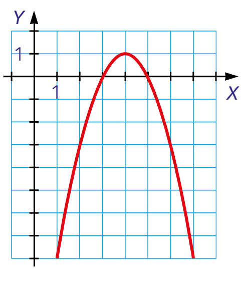
$$\left.\begin{array}{l} 9a + 3b + c = 0 \\ 16a + 4b + c = 1 \\ 25a + 5b + c = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} 9a + 3b + c = 0 \\ 7a + b = 1 \\ 16a + 2b = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} 9a + 3b + c = 0 \\ 7a + b = 1 \\ 2a = -2 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow a = -1 \quad b = 8 \quad c = -15 \rightarrow$

$\rightarrow f(x) = -x^2 + 8x - 15$



c) Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

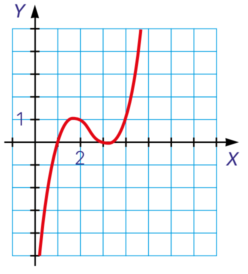
$$\left.\begin{array}{l} a + 11b + 1c + d = 0 \\ 8a + 14b + 2c + d = 1 \\ 27a + 19b + 3c + d = 0 \\ 64a + 16b + 4c + d = 1 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} a + b + c + d = 0 \\ 7a + 3b + c = 1 \\ 6a + b = -1 \\ 21a + 3b = -1 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} a + b + c + d = 0 \\ 7a + 3b + c = -1 \\ 6a + b = -1 \\ 3a = 2 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow a = \frac{2}{3} \quad b = -5 \quad c = \frac{34}{3} \quad d = -7 \rightarrow$

$\rightarrow f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 5x^2 + \frac{34}{3}x - 7$



73 ●●● **RETO.** Si $f(x) = px^7 + qx^3 + rx - 4$ y $f(-7) = 3$, ¿cuánto vale $f(7)$?

$f(7) = 77p + 73q + 7r - 4$

$f(-7) = -77p - 73q - 7r - 4 = 3 \rightarrow$

$\rightarrow f(7) = 77p + 73q + 7r - 4 =$

$= -7 - 4 = -11 \rightarrow f(7) = -11$

Funciones racionales

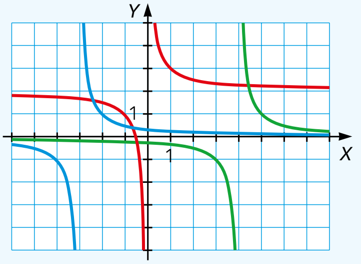
ACTIVIDADES FLASH

74 ●○○ Asocia cada gráfica con su función.

a) $f(x) = \frac{1}{x+3}$

b) $g(x) = \frac{1}{x-4}$

c) $h(x) = \frac{1}{x} + 2$



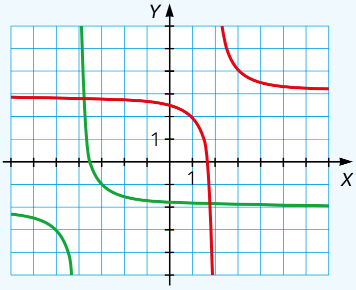
a) Azul b) Verde c) Roja

ACTIVIDADES FLASH

75 Asocia cada gráfica con su función.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2} + 3$

b) $g(x) = \dfrac{1}{x+4} - 2$



a) Roja b) Verde

76 Determina el dominio de estas funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x-3}{7}$

b) $f(x) = \dfrac{7}{x-3}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+2x}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x} + x$

f) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{3\}$

c) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

d) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 0\}$

e) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$

f) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

77 Dada la función $f(x) = \dfrac{2}{x}$, determina la expresión algebraica de las siguientes funciones.

a) $g(x) = f(x-3)$

b) $g(x) = f(x+1)$

c) $g(x) = f(x) - 2$

d) $g(x) = f(x) + 3$

e) $g(x) = f(-x)$

f) $g(x) = -f(x)$

a) $g(x) = \dfrac{2}{x-3}$

b) $g(x) = \dfrac{2}{x+1}$

c) $g(x) = \dfrac{2}{x} - 2 = \dfrac{2-2x}{x}$

d) $g(x) = \dfrac{2}{x} + 3 = \dfrac{2+3x}{x}$

e) $g(x) = \dfrac{2}{-x} = -\dfrac{2}{x}$

f) $g(x) = -\dfrac{2}{x}$

78 Dada la función $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$, contesta.

a) Halla el dominio e indica para qué valores de x no está definida la función.

b) Copia y completa las tablas de valores y haz un esbozo de la función.

x	$-0{,}1$	$-0{,}5$	-1	-2	-4
$f(x)$					

x	$0{,}1$	$0{,}5$	1	2	4
$f(x)$					

c) Representa $g(x) = \dfrac{-2}{x^3}$ a partir de $f(x)$.

d) Representa $f(-x)$.

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$

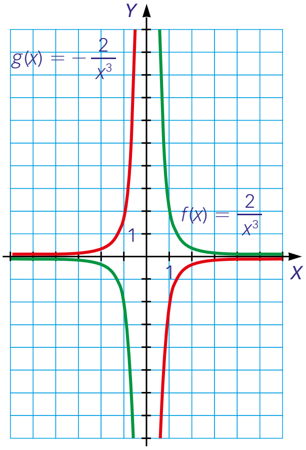
La función no está definida para $x = 0$.

b)

x	$-0{,}1$	$-0{,}5$	-1	-2	-4
$f(x)$	-2000	-16	-2	$-0{,}25$	$-0{,}03$

x	$0{,}1$	$0{,}5$	1	2	4
$f(x)$	2000	16	2	$0{,}25$	$0{,}03$

c)



d) $f(-x) = \dfrac{2}{(-x)^3} = -\dfrac{2}{x^3} = -f(x) = g(x)$

La gráfica es la misma que la de $g(x)$ en el apartado c).

79 Dada la función $f(x) = \dfrac{-2}{x^4}$, contesta.

a) Halla el dominio e indica para qué valores de x no está definida la función.

b) Copia y completa las tablas de valores y haz un esbozo de la función.

x	$-0,1$	$-0,5$	-1	-2	-4
$f(x)$					

x	$0,1$	$0,5$	1	2	4
$f(x)$					

c) Representa $g(x) = \dfrac{2}{x^4}$ a partir de $f(x)$.

d) Representa $f(-x)$.

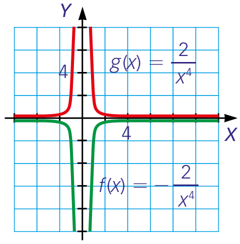
a) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$
La función no está definida para $x = 0$.

b)

x	$-0,1$	$-0,5$	-1	-2	-4
$f(x)$	$-20\,000$	-32	-2	$-0,125$	$-0,0078$

x	$0,1$	$0,5$	1	2	4
$f(x)$	$-20\,000$	-32	-2	$-0,125$	$-0,0078$

c)



d) $f(-x) = -\dfrac{2}{(-x)^4} = -\dfrac{2}{x^4} = f(x)$

La gráfica es la misma que la de $f(x)$ en el apartado c).

80 Representa gráficamente las siguientes funciones.

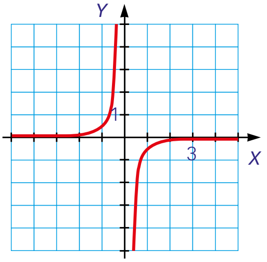
a) $f(x) = -\dfrac{1}{2x^3}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{2x^4}$

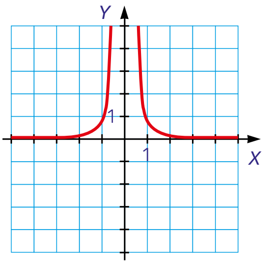
c) $f(x) = -\dfrac{1}{2x^6}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{2x^5}$

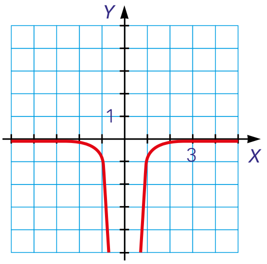
a)



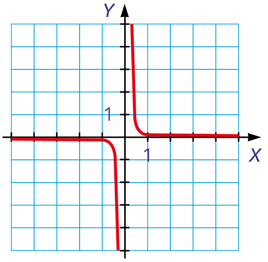
b)



c)



d)



81 Sin representarlas, escribe la relación que hay entre las gráficas de estas funciones y la de $f(x) = \dfrac{12}{x}$.

a) $g(x) = \dfrac{12}{x+4}$

b) $h(x) = \dfrac{12}{x} + 1$

c) $i(x) = -\dfrac{12}{x}$

a) La gráfica de $g(x)$ se obtiene desplazando la gráfica de $f(x)$ 4 unidades a la izquierda.

b) La gráfica de $h(x)$ se obtiene desplazando la gráfica de $f(x)$ una unidad hacia arriba.

c) La gráfica de $i(x)$ es la simétrica de $f(x)$ con respecto al eje X.

