1. LUGARES GEOMÉTRICOS

1. Determina el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los puntos A y B:

a) A(-2, -1) y B(4, 1) b) A(3, -5) y B(7, 1) c) A(0, -2) y (0, 7)

Solución:

a) Sea $P(x, y)$ un punto equidistante de A y B, entonces $d(A, P) = d(B, P)$.

$$d(A, P) = \sqrt{(x-(-2))^2 + (y-(-1))^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 4x + 2y + 5}$$

$$d(B, P) = \sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 8x - 2y + 17}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 4x + 2y + 5} = \sqrt{x^2 + y^2 - 8x - 2y + 17} \rightarrow$$
$$\rightarrow 4x + 2y + 5 = -8x - 2y + 17 \rightarrow$$
$$\rightarrow 3x + y - 3 = 0$$

El lugar geométrico es la mediatriz del segmento AB, $3x + y - 3 = 0$.

b) Sea $P(x, y)$ un punto equidistante de A y B, entonces $d(A, P) = d(B, P)$.

$$d(A, P) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-(-5))^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 6x + 10y + 34}$$

$$d(B, P) = \sqrt{(x-7)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 14x - 2y + 50}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 6x + 10y + 34} = \sqrt{x^2 + y^2 - 14x - 2y + 50} \rightarrow$$
$$\rightarrow -6x + 10y + 34 = -14x - 2y + 50 \rightarrow$$
$$\rightarrow 2x + 3y - 4 = 0$$

El lugar geométrico es la mediatriz del segmento AB, $2x + 3y - 4 = 0$.

c)) Sea $P(x, y)$ un punto equidistante de A y B, entonces $d(A, P) = d(B, P)$:

$$d(A, P) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-(-2))^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4}$$

$$d(B, P) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-7)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 14y + 49}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4} = \sqrt{x^2 + y^2 - 14y + 49} \rightarrow$$
$$\rightarrow 4y + 4 = -14y + 49 \rightarrow y = \frac{5}{2}$$

El lugar geométrico es la mediatriz del segmento AB, $y = \frac{5}{2}$.

2. Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los siguientes pares de rectas:

a) $\begin{Bmatrix} -2x+7y+9=0 \\ 4x-14y+11=0 \end{Bmatrix}$ b) $\begin{Bmatrix} 2x-3y+3=0 \\ 3x-2=0 \end{Bmatrix}$

Solución:

a) $\dfrac{|-2x+7y+9|}{\sqrt{(-2)^2+7^2}}=\dfrac{|4x-14y+11|}{\sqrt{4^2+(-14)^2}} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{-2x+7y+9}{\sqrt{53}}=\dfrac{4x-14y+11}{2\sqrt{53}} \\ \dfrac{-2x+7y+9}{\sqrt{53}}=\dfrac{-4x+14y-11}{2\sqrt{53}} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} -4x+14y+18=4x-14y+11 \\ -4x+14y+18=-4x+14y-11 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 8x-28y-7=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

Como las rectas son paralelas, el lugar geométrico es otra recta paralela a ambas.

b) $\dfrac{|2x-3y+3|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\dfrac{|3x-2|}{\sqrt{3^2+0^2}} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{2x-3y+3}{\sqrt{13}}=\dfrac{3x-2}{3} \\ \dfrac{2x-3y+3}{\sqrt{13}}=\dfrac{-3x+2}{3} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 6x-9y+9=3\sqrt{13}x-2\sqrt{13} \\ 6x-9y+9=-3\sqrt{13}x+2\sqrt{13} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} (6-3\sqrt{13})x-9y+9+2\sqrt{13}=0 \\ (6+3\sqrt{13})x-9y+9-2\sqrt{13}=0 \end{cases}$$

El lugar geométrico está formado por las dos bisectrices de los ángulos formados por las dos rectas.

3. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano, P(x, y), tales que el triángulo ABP sea rectángulo en P, siendo A(2, 1) y B(4, -3). Interpreta la figura que obtienes.

Solución:

Para que el triángulo sea rectángulo en P, se ha de cumplir que: $\vec{PA} \perp \vec{PB} \Rightarrow \vec{PA}\cdot\vec{PB}=0$

$(2-x, 1-y)\cdot(4-x, -3-y)=0$ –> $(2-x)\cdot(1-y)+(4-x)\cdot(-3-y)=0$

$8-2x-4x+x^2-3-y+3y+y^2=0$ –> $x^2+y^2-6x+2y+5=0$

Es decir : $(x-3)^2+(y+1)^2=5$

Obtenemos una circunferencia de centro (3, -1) (que es el punto medio del segmento AB) y de radio $\sqrt{5}$.

4. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano, P(x, y), tales que la resta de sus coordenadas es 6. Interpreta la figura que obtienes.

Solución:

$x-y=6$ Es una recta

2. CIRCUNFERENCIA.

ECUACIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA DE CENTRO (0,0) Y RADIO r

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ECUACIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA DE CENTRO (a,b) Y RADIO r

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

ECUACIÓN GENERAL DE UNA CIRCUNFERENCIA

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

$$A = -2a \qquad B = -2b \qquad C = a^2 + b^2 - r^2$$

2.1. Calcula la ecuación de una circunferencia

5. Calcula una circunferencia a partir de los datos siguientes:

a. Cuyo centro es C(0,0) y pasa por el punto P(6, 8)

b. Cuyo centro es C(1, 2) y pasa por el punto P(1, 6)

c. Los puntos (-3, -1) y (1, 2) son los extremos de uno de sus diámetros

d. Concéntrica a $x^2 + y^2 - 10x + 8y - 50 = 0$ pasando por el punto (2,2)

e. r= $2\sqrt{5}$, pasa por (0,0) y su centro está en x+y=0

f. Pasa por (0,2) y (2,0) y su centro está en x + y - 5 = 0

g. Circunscrita al triángulo de vértices (0,2), (4,6) y (2,10)

h. Pasa por A(12,0) ; B(0,-8) ; C(12,10)

i. Calcula una circunferencia que pasa por el origen de coordenadas , tiene su centro en la bisectriz del segundo cuadrante y su diámetro es $4\sqrt{2}$.

