TEMA 7. LUGARES GEOMÉTRICOS. CÓNICAS.

1. LUGARES GEOMÉTRICOS

1. Determina el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los puntos A y B:

a) A(-2, -1) y B(4, 1) b) A(3, -5) y B(7, 1) c) A(0, -2) y (0, 7)

2. Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los siguientes pares de rectas:

a) $\begin{Bmatrix} -2x+7y+9=0 \\ 4x-14y+11=0 \end{Bmatrix}$ b) $\begin{Bmatrix} 2x-3y+3=0 \\ 3x-2=0 \end{Bmatrix}$

3. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano, P(x, y), tales que el triángulo ABP sea rectángulo en P, siendo A(2, 1) y B(4, -3). Interpreta la figura que obtienes.

4. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano, P(x, y), tales que la resta de sus coordenadas es 6. Interpreta la figura que obtienes.

2. CIRCUNFERENCIA.

ECUACIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA DE CENTRO (0,0) Y RADIO r

$$\mathbf{x^2 + y^2 = r^2}$$

ECUACIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA DE CENTRO (a,b) Y RADIO r

$$\mathbf{(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2}$$

ECUACIÓN GENERAL DE UNA CIRCUNFERENCIA

$$\mathbf{x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0}$$

$$\mathbf{A = -2a \quad B = -2b \quad C = a^2 + b^2 - r^2}$$

2.1. Calcula la ecuación de una circunferencia

5. Calcula una circunferencia a partir de los datos siguientes:

a. Cuyo centro es C(0,0) y pasa por el punto P(6, 8)

b. Cuyo centro es C(1, 2) y pasa por el punto P(1, 6)

c. Los puntos (-3, -1) y (1, 2) son los extremos de uno de sus diámetros

d. Concéntrica a $x^2 + y^2 - 10x + 8y - 50 = 0$ pasando por el punto (2,2)

e. r= $2\sqrt{5}$, pasa por (0,0) y su centro está en x+y=0

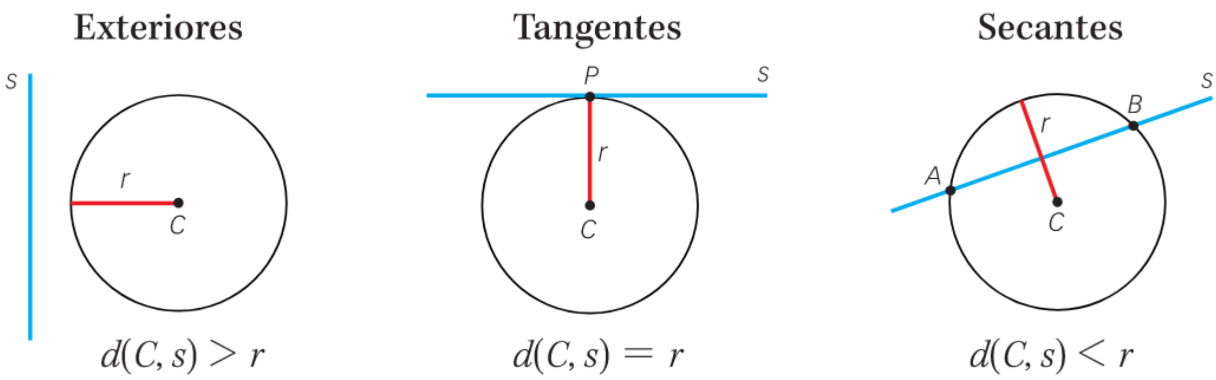
f. Pasa por (0,2) y (2,0) y su centro está en x + y - 5 = 0

g. Circunscrita al triángulo de vértices (0,2), (4,6) y (2,10)

h. Pasa por A(12,0) ; B(0,-8) ; C(12,10)

i. Calcula una circunferencia que pasa por el origen de coordenadas , tiene su centro en la bisectriz del segundo cuadrante y su diámetro es $4\sqrt{2}$.

2.2. Posición relatica de circunferencias y rectas



6. Calcula la circunferencia de centro en (-1, 6) y tangente a $3x - 4y + 2 = 0$

7. Calcula la circunferencia concéntrica a $x^2+y^2 + 12x - 16y - 17 = 0$ y que sea tangente a

t: $5x - 12y – 4 = 0$

8. Calcula la recta tangente y normal a la circunferencia $(x - 4)^2 +(y - 5)^2 = 25$ en el punto P(4,10).

9. Dada la circunferencia $x^2 + y^2 = 289$, determina las rectas tangentes a esta que pasan por :

a) P(8, 15) b) Q(0, 20)

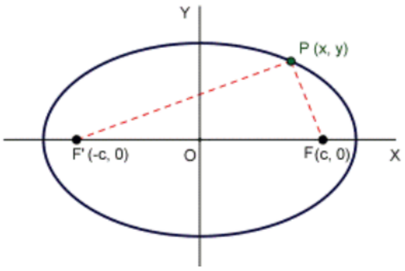
10 Sean la circunferencia de ecuación: $x^2 + y^2 = 100$ y la recta $y = x+1$. Calcula la longitud de la cuerda que forma dicha recta con la circunferencia.