82 Representa la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{3}{x}$. A partir de ella, representa las siguientes funciones.

a) $g(x) = \dfrac{x+4}{x+1}$

b) $h(x) = \dfrac{2x-5}{x-1}$

c) $i(x) = \dfrac{-2x+1}{x+1}$

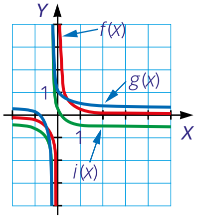
d) $j(x) = \dfrac{5x-2}{x-1}$

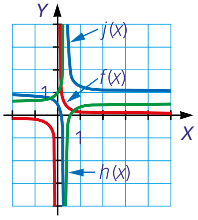
a) $g(x) = \dfrac{3}{x+1} + 1 \rightarrow$
$\rightarrow g(x) = f(x+1) + 1$

b) $h(x) = 2 - \dfrac{3}{x-1} \rightarrow$
$\rightarrow h(x) = -f(x-1) + 2$

c) $i(x) = -2 + \dfrac{3}{x+1} \rightarrow$
$\rightarrow i(x) = f(x+1) - 2$

d) $j(x) = 5 - \dfrac{3}{x+1} \rightarrow$
$\rightarrow j(x) = -f(x+1) + 5$

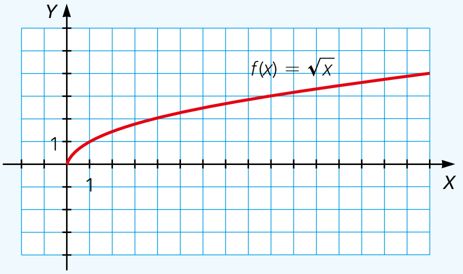




Funciones radicales

ACTIVIDADES FLASH

83 La gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$ es:



Explica cómo representarías las siguientes funciones.

a) $f(x-3)$
b) $f(x+1)$
c) $4 + f(x)$
d) $-f(x)$
e) $2 - f(x)$
f) $f(x) - 2$

a) La función $f(x-3)$ traslada la función $f(x)$ 3 unidades a la derecha.

b) La función $f(x+1)$ traslada la función $f(x)$ 1 unidad a la izquierda.

c) La función $4 + f(x)$ traslada la función $f(x)$ 4 unidades hacia arriba.

d) La función $-f(x)$ es la simétrica de $f(x)$ respecto del eje X.

e) La función $2 - f(x)$ traslada la función $-f(x)$ 2 unidades hacia arriba.

f) La función $f(x) - 2$ traslada la función $f(x)$ 2 unidades hacia abajo.

84 ●●○ Estudia el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \sqrt{x+3}$

b) $f(x) = \sqrt{2x^2 + 3x - 2}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$

d) $f(x) = \sqrt{5 - 2x}$

e) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 9}$

f) $f(x) = \sqrt{6 + x - x^2}$

a) $\text{Dom } f = [-3, +\infty)$

b) $\text{Dom } f = (-\infty, -2] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

c) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

d) $\text{Dom } f = \left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$

e) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

f) $\text{Dom } f = [-2, 3]$

85 ●●● ¿Cuál es el dominio de estas funciones con radicales?

a) $f(x) = \dfrac{7x}{2 - \sqrt{x-5}}$

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x-1}}{4 - \sqrt{x+1}}$

a) $x - 5 \geq 0 \rightarrow x \geq 5$

$\sqrt{x-5} \neq 2 \rightarrow x - 5 \neq 4 \rightarrow x \neq 9$

$\text{Dom } f = [5, 9) \cup (9, +\infty) = [5, +\infty) - \{9\}$

b) $3x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq \dfrac{1}{3}$

$x + 1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1$

$\sqrt{x+1} \neq 4 \rightarrow x + 1 \neq 16 \rightarrow x \neq 15$

$\text{Dom } f = \left[\frac{1}{3}, 15\right) \cup (15, +\infty) =$

$= \left[\frac{1}{3}, +\infty\right) - \{15\}$

86 ●●○ Determina el dominio de las funciones.

a) $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{8-x}$

b) $f(x) = \sqrt{2x-4} \cdot \sqrt{1-x}$

a) $x + 1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1$

$8 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 8$

$\text{Dom } f = [-1, 8]$

b) $2x - 4 \geq 0 \rightarrow x \geq 2$

$1 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 1$

$\text{Dom } f = \varnothing$

87 ●●○ **INVENTA.** Escribe en cada caso la expresión algebraica de una función radical con los siguientes dominios.

a) $[5, +\infty)$ c) $[-3, 3]$

b) $(-\infty, -2]$ d) $\mathbb{R}$

a) $f(x) = \sqrt{x-5}$

b) $f(x) = \sqrt{-x+2}$

c) $f(x) = \sqrt{-x^2+9}$

d) $f(x) = \sqrt{x^2+5}$

88 ●●○ A partir de la gráfica de la función $y = \sqrt{x^2+1}$, explica cómo harías la representación gráfica de las siguientes funciones con radicales.

a) $f(x) = 1 + \sqrt{x^2+1}$

b) $f(x) = -2 + \sqrt{x^2+1}$

c) $f(x) = 1 - \sqrt{x^2+1}$

d) $f(x) = \sqrt{x^2+2x+2}$

A partir de la función $y(x) = \sqrt{x^2+1}$

a) $f(x) = 1 + y(x)$

La gráfica de $f(x)$ se obtiene trasladando la de $y(x)$ 1 unidad hacia arriba.

b) $f(x) = -2 + y(x)$

La gráfica de $f(x)$ se obtiene trasladando la de $y(x)$ 2 unidades hacia abajo.

c) $f(x) = 1 - y(x)$

La gráfica de $f(x)$ se obtiene trasladando la de la función simétrica de $y(x)$ 1 unidad hacia arriba.

d) $f(x) = y(x + 1)$
La gráfica de $f(x)$ se obtiene trasladando la de $y(x)$ 1 unidad hacia la izquierda.

Función inversa

89 Comprueba si estas funciones son inversas.

a) $f(x) = 2x - 5$
$g(x) = \dfrac{x+5}{2}$

b) $f(x) = \dfrac{3-x}{4}$
$g(x) = 3 - 4x$

c) $f(x) = x^3 + 1$
$g(x) = \sqrt[3]{x-1}$

a) $x = 2y - 5 \rightarrow y = \dfrac{x+5}{2} \rightarrow$
$\rightarrow f^{-1}(x) = g(x) \rightarrow$ Son inversas.

b) $x = \dfrac{3-y}{4} \rightarrow y = 3 - 4x \rightarrow$
$\rightarrow f^{-1}(x) = g(x) \rightarrow$ Son inversas.

c) $x = y^3 + 1 \rightarrow y = \sqrt[3]{x-1} \rightarrow$
$\rightarrow f^{-1}(x) = g(x) \rightarrow$ Son inversas.

90 Calcula, si es posible, la inversa de estas funciones.

a) $f(x) = 2x - 1$

b) $f(x) = x^2 - 5$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

d) $f(x) = x^2 + x$

e) $f(x) = \sqrt{2 - 5x}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

a) $x = 2y - 1 \rightarrow y = \dfrac{x+1}{2} \rightarrow$
$\rightarrow$ La función inversa es
$f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{2}$.

b) $x = y^2 - 5 \rightarrow y = \pm\sqrt{x+5} \rightarrow$
$\rightarrow$ No existe la inversa; por tanto, $f^{-1}(x)$ no es una función, porque para cada valor de x se obtienen dos imágenes.

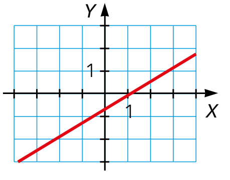
c) $x = \dfrac{1}{y+2} \rightarrow y = \dfrac{1-2x}{x} \rightarrow$
$\rightarrow$ La función inversa es
$f^{-1}(x) = \dfrac{1-2x}{x}$.

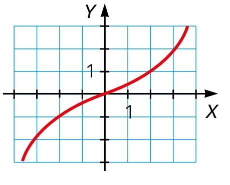
d) $x = y^2 - y \rightarrow$ No existe la inversa; $f^{-1}(x)$ no es una función, porque para cada valor de x se obtienen dos imágenes.

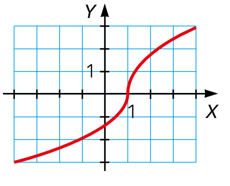
e) $x = \sqrt{2 - 5y} \rightarrow y = \dfrac{2-x^2}{5} \rightarrow$
$\rightarrow$ La función inversa es
$f^{-1}(x) = \dfrac{2-x^2}{5}$.

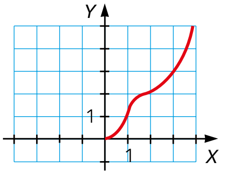
f) $x = \dfrac{1}{y-2} \rightarrow y = \dfrac{2x+1}{x} \rightarrow$
$\rightarrow$ La función inversa es
$f^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{x}$.

91 Dibuja la gráfica de la inversa de cada función.

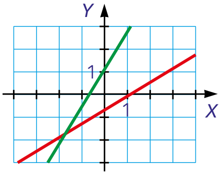
a)


b)


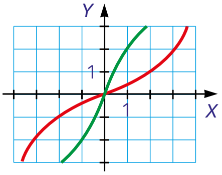
c)


d)


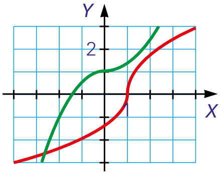
a)



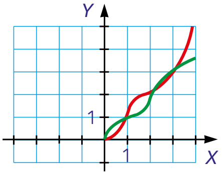
b)



c)



d)



92 Calcula las funciones inversas de estas funciones.

a) $f(x) = \ln(x + 3)$

b) $f(x) = 3 + 4 \cdot 5^x$

c) $f(x) = \dfrac{1 + tg\, x}{2}$

d) $f(x) = sen\, 2x$

e) $f(x) = |x + 1|$

f) $f(x) = \dfrac{1 + \log_3 x}{5}$

a) $x = \ln(y + 3) \rightarrow e^x = y + 3 \rightarrow$
$\rightarrow y = e^x - 3 \rightarrow f^{-1}(x) = e^x - 3$

b) $x = 3 + 4 \cdot 5^y \rightarrow \log_5 \dfrac{x - 3}{4} = y \rightarrow$
$\rightarrow y = \log_5(x - 3) - \log_5 4 \rightarrow$
$\rightarrow f^{-1}(x) = \log_5(x - 3) - \log_5 4$

c) $x = \dfrac{1 + tg\, y}{2} \rightarrow y = arc\, tg\,(2x - 1) \rightarrow$
$\rightarrow f^{-1}(x) = arc\, tg\,(2x - 1)$

d) $x = sen\, 2y \rightarrow y = \dfrac{arc\, sen\, x}{2} \rightarrow$
$\rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{arc\, sen\, x}{2}$

e) $x = |y + 1| \rightarrow$ No existe inversa, ya que para cada valor de x, $f^{-1}(x)$ devuelve dos imágenes; $f^{-1}(x)$ no es una función.