Soluciones:

a) $r^2 = 6^2 + 8^2$ –> $x^2 + y^2 = 10^2$ –> $x^2 + y^2 - 100 = 0$

b) $r^2 = (1 - 1)^2 + (6 - 2)^2 = 16$ –> $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$ $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$

c) El centro es el punto medio del segmento (-3, -1) y (1, 2): C(-1, 1/2)

El radio el la distancia del centro a un extremo del segmento: $r^2 = (-3 + 1)^2 + (-1 - 1/2)^2 = 25/4$

$(x + 1)^2 + (y - 1/2)^2 = 25/4$ –> $x^2 + y^2 + 2x - y - 5 = 0$

d) Concéntrica a $x^2 + y^2 - 10x + 8y - 50 = 0$ –> C(5, -4)

El radio es la distancia del centro C(5, -4) al punto P(2, 2): $r^2 = (5 - 2)^2 + (-4 - 2)^2 = 45$

$(x - 5)^2 + (y + 4)^2 = 45$ $x^2 + y^2 - 10x + 8y - 4 = 0$

e) El radio es la distancia de (0,0) al centro C(x, y): $r^2=(x-0)^2+(y-0)^2=(2\sqrt{5})^2$ –>

$x^2 + y^2 = 20$

Su centro está en x+y=0, por tanto, tenemos un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ x+y=0 \end{cases} \rightarrow (-y)^2+y^2=20 \rightarrow 2y^2=20 \rightarrow y=\pm\sqrt{10}$$

Dos soluciones posibles:

$$C_1(-\sqrt{10},\ \sqrt{10}) \rightarrow (x+\sqrt{10})^2+(y-\sqrt{10})^2=20 \rightarrow x^2+y^2+2\sqrt{10}x-2\sqrt{10}y=0$$

$$C_2(\sqrt{10},\ -\sqrt{10}) \rightarrow (x-\sqrt{10})^2+(y+\sqrt{10})^2=20 \rightarrow x^2+y^2-2\sqrt{10}x+2\sqrt{10}y=0$$

f) La distancia del centro, C(x, y), a los puntos (0,2) y (2,0) es la misma:

$x^2 + (y - 2)^2 = (x - 2)^2 + y^2$ –> $x^2 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 4x + 4 + y^2$ –> $4x - 4y = 0$ –> $x = y$

Su centro está en x + y - 5 = 0, por tanto, tenemos un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x=y \\ x+y-5=0 \end{cases} \rightarrow y+y-5=0 \rightarrow y=5/2 \rightarrow x=5/2$$

El radio es la distancia del centro, (5/2, 5/2) a (0,2): $r^2 = (5/2 - 0)^2 + (5/2 - 2)^2 = 25/4 + 1/4 = 13/2$

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{13}{2} \rightarrow x^2+y^2-5x-5y+6=0$$

g) Circunscrita al triángulo de vértices (0,2), (4,6) y (2,10): $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

$$\begin{cases} (0,2) \rightarrow 0^2+2^2+A\cdot 0+B\cdot 2+C=0 \\ (4,6) \rightarrow 4^2+6^2+A\cdot 4+B\cdot 6+C=0 \\ (2,10) \rightarrow 2^2+10^2+A\cdot 2+B\cdot 10+C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2B+C=-4 \\ 4A+6B+C=-52 \\ 2A+10B+C=-104 \end{cases} \Rightarrow \quad C = -4 - 2B$$

$$\begin{cases} 4A+6B-4-2B=-52 \\ 2A+10B-4-2B=-104 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4A+4B=-48 \\ 2A+8B=-100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -A-B=12 \\ A+4B=-50 \end{cases} \Rightarrow \quad 3B = -38$$

A = -12 + 38/3 = 2/3 B = -38/3 C = - 4 + 76/3 = 64/3

La circunferencia es: $x^2 + y^2 - 74/3x - 38/3y + 64/3 = 0$

h) Pasa por A(12,0) ; B(0,-8) ; C(12,10)

$$\begin{cases} (12,0) \rightarrow 12^2+0^2+A\cdot 12+B\cdot 0+C=0 \\ (0,-8) \rightarrow 0^2+(-8)^2+A\cdot 0+B\cdot(-8)+C=0 \\ (12,10) \rightarrow 12^2+10^2+A\cdot 12+B\cdot 10+C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12A+\quad +C=-144 \\ -8B+C=-64 \\ 12A+10B+C=-244 \end{cases} \Rightarrow \quad C = -144 - 12A$$

Sustituyendo en la 3ª ecuación: $12A + 10B - 144 - 12A = -244 \quad \rightarrow \quad 10B = -100 \quad \rightarrow \quad$ **$B = -10$**

Sustituyendo en la 2ª ecuación: $-8(-10) + C = -64 \quad \rightarrow \quad$ **$C = -64 - 80 = -144$**

Sustituyendo en la 1ª ecuación: $12A - 144 = -144 \quad \rightarrow \quad$ **$A = 0$**

La circunferencia es: **$x^2 + y^2 - 10y - 144 = 0$**

i) Calcula una circunferencia que pasa por el origen de coordenadas , tiene su centro en la bisectriz del segundo cuadrante y su diámetro es $4\sqrt{2}$

El radio es la mitad del diámetro: $r=2\sqrt{2}$

El centro, C(a, b), está en la bisectriz del 2º cuadrante: $y = -x \quad \rightarrow \quad C(a, -a)$