11. Escribe la ecuación de la recta tangente y recta normal a la circunferencia $x^2 + y^2 -2x -2y -23= 0$ en los puntos de la misma con abscisa $x = -2$

12. Dada la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 17 = 0$. Calcula las rectas tangentes a ella y paralela a la recta $x + y + 3 = 0$.

13. Halla la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en la recta $x + 2y – 10 = 0$ y es tangente a las rectas $2x – 3y +9 = 0$ y $3x -2y +1 = 0$.

3. ELIPSE



Definición

Lugar geométrico de los puntos P del plano tales que la suma de las distancias a los focos es una cantidad constante k.

$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a = k$

Elementos característicos

F y F´		focos
O		centro de la elipse
a	$= \overline{OA} = \overline{OA'}$	semieje mayor
b	$= \overline{OB} = \overline{OB'}$	semieje menor
c	$= \overline{OF} = \overline{OF'}$	semidistancia focal

Constante de la elipse: $k = 2a$

$\overline{BF} = \overline{BF'} = a$

$a^2 = b^2 + c^2$

Excentricidad de la elipse: $exc = \dfrac{c}{a}$

Toma valores comprendidos entre 0 y 1 $\rightarrow 0 < exc < 1$

Ecuación de la elipse de centro (x_0, y_0) y eje mayor paralelo al eje X:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \qquad \Rightarrow \qquad Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E=0$$

Ecuación de la elipse de centro (x_0, y_0) y eje mayor paralelo al eje Y:

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2}+\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1$$

14. Realiza este ejercicio después de ver el fragmento de la película “Ágora” acerca de la teoría de Hipatía de Alejandría (355 d.C – 415 d.C.) sobre la órbita de la Tierra.

Se denomina **perihelio**, al punto más cercano de la órbita de un cuerpo celeste al Sol. Es el opuesto al **afelio**, el punto más lejano.

La Tierra pasa por el perihelio alrededor del 4 de enero y por el afelio sobre el 4 de julio (unos 15 días después de los solsticios).

Sabiendo que el semieje mayor de la órbita de la Tierra es a = 149,60 millones de km y la excentricidad es e = 0,01671, calcula:

a) la distancia focal
b) la medida del semieje menor
c) la distancia de la Tierra al Sol en el perihelio y el afelio

TEMA 7. LUGARES GEOMÉTRICOS. CÓNICAS.

15. Completa la tabla siguiente sobre varios elementos de las órbitas de los planetas:

	Semieje mayor	**Excentricidad**	**Perihelio**	**Afelio**	**Distancia focal**
Venus	0,723327 UA	0,00677323			
Júpiter		0,04839266	4,950429 UA		
Saturno	9,5820172 UA			10,11595804 UA	
Plutón	39,264 UA				19,160832 UA

Fuente: Wikipedia

16.- Dada la elipse $100x^2 + 156{,}25y^2 = 15625$. Halla sus elementos y su excentricidad. Dibuja la elipse en tu cuaderno por el método del jardinero.

17.- Halla la ecuación de la elipse que pasa por el punto P(3,-1) y de excentricidad $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

18.- Hallar los semiejes, vértices, focos y excentricidad de:

a) $x^2/169 + y^2/144 = 1$ b) $25x^2 + 9y^2 = 225$

19.- Ecuación de la elipse con centro en el origen de coordenadas y focos en el eje de abscisas que:

a) su distancia focal es 16 y e=4/5

b) su semieje mayor es 9 y pasa por (6,4)

c) e= 1/2 y pasa por (1,3)

d) el eje menor mide 10 y pasa por (8,3)

e) pasa por $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

f) los radios vectores de P miden 2 y 8 y uno de sus focos (3,0)

20.- Halla la ecuación reducida de una elipse que pasa por el punto (3,2) y un vértice en (8,0).

21.- Escribe la ecuación reducida de la elipse en los siguientes casos:

a) sus ejes miden 7 y 5 y está referida a esos ejes

b) pasa por (0,4) y su excentricidad e=3/5

c) pasa por (2,1) y su eje menor mide 4

d) uno de los vértices dista 8 de un foco y 18 del otro

e) el eje mayor mide 9 cm. y la distancia focal $4\sqrt{2}$

f) su excentricidad e=½ y la distancia focal es 1

g) e=4/5 y el semieje menor b=3

h) la distancia focal es 6 y los radios vectores de P, 2 y 8

TEMA 7. LUGARES GEOMÉTRICOS. CÓNICAS.

22.- Hallar el lugar geométrico de los puntos del plano que verifican la condición de que es constante la suma de sus distancias a los puntos:

a) (4,0) y (-4,0) siendo esa suma 10

b) (0,3) y (0,-3) siendo esa suma 12

23.- Halla la ecuación de la elipse de centro (1,2), foco (6,2) y pasa por (4,6).

24.- Halla la posición relativa de cada una de las rectas siguientes respecto de la elipse:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

a) $2x + 3y - 5 = 0$ b) $-3x + 2y - 20 = 0$ c) $3x + 10y - 15\sqrt{5} = 0$