f) $x = \dfrac{1 + \log_3 y}{5} \rightarrow 5x - 1 = \log_3 y \rightarrow$
$\rightarrow y = 3^{5x - 1} \rightarrow f^{-1}(x) = 3^{5x - 1}$

93 Dada la función $f(x) = 3^x + 5$, determina cuál es el dominio de su inversa, f^{-1}.

$f^{-1}(x) = \dfrac{\ln(x - 5)}{\ln 3} = \log_3(x - 5) \rightarrow$
$\rightarrow \text{Dom}\, f^{-1}(x) = (5, +\infty)$

Funciones logarítmicas y exponenciales

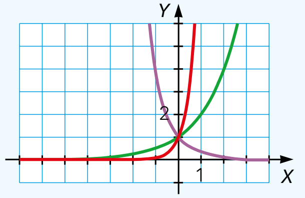
ACTIVIDADES FLASH

94 Asocia cada gráfica con su función.

a) $f(x) = 12^x$

b) $g(x) = 2^x$

c) $h(x) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$



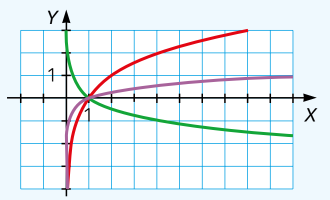
a) Roja b) Verde c) Azul

95 Asocia cada gráfica con su función.

a) $f(x) = \log_{12} x$

b) $g(x) = \log_2 x$

c) $h(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$



a) Morada b) Roja c) Verde

96 Representa en los mismos ejes de coordenadas las siguientes ternas de funciones exponenciales.

a) $f(x) = 2^x$
$g(x) = 5^x$
$h(x) = 10^x$

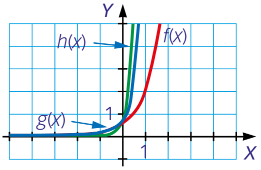
b) $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

$g(x) = \left(\dfrac{1}{5}\right)^x$

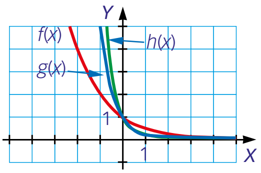
$h(x) = \left(\dfrac{1}{10}\right)^x$

Para representar las funciones, elaboramos una tabla de valores con al menos cinco valores.

a)



b)

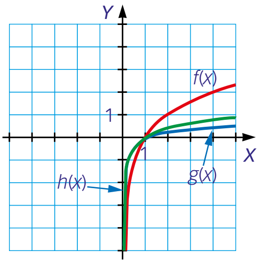


97 Representa en los mismos ejes de coordenadas las siguientes ternas de funciones logarítmicas.

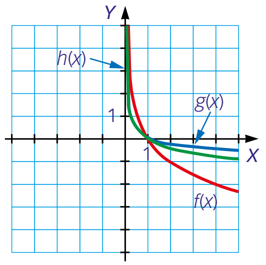
a) $f(x) = \log_2 x$
$g(x) = \log_5 x$
$h(x) = \log_{10} x$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$
$g(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$
$h(x) = \log_{\frac{1}{10}} x$

a)



b)

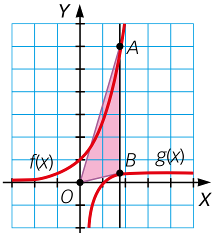


INTERNET

98 **INVESTIGA.** En la figura están representadas:

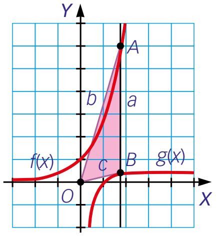
$f(x) = e^x$

$g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$



Los puntos A y B tienen como abscisa a y forman parte de las gráficas de f y g, respectivamente. Si el área del triángulo $\widehat{OAB}$ mide 5 u², determina una ecuación para encontrar el valor de a.

Utiliza un programa informático para resolverla.



$A(a, e^a)$

$B\left(a, \dfrac{\ln a}{a}\right)$

$O(0, 0)$

$$|\overline{OB}| = \left|\left(a, \frac{\ln a}{a}\right)\right| = \frac{1}{a}\sqrt{a^4 + \ln^2 a}$$

$$|\overline{AB}| = \left|\left(0, e^a - \frac{\ln a}{a}\right)\right| = \sqrt{\left(e^a - \frac{\ln a}{a}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{a}\sqrt{a^2e^{2a} + \ln^2 a - 2e^a \ln a}$$

Área del triángulo:

$$\frac{\dfrac{1}{a}\sqrt{a^4 + \ln^2 a} \cdot \dfrac{1}{a}\sqrt{a^2e^{2a} + \ln^2 a - 2e^a \ln a}}{2} = 5 \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{a^4 + \ln^2 a} \cdot \sqrt{a^2e^{2a} + \ln^2 a - 2e^a \ln a} = 10a$$

Ecuación:

$(a^4 + \ln^2 a) \cdot (a^2e^{2a} + \ln^2 a - 2e^a \ln a) = 100a^2 \rightarrow$

$\rightarrow a = 1{,}79$

99 A partir de la gráfica de la función exponencial $g(x) = 4^x$, representa las siguientes funciones.

a) $f(x) = 4^{x-3}$

b) $f(x) = 4^{x+1}$

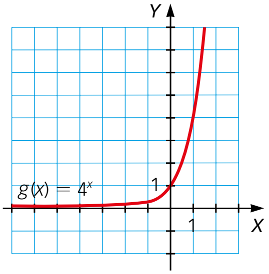
c) $f(x) = 1 + 4^x$

d) $f(x) = -4^x$

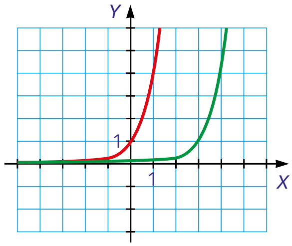
e) $f(x) = 2 - 4^x$

f) $f(x) = 4^x - 1$

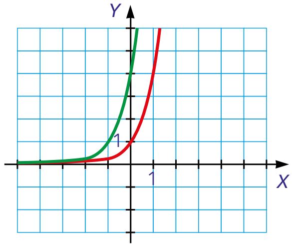
g) $f(x) = 4^{x+1} + 2$



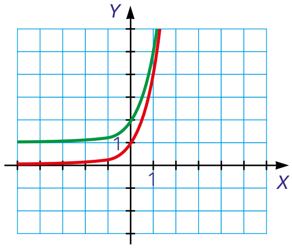
a) $4^{x-3} = g(x-3)$



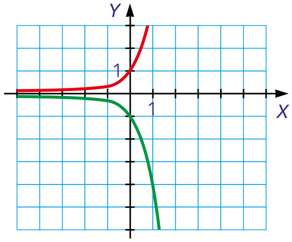
b) $4^{x+1} = g(x+1)$



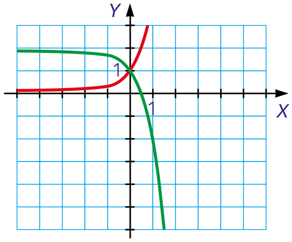
c) $1 + 4^x = 1 + g(x)$



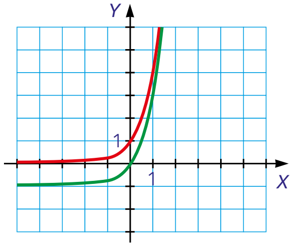
d) $-4^x = -g(x)$



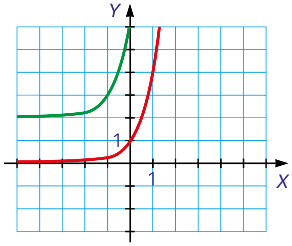
e) $2 - 4^x = 2 - g(x)$



f) $4^x - 1 = g(x) - 1$



g) $4^{x+1} + 2 = g(x+1) + 2$

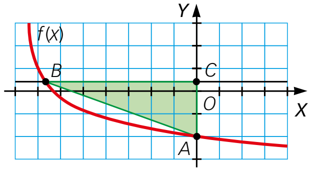


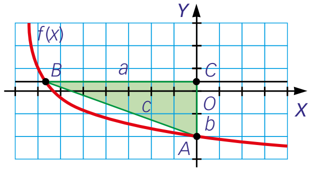
INTERNET

100 **INVESTIGA.** Sea la función $f(x) = -\ln(x + e^2)$, si corta el eje Y en el punto A y los puntos B y C tienen la misma ordenada, escribe una ecuación para calcular la abscisa del punto B, sabiendo que el triángulo tiene área 8 u^2.

Utiliza un programa informático para resolverla.

Podemos utilizar, por ejemplo, GeoGebra.





Primero tenemos que hallar la ordenada del punto A.

$y = -\ln(0 + e^2) = -2 \rightarrow A(0, -2)$

Sea $C(0, a)$, como B y C comparten ordenada: $B(e^{-a} - e^2, a)$.

Área del triángulo:

$$\frac{|\overline{BC}| \cdot |\overline{AC}|}{2} = 8 \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{(e^{-a} - e^2)^2 + 0} \cdot \sqrt{0 + (-2 - a)^2} = 16 \rightarrow$$

$$\rightarrow (e^{-2a} + e^4 - 2e^{2-a}) \cdot (4 + a^2 + 4a) = 256$$

La abscisa del punto B es $-6{,}7$ y la ordenada es $0{,}4$.