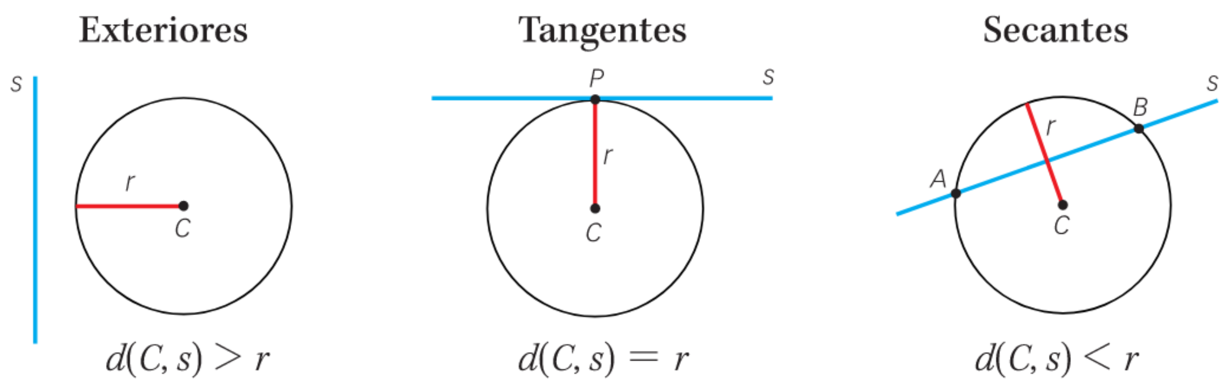
Pasa por el origen de coordenadas: $d(C, O) = r \quad \rightarrow \quad (a-0)^2 + (-a-0)^2 = (2\sqrt{2})^2 \quad \rightarrow \quad 2a^2 = 8$

Dos soluciones: $a = 2 \quad C_1 = (2, -2)$ y $a = 2 \quad C_2 = (-2, 2)$

$(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 8 \qquad\qquad (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$

$x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$ $\qquad\qquad$ **$x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$**

2.2. Posición relativa de circunferencias y rectas



6. Calcula la circunferencia de centro en (-1, 6) y tangente a $3x - 4y + 2 = 0$

Solución: $r=d(C,t)=\frac{|3(-1)-4\cdot 6+2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{25}{5}=5 \qquad (x + 1)^2 + (y - 6)^2 = 25$

7. Calcula la circunferencia concéntrica a $x^2+y^2 + 12x - 16y - 17 = 0$ y que sea tangente a

t: $5x - 12y - 4 = 0$

Solución: C(-6, 8) r = d(P, t) = 10 $(x + 6)^2 + (y - 8)^2 = 100$

8. Calcula la recta tangente y normal a la circunferencia $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 25$ en el punto P(4,10).

Solución: C(4, 5) $\vec{CP}=(0,5)$ –>

(0, 1) vector director de la recta normal y (1, 0) vector director de la tangente:

Recta tangente: (x, y) = (4, 10) + t (1, 0) **y= 10**

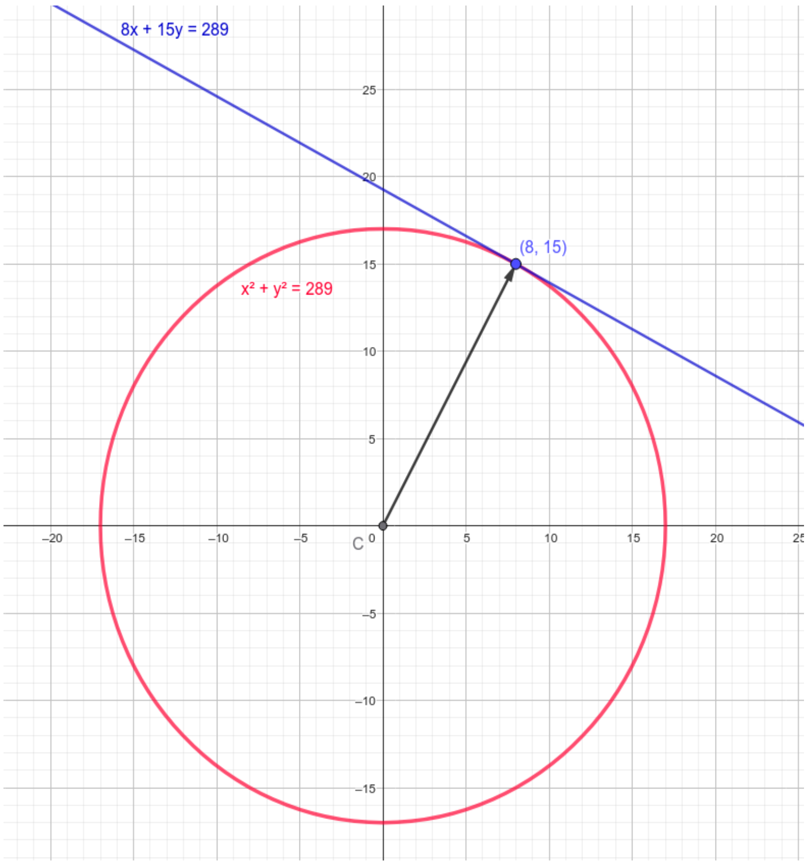
Recta normal: (x, y) = (4, 10) + t (0, 1) **x = 4**

9. Dada la circunferencia $x^2 + y^2 = 289$, determina las rectas tangentes a esta que pasan por :

a) P(8, 15) b) Q(0, 20)

Solución:

a) $\vec{CP}=(8,15)$ –> $\vec{u}=(-15,8)$ vector director Recta tangente: $\frac{x-8}{-15}=\frac{y-15}{8}$

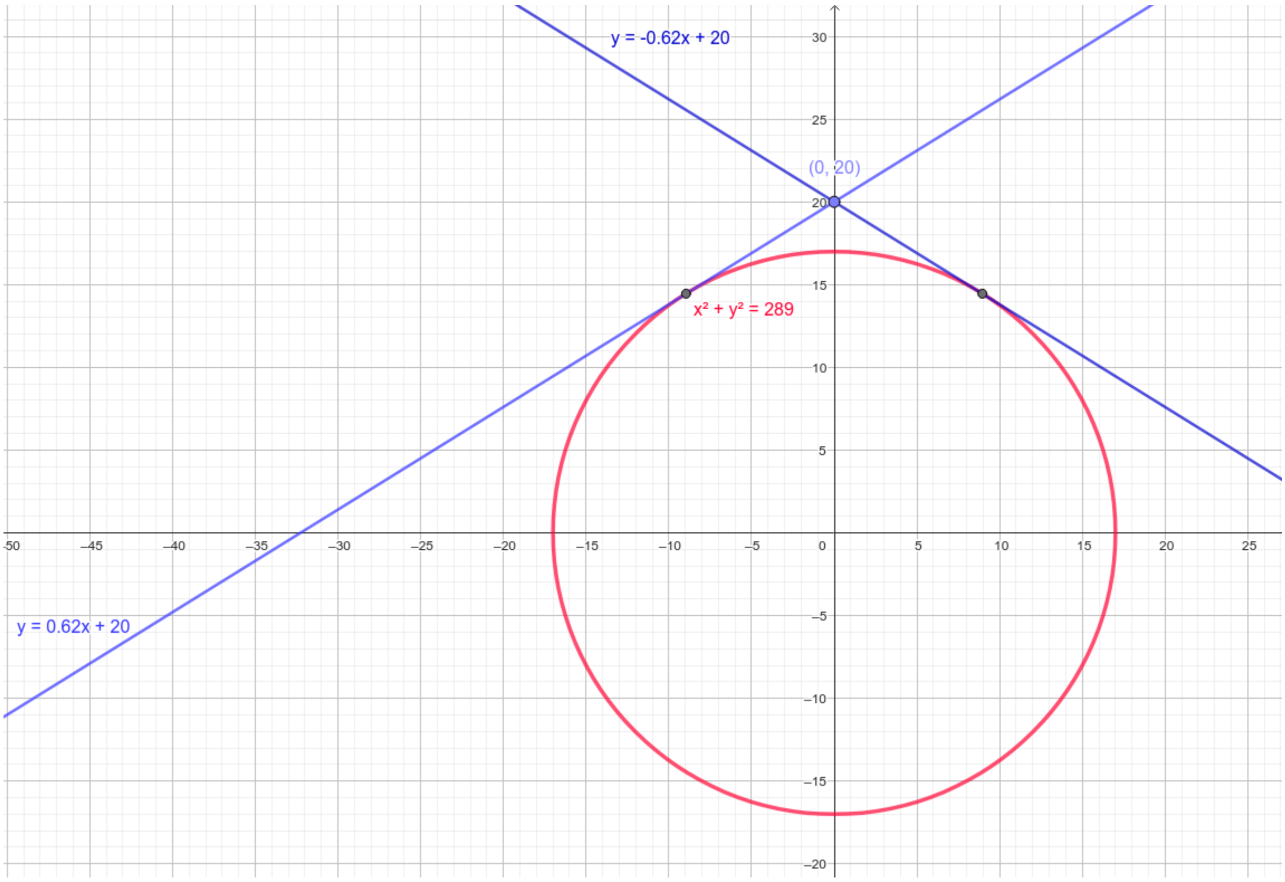


b) NO ENTRA EN EL EXAMEN

Recta tangente y= mx + 20 (pasa por el (0, 20))

Se calcula m para que solo haya un punto de intersección con la circunferencia (discriminante = 0)

Hay dos soluciones: $y=\frac{\sqrt{111}}{17}x+20$ y $y=\frac{-\sqrt{111}}{17}x+20$



10 Sean la circunferencia de ecuación: $x^2 + y^2 = 100$ y la recta y = x+1. Calcula la longitud de la cuerda que forma dicha recta con la circunferencia.

Solución:

Para hallar los puntos de corte de la recta con la circunferencia resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{Bmatrix} x^2+y^2=100 \\ y=x+1 \end{Bmatrix} \rightarrow x^2+(x+1)^2=100 \rightarrow 2x^2+2x-99=0 \rightarrow y=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 2\cdot(-99)}}{2\cdot 2}=$$

$$y_1=\frac{-2+2\sqrt{199}}{4}=\frac{-1+\sqrt{199}}{2} \qquad y_2=\frac{-2-2\sqrt{199}}{4}=\frac{-1-\sqrt{199}}{2}$$

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{199}}{2}+1=\frac{1+\sqrt{199}}{2} \qquad x_2=\frac{-1-\sqrt{199}}{2}+1=\frac{1-\sqrt{199}}{2}$$

Longitud de la cuerda $P_1(x_1, y_1)$ a $P_2(x_2. y_2)$: $d(P_1, P_2) =$

$$\sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{199}}{2}-\frac{1-\sqrt{199}}{2}\right)^2+\left(\frac{-1+\sqrt{199}}{2}-\frac{-1-\sqrt{199}}{2}\right)^2}=\sqrt{(\sqrt{199})^2+(\sqrt{199})^2}=\sqrt{398}$$

11. Escribe la ecuación de la recta tangente y recta normal a la circunferencia $x^2 + y^2 -2x -2y -23= 0$ en los puntos de la misma con abscisa x = -2.