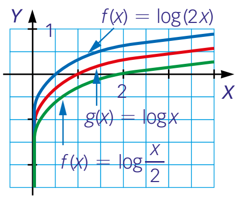
101 ●●● A partir de la gráfica de la función logarítmica $g(x) = \log x$, representa las siguientes funciones.

a) $f(x) = \log 2x$

b) $f(x) = \log \dfrac{x}{2}$

a) $f(x) = \log 2 + \log x$

b) $f(x) = \log x - \log 2$

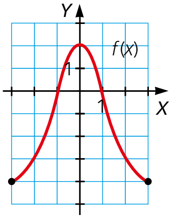


102 ●●○ La función $f(x) = e^{a \ln x}$ pasa por el punto $(2, 8)$. ¿Qué valor toma a?

$$8 = e^{a \ln 2} \rightarrow \ln 8 = a \ln 2 \rightarrow a = \frac{\ln 8}{\ln 2} \rightarrow$$

$$\rightarrow a = \frac{3 \ln 2}{\ln 2} = 3 \rightarrow a = 3$$

103 ●●● **RETO.** En la figura está representada la función f.



Si la expresión algebraica de la función g es $g(x) = \ln x$, ¿cuáles son las soluciones de la ecuación $(f \circ g)(x) = 0$?

Si observamos la gráfica, vemos que $f(x) = 0$ si $x = 1$ o $x = -1$.

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\ln x)$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow f(-1) = 0 = f(1) \rightarrow$

$$\rightarrow \ln x = \begin{cases} -1 & \text{si } x = \dfrac{1}{e} \\ 1 & \text{si } x = e \end{cases}$$

Las soluciones son $x = e$ y $x = \dfrac{1}{e}$.

Funciones trigonométricas

104 ●○○ Dibuja la gráfica de la función $g(x) = \cos x$. A partir de ella, representa las siguientes funciones.

a) $f(x) = \cos(-x)$

b) $f(x) = -\cos x$

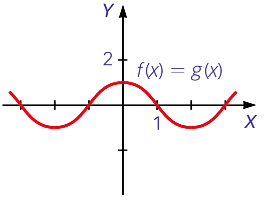
c) $f(x) = \cos(x + \pi)$

d) $f(x) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

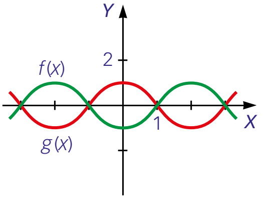
e) $f(x) = \cos x + 2$

f) $f(x) = 1 - \cos x$

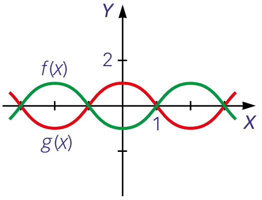
a)



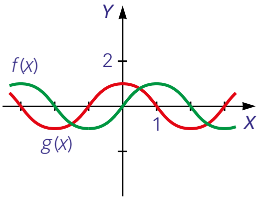
b)



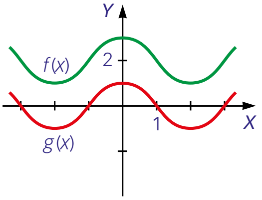
c)



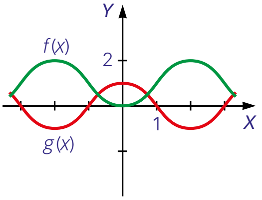
d)



e)



f)



105 Dibuja la gráfica de la función $g(x) = sen\ x$. A partir de ella, representa las siguientes funciones.

●○○

a) $f(x) = sen(-x)$

b) $f(x) = -sen\,x$

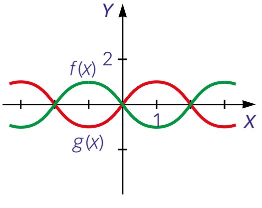
c) $f(x) = sen(x + \pi)$

d) $f(x) = sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

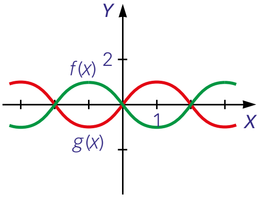
e) $f(x) = sen\,x + 2$

f) $f(x) = 1 - sen\,x$

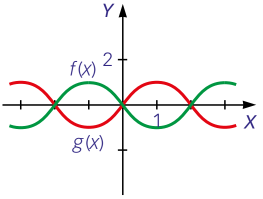
a)



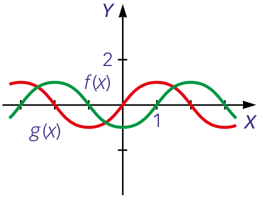
b)



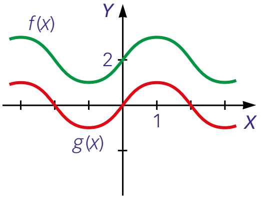
c)



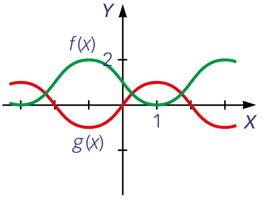
d)



e)

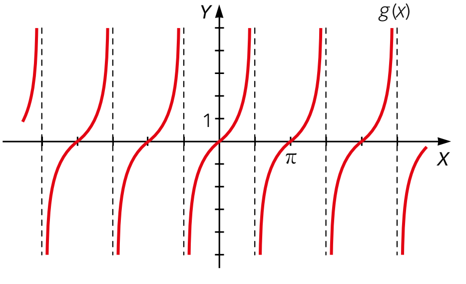


f)



106 A partir de la gráfica de la función trigonométrica $g(x) = tg\ x$, representa las siguientes funciones.

●●○



a) $f(x) = tg\,(x + \pi)$

b) $f(x) = -tg\,(-x)$

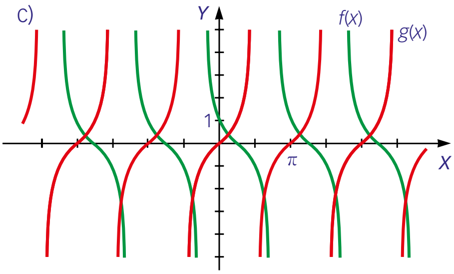
c) $f(x) = 1 - tg\,x$

d) $f(x) = tg\,(x - 1) - 2$

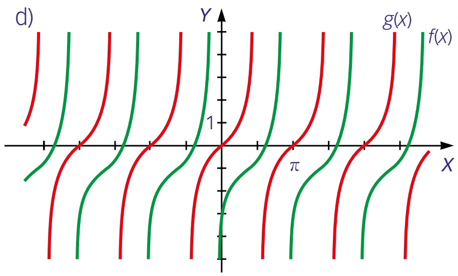
a) La representación de la función es la misma que la de $g(x)$.

b) La representación de la función es la misma que la de $g(x)$.

c)



d)



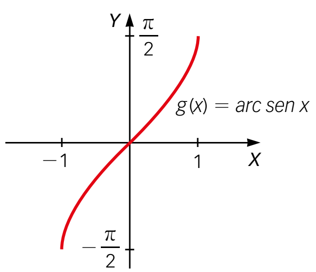
107 A partir de la gráfica de la función $g(x) = arc\ sen\,x$, realiza las gráficas de las funciones.

a) $f(x) = 2 - arc\ sen\,x$

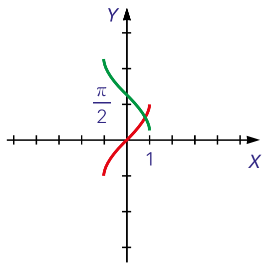
b) $f(x) = \frac{1}{2} + arc\ sen\,x$

c) $f(x) = arc\ sen\,(x + 1)$

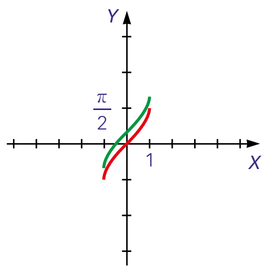
d) $f(x) = arc\ sen\left(x - \frac{1}{2}\right)$



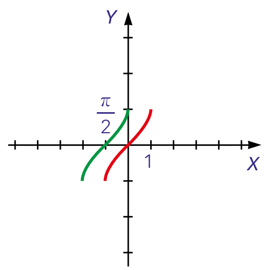
a)



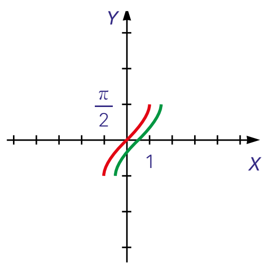
b)



c)



d)



108 **INVENTA.** Escribe funciones trigonométricas con los siguientes periodos.

a) $T = 2\pi$

b) $T = \frac{2\pi}{3}$

c) $T = 3\pi$

d) $T = \frac{\pi}{5}$

e) $T = \pi$

f) $T = \frac{5\pi}{6}$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $f(x) = sen\,x$

b) $f(x) = sen\,(3x)$

c) $f(x) = sen\,\dfrac{2x}{3}$

d) $f(x) = sen\,(10x)$

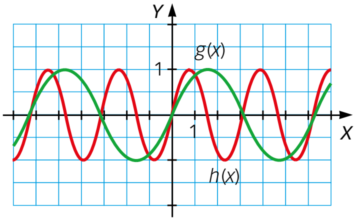
e) $f(x) = sen\,(2x)$

f) $f(x) = sen\,\dfrac{12x}{5}$

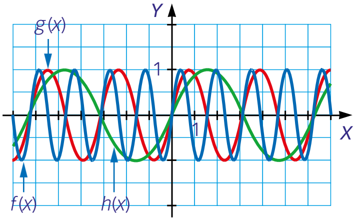
109 A partir de las gráficas de las funciones $g(x) = sen\,x$ y $h(x) = sen\,2x$, representa las siguientes funciones.

a) $f(x) = sen\,4x$

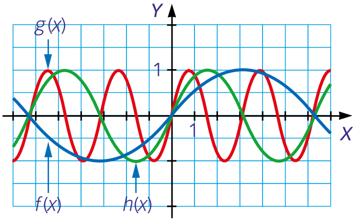
b) $f(x) = sen\,\dfrac{x}{2}$



a)



b)



Funciones definidas a trozos

ACTIVIDADES FLASH

110 Halla $f(-1)$, $f(0)$ y $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ en esta función.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x = 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$x = -1 \rightarrow x < 0 \rightarrow f(-1) = 2$

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0^2 \rightarrow f(0) = 0$

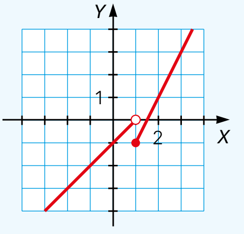
$x = \dfrac{1}{2} \rightarrow f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 1 \rightarrow$

$\rightarrow f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{3}{4}$

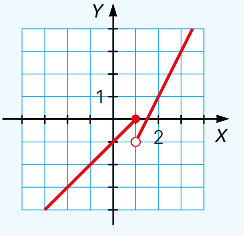
111 ¿Cuál de estas gráficas le corresponde a esta función?