Solución:

Centro de la circunferencia: C(1, 1)

$x = -2$ –> $(-2)^2 + y^2 -2(-2) - 2y - 23 = 0$ –> $y^2 - 2y - 15 = 0$ –> $y_1 = 5$ $y_2 = -3$

Tangente por el punto P(-2, 5):

$\vec{CP}=(-3,4)$ –> $\vec{u}=(4,3)$ vector director –> t: $\frac{x+2}{4}=\frac{y-5}{3}$ **t: 3x – 4y + 26 = 0**

Normal por el punto P(-2, 5): n: $\frac{x+2}{-3}=\frac{y-5}{4}$ **n: 4x + 3y - 7 = 0**

Tangente por el punto P(-2, -3):

$\vec{CP}=(-3,-4)$ –> $\vec{u}=(-4,3)$ vector director –> t: $\frac{x+2}{-4}=\frac{y+3}{3}$ **t: 3x + 4y + 18 = 0**

Normal por el punto P(-2, -3): n: $\frac{x+2}{3}=\frac{y+3}{4}$ **n: 4x - 3y - 1 = 0**

12. Dada la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 17 = 0$. Calcula las rectas tangentes a ella y paralela a la recta x + y + 3 = 0.

Solución:

Para hallar las tangentes paralelas a esta recta: **x + y + C = 0** a una distancia del centro igual al radio.

$$d(C,t)=5 \Rightarrow \frac{|2+2+C|}{\sqrt{1^2+1^2}}=5 \Rightarrow |4+C|=5\sqrt{2} \Rightarrow 4+C_1=5\sqrt{2} \quad y \quad 4+C_2=-5\sqrt{2}$$

Las dos tangentes son: t_1: x + y + $5\sqrt{2}-4$ = 0 t_2: x + y + $-5\sqrt{2}-4$ = 0

13. Halla la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en la recta x + 2y – 10 = 0 y es tangente a las rectas 2x – 3y +9 = 0 y 3x -2y +1 = 0.

Solución:

La distancia del centro de la circunferencia, C(x, y), a las tangentes el la misma:

$$r=d(C,t_1)=\frac{|2x-3y+9|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} \quad \text{y} \quad r=d(C,t_2)=\frac{|3x-2y+1|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}} \quad \text{–>} \quad \frac{|2x-3y+9|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{|3x-2y+1|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}$$

Dos soluciones: $\begin{matrix} 2x-3y+9=3x-2y+1 \\ 2x-3y+9=-3x+2y-1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x+y-8=0 \\ 5x-5y+10=0 \end{matrix}$

Calculamos el centro de la circunferencia sabiendo que es la intersección de las dos rectas:

Solución 1: $\begin{Bmatrix} x+2y-10=0 \\ x+y-8=0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x+2y-10=0 \\ -x-y+8=0 \end{Bmatrix} \rightarrow y=2 \quad x=6$

$$r=d(C,t_1)=\frac{|2\cdot 6-3\cdot 2+9|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{15}{\sqrt{13}} \quad \text{–>} \quad (x-6)^2+(y-2)^2=\left(\frac{15}{\sqrt{13}}\right)^2$$

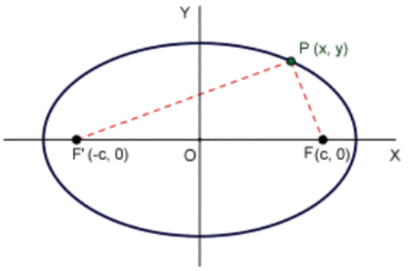
$$\mathbf{x^2+y^2-12x-4y+\frac{295}{13}=0}$$

Solución 2: $\begin{Bmatrix} x+2y-10=0 \\ x-y+2=0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x+2y-10=0 \\ -x+y-2=0 \end{Bmatrix} \rightarrow y=4 \quad x=2$

$$r=d(C,t_1)=\frac{|2\cdot 2-3\cdot 4+9|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{1}{\sqrt{13}} \quad \text{–>} \quad (x-2)^2+(y-4)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right)^2$$

$$\mathbf{x^2+y^2-4x-8y+\frac{259}{13}=0}$$

3. ELIPSE



Definición

Lugar geométrico de los puntos P del plano tales que la suma de las distancias a los focos es una cantidad constante k.

$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a = k$

Elementos característicos

F y F´		focos
O		centro de la elipse
a	$= \overline{OA} = \overline{OA'}$	semieje mayor
b	$= \overline{OB} = \overline{OB'}$	semieje menor
c	$= \overline{OF} = \overline{OF'}$	semidistancia focal

Constante de la elipse: $k = 2a$

$\overline{BF} = \overline{BF'} = a$

$a^2 = b^2 + c^2$

Excentricidad de la elipse: $exc = \dfrac{c}{a}$

Toma valores comprendidos entre 0 y 1 $\rightarrow 0 < exc < 1$

Ecuación de la elipse de centro (x_0, y_0) y eje mayor paralelo al eje X:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \quad \Rightarrow \quad Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E=0$$

Ecuación de la elipse de centro (x_0, y_0) y eje mayor paralelo al eje Y:

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2}+\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1$$

14. Realiza este ejercicio después de ver el fragmento de la película “Ágora” acerca de la teoría de Hipatía de Alejandría (355 d.C – 415 d.C.) sobre la órbita de la Tierra.

Se denomina **perihelio**, al punto más cercano de la órbita de un cuerpo celeste al Sol. Es el opuesto al **afelio**, el punto más lejano.

La Tierra pasa por el perihelio alrededor del 4 de enero y por el afelio sobre el 4 de julio (unos 15 días después de los solsticios).

Sabiendo que el semieje mayor de la órbita de la Tierra es a = 149,60 millones de km y la excentricidad es e = 0,01671, calcula:

a) la distancia focal

b) la medida del semieje menor

c) la distancia de la Tierra al Sol en el perihelio y el afelio

Solución:

a) c = e · a = 0,01671 · 149,60 = 2,499816 millones de km

Distancia focal = 2c = 4,999632 millones de km

b) Semieje menor: $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{149{,}6^2-2{,}499816^2}=149{,}5791126$ millones de km

c) Distancia Tierra - Sol en el perihelio: a – c = 147,100184 millones de km

Distancia Tierra – Sol en el afelio: a + c = 152,099816 millones de km

15. Completa la tabla siguiente sobre varios elementos de las órbitas de los planetas:

	Semieje mayor	**Excentricidad**	**Perihelio**	**Afelio**	**Distancia focal**
Venus	0,723327 UA	0,00677323	0,71842774 UA	0,72822626 UA	0,00979852 UA
Júpiter	5,202176 UA	0,04839266	4,950429 UA	5,453923 UA	0,503494 UA
Saturno	9,5820172 UA	0,0557232	9,0480764 UA	10,11595804 UA	1,0678817 UA
Plutón	39,264 UA	0,244	29,683584 UA	48,844416 UA	19,160832 UA

Fuente: Wikipedia

16.- Dada la elipse 100x² + 156,25y² = 15625. Halla sus elementos y su excentricidad. Dibuja la elipse en tu cuaderno por el método del jardinero.

Dividiendo la ecuación por 15625: $\frac{100x^2}{15625}+\frac{156{,}25y^2}{15625}=1$ –> $\frac{x^2}{15625/100}+\frac{y^2}{15625/156{,}25}=1$

$\frac{x^2}{156{,}25}+\frac{y^2}{100}=1$ –> $a^2=156{,}25 \rightarrow a=12{,}5$ y $b^2=100 \rightarrow b=10$ –>

$c^2=12{,}5^2-10^2 \rightarrow c=7{,}5$ –> $e=\frac{c}{a}=\frac{7{,}5}{12{,}5}=0{,}6$

17.- Halla la ecuación de la elipse que pasa por el punto P(3,-1) y de excentricidad $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Solución:

a) **Elipse con eje principal horizontal:** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

c = e · a = $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a$ –> $b^2=a^2-c^2=a^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a\right)^2=a^2-\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{2}$

P(3, -1) es un punto de la elipse: $\frac{3^2}{a^2}+\frac{(-1)^2}{a^2/2}=1$ –> $\frac{9}{a^2}+\frac{2}{a^2}=1$ –> 11 = a² b² = 11/2

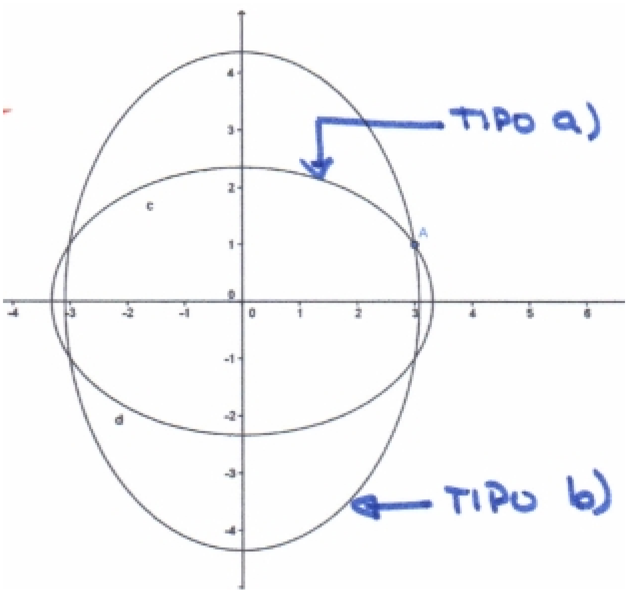
$$\boldsymbol{\frac{x^2}{11}+\frac{y^2}{11/2}=1}$$

b) **Elipse con eje principal vertical:** $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$

c = e · a = $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a$ –> $b^2=a^2-c^2=a^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a\right)^2=a^2-\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{2}$

P(3, -1) es un punto de la elipse: $\frac{(-1)^2}{a^2}+\frac{3^2}{a^2/2}=1$ –> $\frac{1}{a^2}+\frac{18}{a^2}=1$ –> 19 = a^2 b^2 = 19/2

$$\frac{y^2}{19}+\frac{x^2}{19/2}=1$$



18.- Hallar los semiejes, vértices, focos y excentricidad de:
a) $x^2/169 + y^2/144 = 1$ b) $25x^2 + 9y^2 = 225$

Solución:

a) Elipse horizontal:

$a^2 = 169$ –> Semieje mayor: a = 13 $b^2 = 144$ –> Semieje menor: b = 12

$c^2 = a^2 - b^2 = 169 - 144 = 25$ –> Excentricidad: e = c/a = 5/13 Focos: F(5, 0) F' (-5, 0)

Vértices: A(13, 0) A'(-13, 0) B(0, 12) B'(0, -12)

b) Elipse vertical:

$25x^2 + 9y^2 = 225$ –> $25x^2 / 225 + 9y^2 / 225 = 1$ –> $x^2 / 9 + y^2 / 25 = 1$

$a^2 = 25$ –> Semieje mayor: a = 5 $b^2 = 9$ –> Semieje menor: b = 3

$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$ –> Excentricidad: e = c/a = 4/5 Focos: F(0, 4) F' (0, -4)

Vértices: A(0, 5) A'(0, -5) B(3, 0) B'(-3, 0)

19.- Ecuación de la elipse con centro en el origen de coordenadas y focos en el eje de abscisas que:

a) su distancia focal es 16 y e=4/5

b) su semieje mayor es 9 y pasa por (6,4)

c) e= 1/2 y pasa por (1,3)

d) el eje menor mide 10 y pasa por (8,3)

e) pasa por $\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

f) los radios vectores de P miden 2 y 8 y uno de sus focos (3,0)

Solución: La ecuación de la elipse de eje mayor horizontal es $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

a) 2c = 16 –> c = 8 $a=\frac{c}{e}=8:\frac{4}{5}=10$ –> $b^2=a^2-c^2=a^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a\right)^2=100-64=36$

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$$

b) a = 9

Pasa por (6, 4) $\frac{6^2}{9^2}+\frac{4^2}{b^2}=1$ –> $\frac{4^2}{b^2}=1-\frac{6^2}{9^2}=\frac{45}{81}$ –> $b^2 = 16 \cdot 81 / 45 = 144/5$