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 1 \\ 2x - 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a)



b)



A la función $f(x)$ le corresponde la gráfica del apartado a), ya que el punto con abscisa $x = 1$ está incluido en el intervalo de definición del segundo trozo, correspondiente a la recta $y = 2x - 3$.

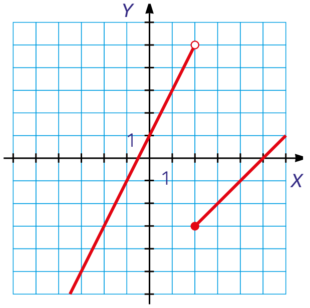
112 Representa y describe las características de las funciones.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 2 \\ x - 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{si } x < 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \\ -x + 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{6}{x - 1} & \text{si } x < 2 \\ 2x + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

a)



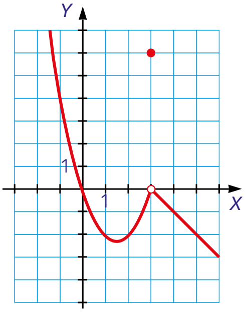
La función está formada por dos semirrectas: la semirrecta creciente de pendiente 2 hasta el punto (2, 5), que no está incluido en su definición, y la semirrecta creciente de pendiente 1 que empieza en el punto (2, −3) incluido.

Corta al eje *Y* en (0, 1) y al eje *X* en (5, 0) y en $\left(\frac{-1}{2}, 0\right)$.

Tiene una discontinuidad de salto finito en el punto $x = 2$.

Dom $f = \mathbb{R}$ Im $f = \mathbb{R}$

b)



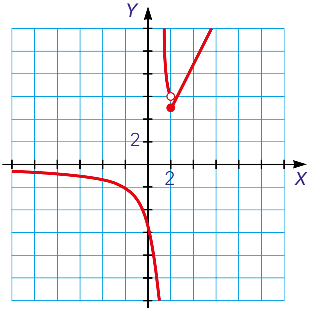
La función está formada por una parábola y una semirrecta: la parábola cóncava de vértice $\left(\frac{3}{2}, \frac{-9}{4}\right)$ hasta el punto (3, 0) sin incluirlo, y a partir de ahí la semirrecta decreciente de pendiente −1, que comienza en el punto (3, 0) no incluido. En $x = 3$ toma el valor 6 y corta a los ejes en (0, 0).

Tiene una discontinuidad evitable en $x = 3$.

Dom $f = \mathbb{R}$

Im $f = \mathbb{R}$

c)



La función está formada por una hipérbola y una semirrecta: la hipérbola decreciente y con discontinuidad en $x = 1$ hasta (2, 6), que no está incluido, y la semirrecta creciente de pendiente 2 que comienza en (2, 5) incluido.

Corta al eje *Y* en el punto (0, −6). No corta al eje *X*.

Tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 1$ y otra de salto finito en $x = 2$.

Dom $f = \mathbb{R} - \{-1\}$

Im $f = (-\infty, 0) \cup [5, +\infty)$

113 ●●○ **INVENTA.** Escribe en cada caso la expresión algebraica de una función a trozos cuya representación sea:

a) Una recta creciente en $(-\infty, 3)$ y una recta decreciente en $[3, +\infty)$.

b) Una parábola en $(-\infty, -1)$ y una recta en $[-1, +\infty)$.

c) Una recta decreciente en $(-\infty, -1)$, una recta creciente en $[-1, 1)$ y una parábola en $[1, +\infty)$.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 3 \\ -x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

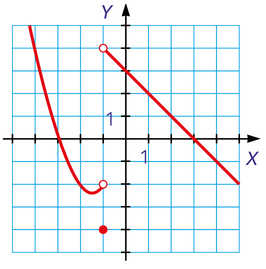
b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

114 ●●○ Representa esta función.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & \text{si } x < -1 \\ -4 & \text{si } x = -1 \\ -x + 3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Estudia el valor que toma la función en los puntos muy próximos, por la izquierda y por la derecha, a -1, y describe lo que sucede.



$x < -1$	-2	$-1{,}5$	$-1{,}1$	$-1{,}05$
$f(x)$	-2	$-2{,}25$	$-2{,}09$	$-2{,}0457$

$x > -1$	0	$-0{,}5$	$-0{,}9$	$-0{,}95$
$f(x)$	3	$3{,}5$	$3{,}9$	$3{,}95$

A la derecha de $x = -1$, las imágenes tienden a 4, es decir, $-(-1) + 3$ y, a la izquierda, tienden a -2, es decir, $(-1)^2 + 3 \cdot (-1)$.

115 Representa y describe estas funciones definidas a trozos.

a) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{2}{x-3} & \text{si } 0 < x \leq 4 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 4 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \leq 1 \\ \log x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{3\}$

Im $f = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

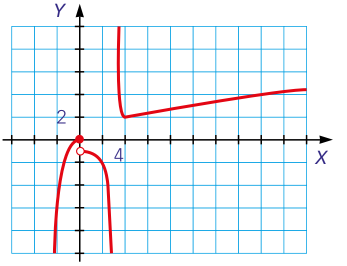
La función es creciente en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ y es decreciente en $(0, 3) \cup (3, 4)$.

Tiene un mínimo relativo en $x = 4$.

Es discontinua en $x = 0$ y en $x = 3$. En $x = 0$ hay una discontinuidad inevitable de salto finito, y en $x = 3$ hay una discontinuidad inevitable de salto infinito.

Tiene una asíntota vertical en $x = 3$.

No es simétrica ni periódica.



b) Dom $f = \mathbb{R}$ Im $f = (0, 2]$

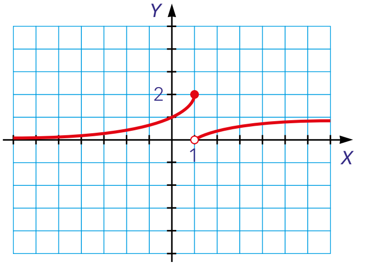
La función es creciente en $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

No tiene máximos ni mínimos.

Es discontinua en $x = 1$, donde hay una discontinuidad inevitable de salto finito.

No tiene asíntotas.

No es simétrica ni periódica.



116 Escribe como funciones definidas a trozos.

a) $f(x) = |x + 2|$

b) $f(x) = |12 - 3x|$

c) $f(x) = |3 - x|$

d) $f(x) = |2x - 4|$

a) $f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{si } x < -2 \\ x + 2 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$

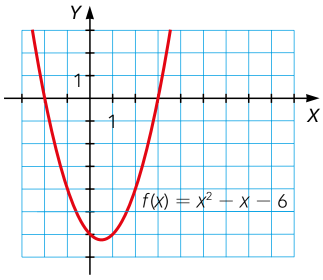
b) $f(x) = \begin{cases} 12 - 3x & \text{si } x < 4 \\ 3x - 12 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

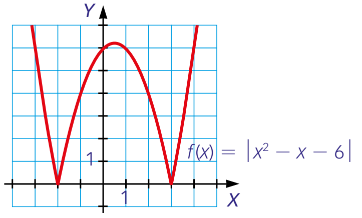
c) $f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x < 3 \\ x - 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 4 - 2x & \text{si } x < 2 \\ 2x - 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

117 Observa la gráfica de la función $f(x) = x^2 - x - 6$.

Realiza la gráfica de $f(x) = |x^2 - x - 6|$.





118 Representa las siguientes funciones a partir de la gráfica de la función $g(x) = |x|$.

a) $f(x) = |x| + 1$

b) $f(x) = |x + 1|$

c) $f(x) = |x| - 1$

d) $f(x) = 1 - |x|$

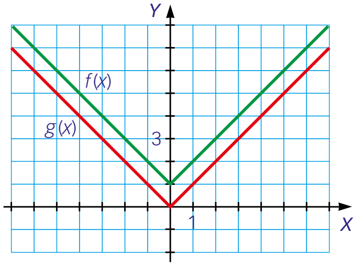
e) $f(x) = |x - 1|$

f) $f(x) = |1 - x|$

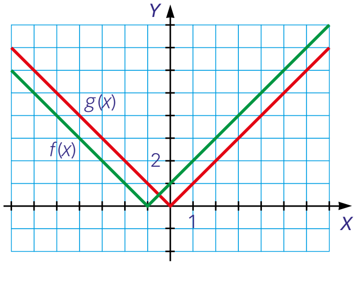
g) $f(x) = |x - 1| + 1$

h) $f(x) = |x + 1| - 1$

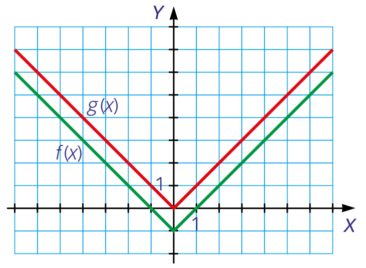
a)



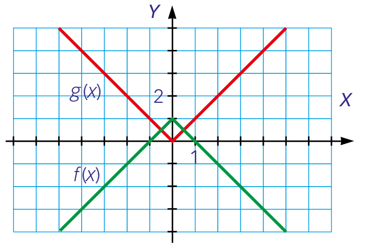
b)



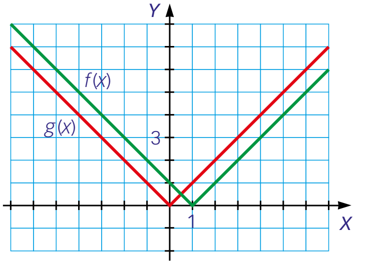
c)



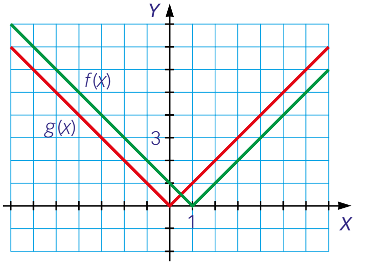
d)



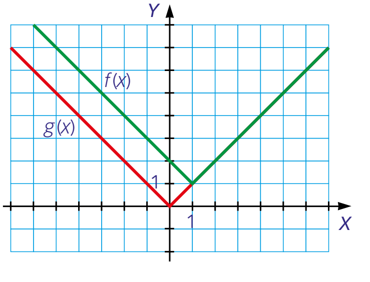
e)



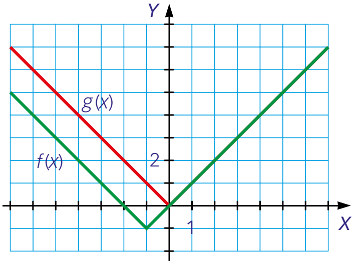
f)



g)



h)



119 Escribe como funciones definidas a trozos y representa.

a) $f(x) = |x^2 - 4x - 5|$

b) $f(x) = |x^2 - 4x + 5|$

c) $f(x) = |2x^2 - 7x + 3|$

d) $f(x) = |-x^2 + 4x - 5|$

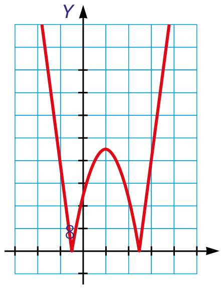
e) $f(x) = |x^2 + 3x + 2|$

f) $f(x) = |-x^2 + 6x - 5|$

g) $f(x) = |x^2 + x - 2|$

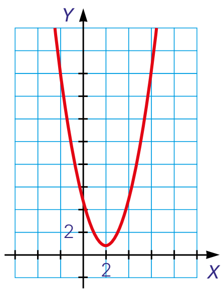
h) $f(x) = |-x^2 + 6x - 9|$

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x - 5 & \text{si } x < -1 \\ -x^2 + 4x + 5 & \text{si } -1 \le x < 5 \\ x^2 - 4x - 5 & \text{si } x \ge 5 \end{cases}$

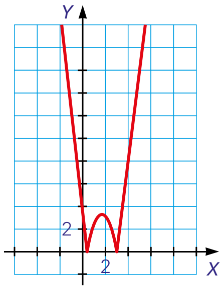


2 X

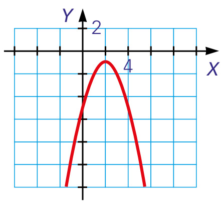
b) $f(x) = x^2 - 4x + 5$



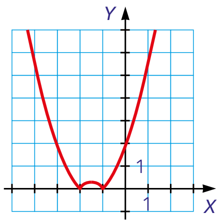
c) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 7x - 3 & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ -2x^2 + 7x + 3 & \text{si } \frac{1}{2} \le x < 3 \\ 2x^2 - 7x - 3 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$



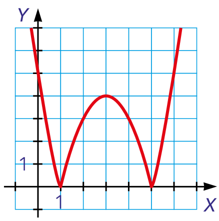
d) $f(x) = -x^2 + 4x - 5$



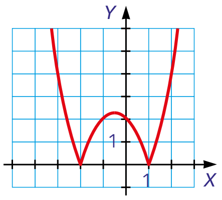
e) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 2 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 - 3x - 2 & \text{si } -2 \le x < 1 \\ x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$



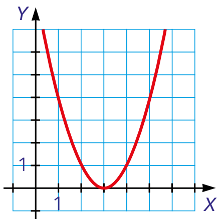
f) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 5 & \text{si } x < 1 \\ -x^2 + 6x - 5 & \text{si } 1 \le x < 5 \\ x^2 - 6x + 5 & \text{si } x \ge 5 \end{cases}$



g) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 - x + 2 & \text{si } -2 \le x < 1 \\ x^2 + x - 2 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$



h) $f(x) = -x^2 + 6x - 9$



Composición de funciones

120 ●○○ Calcula las composiciones de estas funciones.

$$f(x) = 2^x \qquad g(x) = x^2 \qquad h(x) = \frac{1}{x}$$

a) $f \circ g(x)$ c) $h \circ f(x)$ e) $h \circ g(x)$

b) $g \circ h(x)$ d) $g \circ f(x)$ f) $f \circ h(x)$

Determina el valor de cada función para $x = 3$.

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2^{x^2}$

$(f \circ g)(3) = 2^{3^2} = 2^9 = 512$

b) $(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2$

$(g \circ h)(3) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

c) $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(2^x) = \frac{1}{2^x}$

$(h \circ f)(3) = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

d) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2^x) = (2^x)^2 = 2^{2x}$

$(g \circ f)(3) = 2^{2 \cdot 3} = 2^6 = 64$

e) $(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(x^2) = \frac{1}{x^2}$

$(h \circ g)(3) = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

f) $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = 2^{\frac{1}{x}}$

$(f \circ h)(3) = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$

121 ●○○ Dadas las funciones $f(x) = 4x^2 + 11$ y $g(x) = \frac{5}{2}x$, calcula.

a) $(f \circ g)(2)$ c) $(f \circ f)(2)$

b) $(g \circ f)(2)$ d) $(g \circ g)(2)$

a) $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = 4\left(\frac{5 \cdot 2}{2}\right)^2 + 11 = 111$

b) $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = \frac{5}{2} \cdot (4 \cdot 2^2 + 11) =$

$= \frac{135}{2}$

c) $(f \circ f)(2) = f(f(2)) =$

$= 4(4 \cdot 22 + 11) + 11 = 119$

d) $(g \circ g)(2) = g(g(2)) = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 2 = \frac{25}{2}$

122 ●○○ Calcula $(f \circ g)(2)$ si f y g son funciones que cumplen que $f(10) + 5 = 0$ y $g(2) - 10 = 0$.

$$\left.\begin{cases} f(10) = -5 \\ g(2) = 10 \end{cases}\right. \rightarrow$$

$\rightarrow (f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(10) = -5$

123 ●●○ Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 - 5$, calcula $f^{-1} \circ g(x)$ y $g \circ f^{-1}(x)$.

$f^{-1}(x) = x^2$

$(f^{-1} \circ g)(x) = f^{-1}(g(x)) = (x^2 - 5)^2 =$

$= x^4 - 10x^2 + 25$

$(g \circ f^{-1})(x) = g(f^{-1}(x)) = (x^2)^2 - 5 = x^4 - 5$

124 ●●○ **INVENTA.** Escribe dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, realiza la composición $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$ y comprueba que la composición de funciones no es conmutativa.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Sean $f(x) = x - 1$ y $g(x) = x^2$.

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 - 1$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x - 1) = (x - 1)^2$

La composición de funciones no es conmutativa, ya que para que una propiedad se cumpla de forma general, debe cumplirse para todas las funciones.

125 ●●○ Si $f(x) = \frac{1}{x + 1}$, calcula cuánto valen $f(f(x))$ y $f(f(f(x)))$.

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$f(f(x)) = f\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x+1}+1} = \frac{x+1}{x+2}$$

$$f(f(f(x))) = f\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \frac{1}{\frac{x+1}{x+2}+1} =$$

$$= \frac{x+2}{2x+3}$$

126 **INVESTIGA.** Calcula $g(x)$ en cada caso.

a) $f(x) = \frac{2x}{3x+4}$ y $f(g(x)) = x$

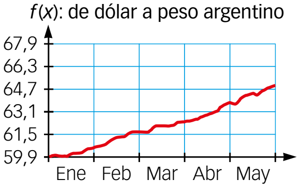
b) $f(x) = 10x$ y $f(g(x)) = -5x$

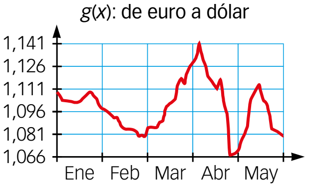
a) $g(x) = f^{-1}(x) = \frac{-4x}{3x-2}$

b) $f^{-1}(x) = \frac{x}{10} \rightarrow$

$\rightarrow g(x) = f^{-1}(-5x) = \frac{-5x}{10} = -\frac{x}{2}$

127 **MATEMÁTICAS Y... VIAJES.** Cuando se viaja a un país fuera de la Unión Europea es necesario cambiar dinero a la moneda local. A veces, el cambio solo está indicado en dólares y tenemos que hacer nosotros el cambio a euros. Estas son las gráficas del cambio de divisas que encontramos en Argentina a comienzos de 2022.





Indica qué significado tienen las siguientes composiciones de funciones.

a) f^{-1}

b) g^{-1}

c) $f \circ g$

d) $g \circ f$

e) $g^{-1} \circ f^{-1}$

f) $f^{-1} \circ f \circ g$

a) Cambio de divisas de peso argentino a dólar.

b) Cambio de divisas de dólar a euro.

c) Cambio de euro a peso argentino.

d) No tiene sentido porque g cambia de dólar a peso argentino y f cambia euro a dólar.

e) Cambio de peso argentino a euro.

f) Cambio de euro a dólares.