$\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{144/5}=1$ –> $\boldsymbol{\frac{x^2}{81}+\frac{5y^2}{144}=1}$

c) e = 1/2 –> c = e · a = $\frac{a}{2}$ –> $b^2=a^2-c^2=a^2-\frac{a^2}{4}=\frac{3a^2}{4}$

P(1, 3) es un punto de la elipse: $\frac{1^2}{a^2}+\frac{3^2}{3a^2/4}=1$ –> $\frac{1}{a^2}+\frac{12}{a^2}=1$ –> $13 = a^2$ $b^2 = 39/4$

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{39/4}=1}$$

d) el eje menor mide 10 y pasa por (8,3): 2b = 10 –> b = 5 –> $\frac{8^2}{a^2}+\frac{3^2}{25}=1$

$\frac{8^2}{a^2}=1-\frac{3^2}{25}=\frac{16}{25}$ –> $a^2 = 25 \cdot 64 / 16 = 100$ $\boldsymbol{\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1}$

e) pasa por $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$: $\frac{1^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{b^2}=1$ y $\frac{(\sqrt{2})^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{b^2}=1$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1 \\ \frac{2}{a^2}+\frac{2}{4b^2}=1 \end{array}\right. \rightarrow \quad \frac{1}{a^2}=1-\frac{3}{4b^2}=\frac{4b^2-3}{4b^2} \quad \text{–>}$$

$$\frac{2(4b^2-3)}{4b^2}+\frac{2}{4b^2}=\frac{8b^2-4}{4b^2}=1 \quad \rightarrow \quad \frac{2b^2-1}{b^2}=1 \qquad 2b^2-1=b^2 \quad \text{–>} \quad b^2=1 \quad a^2=4$$

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1}$$

f) los radios vectores de P miden 2 y 8 y uno de sus focos (3,0): c = 3

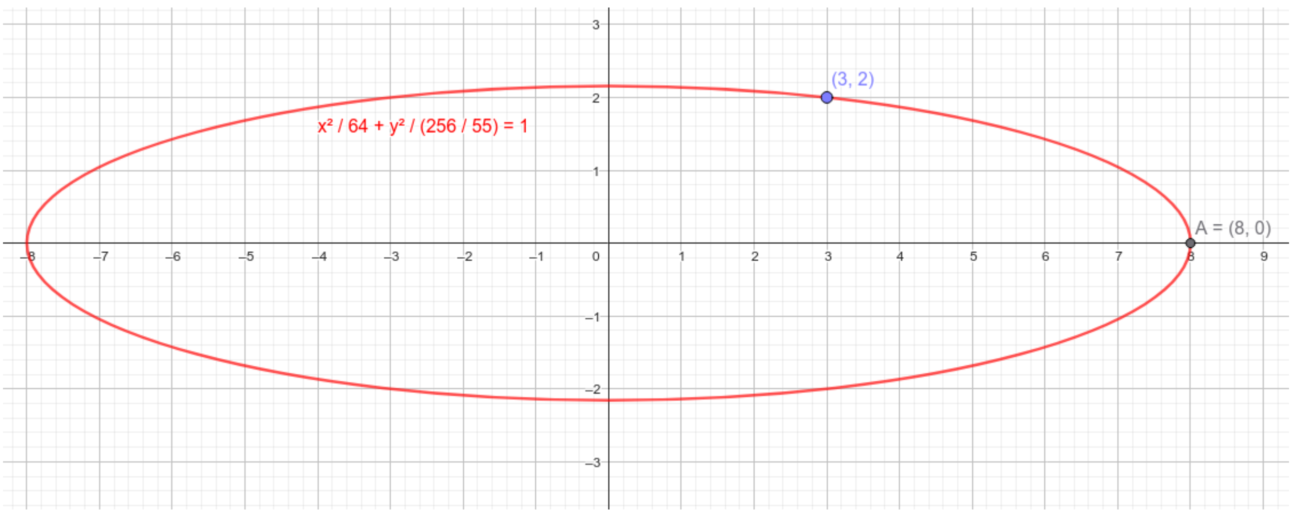
d(F, P) + d(F’, P) = 2a –> 2 + 8 = 2a –> a = 5 –> $b^2=a^2-c^2=25-9=16$

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1}$$

20.- Halla la ecuación reducida de una elipse que pasa por el punto (3,2) y un vértice en (8,0).

a) Suponemos que es el vértice A(a, 0) –> a = 8 $\frac{3^2}{64}+\frac{2^2}{b^2}=1$ –> $4/b^2 = 1-9/64 = 55/64$

$a^2 = 64$, $b^2 = 256/55$ –> $\boldsymbol{\frac{x^2}{64}+\frac{55y^2}{256}=1}$



b) Suponemos que es el vértice B(8, 0) –> b = 8 y la elipse es vertical: $\frac{2^2}{a^2}+\frac{3^2}{64}=1$ –>

$4/a^2 = 1-9/64 = 55/64$ –> $b^2 = 64$, $a^2 = 256/55$ –>

a menor que b –> No hay solución

21.- Escribe la ecuación reducida de la elipse en los siguientes casos:

a) sus ejes miden 7 y 5 y está referida a esos ejes

b) pasa por (0,4) y su excentricidad e=3/5

c) pasa por (2,1) y su eje menor mide 4

d) uno de los vértices dista 8 de un foco y 18 del otro

e) el eje mayor mide 9 cm. y la distancia focal $4\sqrt{2}$

f) su excentricidad e=½ y la distancia focal es 1

g) e=4/5 y el semieje menor b=3

h) la distancia focal es 6 y los radios vectores de P, 2 y 8

Solución:

a) **Elipse con focos en el eje X:**

a = 7/2 y b = 5/2 –> $\frac{x^2}{\frac{49}{4}}+\frac{y^2}{\frac{25}{4}}=1$ –> $\frac{4x^2}{49}+\frac{4y^2}{25}=1$