128 **RETO.** Dada la función definida en los enteros positivos:

$$f(n) = \begin{cases} n+5 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Si $f(f(f(k))) = 35$ y k es impar, ¿cuál es el valor de k?

Como k es impar: $f(f(f(k))) = f(f(k+5))$

$k+5$ es par: $f(f(k+5)) = f\left(\frac{k+5}{2}\right)$

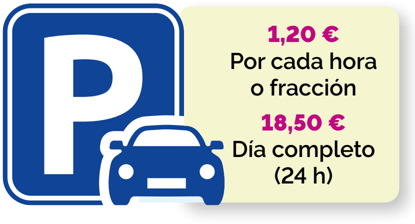
$\frac{k+5}{2}$ es impar:

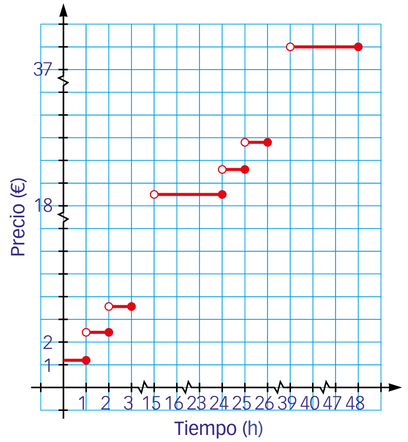
$$f\left(\frac{k+5}{2}\right) = \frac{k+15}{2} = 35 \rightarrow k = 55$$

3. Interpreta y relaciona las funciones elementales con fenómenos cotidianos

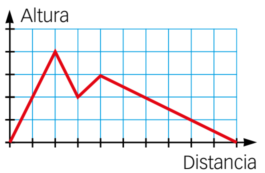
129 **MATEMÁTICAS Y... PRECIOS.** Los aparcamientos públicos se suelen pagar por horas completas. Así, por un coche estacionado, a partir de 1 hora y 1 minuto, se pagan 2 horas. Además, suelen tener un precio máximo diario que es el precio del día completo.

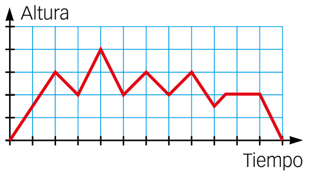
Dibuja la gráfica que represente el precio que hay que pagar por aparcar un vehículo en este aparcamiento entre 0 horas y 48 horas.





130 **RETO.** Un montañero atraviesa una montaña, y, como es tan despistado, a veces pierde cosas y retrocede para recogerlas. El perfil de su caminata se muestra en las siguientes gráficas. ¿Puedes saber cuántas veces ha retrocedido?





El montañero ha retrocedido tres veces: una vez antes de llegar el primer pico y dos veces al descender del segundo pico.

131 El precio en euros de un artículo perecedero que empieza a venderse el primer día de un determinado mes varía con el tiempo, en días, según la función:

$$P(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{4} + 8 & \text{si } 0 \leq t \leq 4 \\ \dfrac{-t^2}{4} + 2t + 5 & \text{si } 4 < t \leq 10 \end{cases}$$

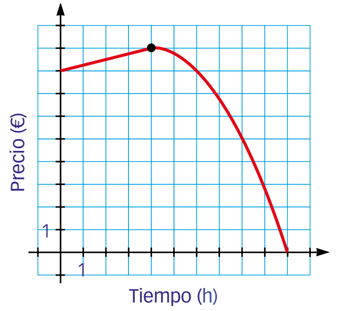
a) ¿Cuál es el precio inicial del artículo?

b) Dibuja la gráfica de la función $P(t)$.

a) $t = 0 \rightarrow P(0) = 8$

El precio inicial es de 8 €.

b)



132 INTERNET **MATEMÁTICAS Y... BIOLOGÍA.** La dinámica de poblaciones es una rama de la biología que, con el auxilio de las matemáticas, trata de describir y cuantificar los cambios que ocurren en una población. El desarrollo de una población de peces viene modelado por la función

$$P(t) = \frac{20}{1 + 19e^{-0,5t}}, \text{ con } t \geq 0.$$

En el modelo, $P(t)$ es el tamaño de la población en toneladas y t el número de años después del instante inicial.

a) Determina cuántos años deben transcurrir para que la población de peces llegue a las 15 toneladas.

b) ¿Puede suceder que la población sobrepase alguna vez las 20 toneladas?

a) $\dfrac{20}{1 + 19e^{-0,5t}} = 15 \rightarrow$

$\rightarrow 20 = 15 + 19 \cdot 15e^{-0,5t} \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{1}{57} = e^{-0,5t} \rightarrow \ln\left(\dfrac{1}{57}\right) = -\dfrac{t}{2} \rightarrow$

$\rightarrow t = -2\ln\left(\dfrac{1}{57}\right) \rightarrow t = 2\ln 57 \approx 8,086$

Deben transcurrir más de 8 años.

b) $\dfrac{20}{1 + 19e^{-0,5t}} > 20 \rightarrow$

$\rightarrow 1 + 19e^{-0,5t} < 1 \rightarrow 19e^{-0,5t} < 0$

No se cumple nunca porque esta expresión es siempre positiva.

Esta actividad puede utilizarse para trabajar el ODS 8, vida submarina.

133 **MATEMÁTICAS Y... SOCIEDAD.** Una ONG ha estimado que el número de personas ingresadas en los hospitales tras un tsunami sigue aproximadamente la fórmula:

$$P(t) = 1 + \frac{110}{t^2 + 10} \qquad t \in (0, 30)$$

donde P es el número de personas hospitalizadas, en miles, y t es el número de días transcurridos desde el tsunami.

a) ¿Cuántas personas habrá hospitalizadas el primer día?

b) ¿Y cuántas habrá al cabo de tres semanas?

c) Si la capacidad hospitalaria de una isla del área afectada es de 2000 camas, ¿hasta qué día estuvo desbordada la capacidad?

a) 11000 personas

b) 1243 personas

c) $1 + \frac{110}{t^2 + 10} = 2 \rightarrow$

$\rightarrow t^2 + 120 = 2t^2 + 20 \rightarrow$

$\rightarrow t^2 - 100 = 0 \rightarrow t = \pm 10$

Como el número de personas hospitalizadas decrece según el número de días, la capacidad de hospitalización estuvo desbordada hasta el décimo día.

Esta actividad puede utilizarse para trabajar el ODS 17, alianzas para lograr los objetivos.

INTERNET

134 **MATEMÁTICAS Y... FÍSICA.** Según la ley de enfriamiento de Newton, la temperatura de un objeto sigue la función $f(t) = T + (C - T) \cdot e^{-kt}$, donde T es la temperatura ambiente, C la temperatura inicial, t el tiempo transcurrido y k la tasa de enfriamiento del objeto por unidad de tiempo.

Un objeto con una temperatura de 40 °C se deja al aire libre, donde la temperatura es de 25 °C, y después de 10 minutos la temperatura del objeto es de 34 °C. ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que el objeto se enfríe hasta tener una temperatura de 30 °C?

$f(10) = 34 = 25 + (40 - 10) \cdot e^{-10k} \rightarrow$

$\rightarrow k = 0{,}12$

$30 = 25 + (40 - t) \cdot e^{-0{,}12t} \rightarrow$

$\rightarrow t \approx 13{,}802$ min

135 Nina y Simón compiten en una carrera ciclista de ida y vuelta entre dos ciudades. A la ida Nina va a 25 km/h y a la vuelta, ya cansada, a 15 km/h. Simón, sin embargo, va a 20 km/h todo el rato.

a) ¿Quién gana?

b) ¿Hay alguna forma de que Nina, yendo más rápida a la ida y más lenta a la vuelta, gane a Simón teniendo en cuenta que la media de las dos velocidades de Nina es 20 km/h?

a) Ambos llegan a la vez, pues la velocidad media de Nina es la misma que lleva Simón en su carrera.

b) No, si la velocidad media de Nina sigue siendo la misma que la de Simón, siempre llegarán al mismo tiempo.

136 En una carrera de 1000 metros, Mamen saca 50 metros de ventaja a Camilo. En la próxima carrera, Mamen saldrá 50 metros por detrás de Camilo.

a) ¿Es suficiente para que lleguen a la vez a la meta?

b) Si no lo es, ¿cuántos metros serían necesarios?

a) No, porque si siempre corren al mismo ritmo, mientras Mamen corre 1000 m, Camilo corre solo 950 m. Es decir, alcanza a Camilo cuando están a 50 m de la meta.

b) $\frac{50}{1000} = \frac{x}{50} \rightarrow x = 2{,}5$

Mamen debería salir 52,5 m por detrás de Camilo.

137 Considera una piscina de agua llena hasta el borde en la que se abre una válvula para vaciarla. La altura (en metros) del agua de la piscina viene dada por esta función:

$$h(t) = 2{,}15 + \ln(8{,}9 - 0{,}51t)$$

con t el tiempo (en minutos) desde que se abre la válvula. Determina tras cuánto tiempo la altura del agua es la mitad de la altura de la piscina.

$2{,}15 + \ln(8{,}9 - 0{,}51t) =$

$= \dfrac{2{,}15 + \ln(8{,}9 - 0{,}51t)}{2} \rightarrow$

$\rightarrow 4 = -\ln(8{,}9 - 0{,}51t) \rightarrow$

$\rightarrow e^{-4} = 8{,}9 - 0{,}51t \rightarrow t \approx 17{,}4$ min

La altura del agua es la mitad de la de la piscina después de 17,4 min.

138 ●●○ Tras lanzar un globo aerostático, su altura, en metros, viene determinada por la función:

$$A(t) = \frac{30}{1 + 29e^{-2t}} \text{ para } t \in [0, 5],$$

con t en minutos.

a) Halla los metros que sube el globo en el primer minuto.

b) Cuando el globo se encuentra entre 12 y 20 metros de altura, se destapan dos paneles publicitarios. ¿Durante cuántos segundos se verá la publicidad?

a) $A(1) = 6{,}09$ metros de altura.

b) $A(t) = 12 \rightarrow t = 1{,}48$ min

$A(t) = 20 \rightarrow t = 2{,}03$ min

$2{,}03 - 1{,}48 = 0{,}55$

Se verán durante 0,55 min.

139 ●●○ Estáis organizando el viaje de fin de curso para tu clase.

Agencia 1.

- Si el número de estudiantes que va al viaje es de 40 o menos, cada uno pagará 200 €.
- Si es superior a 40, se descontará un 10 % a cada uno.

Agencia 2.

- Si completan un autobús de 60 personas, el precio será 150 € por persona.
- Por cada asiento vacío en el autobús, se incrementará el precio un 1 % a persona.

¿Qué agencia os conviene?

Agencia 1:

$$f(x) = \begin{cases} 200x & \text{si } 0 \le x \le 40 \\ 180x & \text{si } x > 40 \end{cases}$$

Agencia 2:

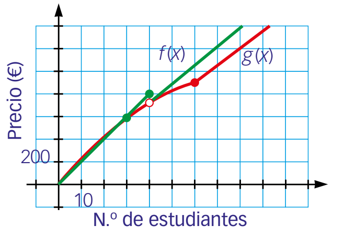
$$150 \cdot \left(1 + \frac{60 - x}{100}\right)x = 240x - 1{,}5x^2$$

$$g(x) = \begin{cases} 240x - 1{,}5x^2 & \text{si } 0 \le x < 60 \\ 150x & \text{si } x \ge 60 \end{cases}$$

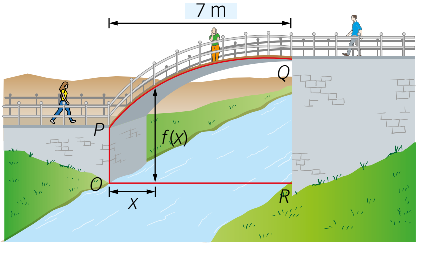
Calculamos los puntos de intersección de ambas funciones.

- Si $0 \le x \le 40 \rightarrow 200x = 240x - 1{,}5x^2 \rightarrow$
  $\rightarrow 1{,}5x^2 - 40x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{80}{3} = 26{,}\widehat{6} \end{cases}$
- Si $40 < x < 60 \rightarrow 180x = 240x - 1{,}5x^2 \rightarrow$
  $\rightarrow 1{,}5x^2 - 60x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 40 \end{cases}$
- Si $x \ge 60 \rightarrow 180x = 150x \rightarrow x = 0$

Nos conviene la primera agencia si el número de estudiantes es menor o igual a 26. A partir de 27 estudiantes, elegiremos la segunda agencia.



140 ●●○ **MATEMÁTICAS Y... ARQUITECTURA.** En la figura está representado un puente peatonal sobre el ío Sella. Considerando O el origen de coordenadas, el arco del puente viene dado por $f(x) = 9 - 2{,}5(e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1})$, con $x \in [0, 7]$.



a) Sea S el punto sobre el segmento OR que verifica la ecuación $\sqrt{(f(0))^2 + x^2} = 2$. Resuelve la ecuación e interpreta la solución en el contexto del problema.

b) En el puerto, junto al puente, hay un barco de vela cuyo mástil mide 6 metros desde el punto más alto hasta el agua. ¿Podrá pasar bajo el puente?

a) $f(0) = 1{,}28 \rightarrow$
$\rightarrow (f(0))^2 = \sqrt{1{,}65 + x^2} = 2 \rightarrow$
$\rightarrow 1{,}65 + x^2 = 4 \rightarrow x = 1{,}53$

$f(1{,}53) = 2{,}75$

El punto S está a 2,75 m de altura y a una distancia de 1,53 m del punto O.

b) Representando la gráfica de la función que define la altura del arco del puente obtenemos que la altura máxima es de 4 m, luego el barco no podrá pasar.

141 ●●○ En un lago existe una especie de pez grande que se alimenta de una raza de peces más pequeña, y esta, a su vez, se alimenta de plancton. El número de peces grandes es una función $f(x)$ de la cantidad x de peces pequeños y el número de peces pequeños es una función $g(y)$ de la cantidad y de plancton del lago. Expresa la población de peces grandes en función del plancton del lago si:

$$f(x) = 30 + \sqrt{\frac{x}{120}} \qquad g(y) = 4y - 1$$

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = 30 + \sqrt{\frac{4y-1}{120}}$$

FAKE NEWS

¿Baja el paro?

Un estudio sobre la repercusión del turismo en la costa española asegura que durante los días festivos se crean cerca de 10000 nuevos puestos de trabajo en el sector.

Los últimos datos del Ministerio de Trabajo muestran que en el mes de junio se contrataron 40000 personas en hostelería en la costa, a pesar de que solo hubo dos días festivos.

La oposición asegura que los datos están manipulados de cara a las próximas elecciones.

Y tú, ¿qué opinas?

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Se manipulan los datos al utilizar la cercanía del verano y las contrataciones por festivos. Es posible que los datos se refieran a contratos de un día y por tanto 2 fines de semana, con 2 días cada uno, contratando a 10000 personas, resultan 40000 contratos.

PROBLEMAS APARENTEMENTE DISTINTOS

142 Considera la siguiente función.

$$f(x) = 1000 \ln\left(\frac{x}{10}\right)$$

a) Halla el dominio de la función.

b) Calcula $f^{-1}(x)$.

a) $\text{Dom } f = (0, +\infty)$ b) $f^{-1}(x) = 10e^{\frac{x}{1000}}$

143 El número de días que necesita una población de plancton para llegar a pesar x microgramos viene dado por

$$f(x) = 1000 \ln\left(\frac{x}{10}\right).$$

a) ¿Entre qué valores varía el peso?

b) Indica el peso en función del tiempo.

a) El peso varía entre 0 y $+\infty$.

b) $f^{-1}(x) = 10e^{\frac{x}{1000}}$ siendo x el n.º de días.

144 Sea la función: $f(x) = 200 \cdot b^x$

a) ¿Cuál es la variable independiente?

b) Sea $b = 2{,}5$ y $g(x) = 20000$, determina el valor de x para que se cumpla $f(x) = g(x)$.

c) Indica los posibles valores de b para que $f(x)$ sea decreciente.

a) La variable x.

b) $20\,000 = 200 \cdot 2{,}5^x \rightarrow 2{,}5^x = 100 \rightarrow$
$\rightarrow x = \dfrac{\ln 100}{\ln 2{,}5} = 5{,}02$

c) $0 < b < 1$

145 El ritmo básico de reproducción, RO, de un virus en una región es 2,5. Es decir, cada persona enferma infecta a otras 2,5. Si el primer día había 200 personas enfermas, expresa el número de infectados en función del tiempo.

a) ¿Cuál es la variable independiente?

b) ¿Cuándo se alcanzaron 20 000 infectados?

c) ¿En qué intervalo debe estar el RO para que la epidemia esté controlada?

La función es $f(x) = 200 \cdot 2{,}5^x$.

a) La variable independiente es el tiempo.

b) $20\,000 = 200 \cdot 2{,}5^x \rightarrow 2{,}5^x = 100 \rightarrow$

$$\rightarrow x = \frac{\ln 100}{\ln 2{,}5} = 5{,}02$$

Se alcanzaron al quinto día.

c) En el intervalo (0,1), donde la función es decreciente.

146 Considera las funciones:

$$f(x) = \frac{4}{3}\pi x^3 \qquad g(x) = \frac{50\,000}{x}$$

a) Calcula $f^{-1}(x)$.

b) Halla $h(x) = f^{-1} \circ g(x)$.

a) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\dfrac{3x}{4\pi}}$

b) $h(x) = f^{-1}(g(x)) = f^{-1}\left(\dfrac{50\,000}{x}\right)$

$$= \sqrt[3]{\frac{3\,\dfrac{50\,000}{x}}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{37\,500}{\pi x}}$$

147 Dayana infla su balón de playa para jugar con él.

a) Halla el radio del balón en función del volumen.

b) Se le pincha y comienza a desinflarse. La medida de su radio sigue la función $g(t) = \dfrac{50\,000}{t}$, $t > 10$, con t en minutos. Indica el radio en función del tiempo.

a) $V(r) = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow r = V^{-1} = \sqrt[3]{\dfrac{3V}{4\pi}}$

b) $r(t) = \dfrac{50\,000}{t}$

¿PARA QUÉ SIRVE...?

1 ¿Cuál es el espesor de la estratosfera en el ecuador?

35 km.

2 ¿Qué relación hay entre la temperatura y las capas de la atmósfera?

La temperatura es más baja cuanto mayor es la altura de la capa.

3 ¿En qué capa se registra la menor temperatura?

En la mesosfera.

4 De acuerdo con el gráfico, ¿qué temperatura tiene la atmósfera a 110 km

Aproximadamente −20 °C.

5 ¿Dónde se encuentra la capa de ozono? Investiga cuál es la actual situación de la capa de ozono y por qué resulta tan importante su recuperación y conservación.

La capa de ozono está situada en la estratosfera.

Actualmente se encuentra en una situación de desgaste grave por los gases de efecto invernadero, lo que provoca que filtre menos rayos UVA, ocasionando el derretimiento de los polos, provocando problemas para que las plantas hagan la fotosíntesis, etc., lo que implica un daño enorme en el ecosistema y horribles consecuencias para la humanidad.

6 Si se asume que la temperatura a nivel del mar es de 20 °C, ¿qué temperatura deberá tener aproximadamente la cima del Everest a 8 848 m de altura?

$20 - 6 \cdot 8{,}848 = -33{,}09$ °C