Elipse con focos en el eje Y:

a = 7/2 y b = 5/2 –> $\frac{y^2}{\frac{49}{4}}+\frac{x^2}{\frac{25}{4}}=1$ –> $\frac{4y^2}{49}+\frac{4x^2}{25}=1$

b) **Elipse con focos en el eje X:** pasa por (0,4) y su excentricidad

e=3/5: e = 3/5 = c/a –> c = 3a/5 –> $b^2=a^2-c^2=a^2-9a^2/25=16a^2/25$

pasa por (0,4) $\frac{0^2}{a^2}+\frac{4^2}{\frac{16a^2}{25}}=1$ –> $25/a^2=1$ –> $a^2=25$ –> $b^2=16$

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

Elipse con focos en el eje Y: pasa por (0,4) y su excentricidad e=3/5:

e = 3/5 = c/a –> c = 3a/5 –> $b^2=a^2-c^2=a^2-9a^2/25=16a^2/25$

pasa por (0,4) $\frac{0^2}{\frac{16a^2}{25}}+\frac{4^2}{a^2}=1$ –> $16/a^2=1$ –> $a^2=16$ –> $b^2=256/25$

$$\frac{25x^2}{256}+\frac{y^2}{16}=1$$

c) **Elipse con focos en el eje X:** pasa por (2,1) y su eje menor mide 4 –> 2b = 4 $\frac{2^2}{a^2}+\frac{1^2}{2^2}=1$

4/a² = 1 – ¼ –> 4/a² = ¾ –> a² = 16/3

$$\frac{3x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$$

No puede tener los focos en el eje Y: $\frac{3y^2}{16}+\frac{x^2}{4}=1$ no pasa por (2, 1) –> $\frac{3\cdot 1^2}{16}+\frac{2^2}{4}\neq 1$

d) **Elipse con focos en el eje X:** uno de los vértices dista 8 de un foco y 18 del otro –>

a – c = 8 y a + c = 18 –> a = 13 c = 5 –> $b^2=a^2-c^2=13^2-5^2=144$

$$\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$$

Elipse con focos en el eje Y: $\frac{y^2}{169}+\frac{x^2}{144}=1$

e) **Elipse con focos en el eje X:** $\frac{4x^2}{81}+\frac{4y^2}{49}=1$

Elipse con focos en el eje Y: $\frac{4y^2}{81}+\frac{4x^2}{49}=1$

f) **Elipse con focos en el eje X:** $\frac{x^2}{1}+\frac{4y^2}{3}=1$

Elipse con focos en el eje Y: $\frac{y^2}{1}+\frac{4x^2}{3}=1$

g) **Elipse con focos en el eje X:** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

Elipse con focos en el eje Y: $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{9}=1$

h) **Elipse con focos en el eje X:** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

Elipse con focos en el eje Y: $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{16}=1$

22.- Hallar el lugar geométrico de los puntos del plano que verifican la condición de que es constante la suma de sus distancias a los puntos:

a) (4,0) y (-4,0) siendo esa suma 10

b) (0,3) y (0,-3) siendo esa suma 12

Solución: a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ b) $\frac{y^2}{36}+\frac{x^2}{27}=1$

23.- Halla la ecuación de la elipse de centro (1,2), foco (6,2) y pasa por (4,6).

Solución: $$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

c = d(F,C) = 5 Otro foco: F'(-4, 2)

d(F, P) + d(F', P) = 2a –> $\sqrt{(4-6)^2+(6-2)^2}+\sqrt{(4+4)^2+(6-2)^2}=2a$ –>

$2a=\sqrt{20}+\sqrt{80}=2\sqrt{5}+4\sqrt{5}=6\sqrt{5}$ –> a = $3\sqrt{5}$ –> b² = a² – c² = 45 – 25

$$\mathbf{\frac{(x-1)^2}{45}+\frac{(y-2)^2}{20}=1}$$

24.- Halla la posición relativa de cada una de las rectas siguientes respecto de la elipse:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

a) 2x + 3y - 5 = 0 b) -3x + 2y - 20 = 0 c) 3x + 10y -15 $\sqrt{5}$ = 0

Solución:

a) $\left\{\begin{matrix}\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1\\ 2x+3y-5=0\end{matrix}\right\}$ –> $y=\frac{5-2x}{3}$ –> $\frac{x^2}{25}+\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{5-2x}{3}\right)^2=1$

$\frac{x^2}{25}+\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{25}{9}-\frac{20x}{9}+\frac{4x^2}{9}\right)=1$ –> $\frac{x^2}{25}+\frac{25}{81}-\frac{20x}{81}+\frac{4x^2}{81}=1$

81x²+ 625 - 500x + 100x² = 2025 –> 181x² – 500x -1400 = 0

La ecuación tiene dos soluciones por lo tanto la elipse y la recta son secantes.

b) $\left.\begin{matrix}-3x+2y-20=0\\ 9x^2+25y^2=225\end{matrix}\right\} \rightarrow y=\frac{3x+20}{2}$

$9x^2+25\cdot\frac{9x^2+120x+400}{4}=225\rightarrow$

$\rightarrow 261x^2+3\,000x+9\,100=0$

$\Delta=-500400<0\rightarrow$ La ecuación no tiene solución; por tanto, la recta es exterior a la elipse.

c) $\left.\begin{matrix}3x+10y-15\sqrt{5}=0\\ 9x^2+25y^2=225\end{matrix}\right\}\rightarrow$

$\rightarrow y=\frac{15\sqrt{5}-3x}{10}$

Sustituyendo, tenemos que:

$9x^2+25\cdot\frac{1\,125-90\sqrt{5}x+9x^2}{100}=225\rightarrow$

$\rightarrow 45x^2-90\sqrt{5}x+225=0$

$\Delta=0\rightarrow$ La ecuación tiene una solución; por tanto, la elipse y la recta son tangentes.