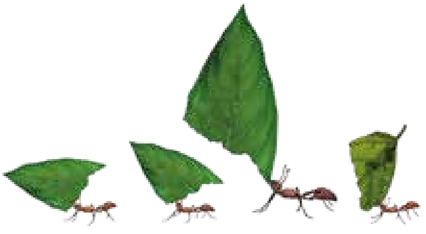
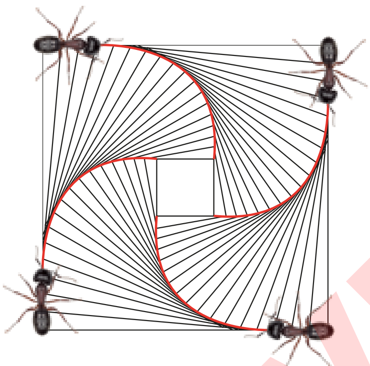
DESAFÍO

El azar previsible

Describe la forma que tiene la curva que recorren las hormigas y calcula qué distancia recorren hasta el punto de encuentro.





Las raíces n-ésimas de un número complejo representadas en un plano coinciden con los vértices de un polígono regular de n lados.

Tomamos un número complejo z con módulo m y argumento α, esto es, $z = m_\alpha$. Sus raíces n-ésimas son:

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{m}_{\frac{\alpha+2k\pi}{4}}$ con $k = 0, 1, \dots, n-1$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{-15}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{15}i}{6} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{15}}{6}i \\ x_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{15}}{6}i \end{cases}$$

Hay 4 vértices, luego los puntos de donde parten las hormigas serían:

$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{m}_{\frac{\alpha+2k\pi}{4}}$ con $k = 0, 1, \dots, 3$

Vamos a estudiar qué tipo de curva describe cada una de las hormigas. De todas las raíces calculadas nos fijamos en la correspondiente a $k = 0$, esto es, con $z_1 = \sqrt[4]{m}_{\frac{\alpha}{4}}$.

Este z_1 es también un número complejo, por lo que podemos calcular sus raíces cuartas, ya que en la segunda posición también seguirían formando un polígono de 4 lados. Las calculamos y volvemos a quedarnos con la correspondiente a $k = 0$, obteniendo $z_2 = \sqrt[16]{m}_{\frac{\alpha}{16}}$.

Continuando con este procedimiento obtenemos la siguiente sucesión de números complejos: $z_k = \sqrt[4^k]{m}_{\frac{\alpha}{4^k}}$.

Para generalizar, tomamos un polígono de n lados y realizamos el mismo proceso anterior, llegando a la siguiente sucesión de números complejos: $z_k = \sqrt[n^k]{m}_{\frac{\alpha}{n^k}}$.

Como están escritos en forma polar, tenemos su módulo $r = \sqrt[n^k]{m}$ y su argumento $\theta = \dfrac{\alpha}{n^k}$.

Escribiendo el módulo como potencia $r = m^{\frac{1}{n^k}}$ y expresando la fracción del argumento como $n^k = \dfrac{\alpha}{\theta}$, sustituimos y obtenemos la siguiente ecuación en coordenadas polares: $r = m^{\frac{\theta}{\alpha}}$, que es la ecuación de la espiral sobre la que se encuentran todos estos números complejos, donde los parámetros a tener en cuenta son el módulo m y el argumento α del número complejo inicial.

En cuanto a la distancia al punto de encuentro, las hormigas se encuentran en el centro del cuadrado y habrían recorrido desde el vértice del que partieron una longitud igual al módulo de la raíz a la que correspondía cada una de ellas, que en todos los casos es $\sqrt[4]{m}$.

PIENSA

PÁG. 121. ¿Cuánto vale $z + \overline{z}$? ¿Y $z - \overline{z}$?

$z + \overline{z} = 2a$ $\qquad$ $z - \overline{z} = 2b$

PÁG. 122. ¿Qué relación gráfica guardan los afijos de un número complejo, su opuesto y su conjugado?

El afijo del opuesto es el punto simétrico del afijo del número complejo respecto del origen.

El afijo del conjugado es el punto simétrico del afijo del número complejo respecto del eje X.

PÁG. 126. Si $r_\alpha \cdot z = r_\alpha$, ¿cuánto vale z?

$z = 1_{0° + k \cdot 360°}$

PÁG. 127. Si $z = r_\alpha$, calcula z^0 y z^{-1}.

$z^0 = (r^0)_{\alpha \cdot 0°} = 1_{0°} = 1$

$z^{-1} = \dfrac{1}{r_{-\alpha}} = \dfrac{1}{r_{360° - \alpha}}$

PÁG. 128. Calcula mentalmente $\sqrt{1}$ y $\sqrt{i}$.

$$z = \sqrt{1} \rightarrow$$
$$\rightarrow \begin{cases} k = 0 \rightarrow \alpha = \dfrac{0° + 360° \cdot 0}{2} = 0° \rightarrow 1_{0°} \\ k = 1 \rightarrow \alpha = \dfrac{0° + 360° \cdot 1}{2} = 180° \rightarrow 1_{180°} \end{cases}$$

$$z = \sqrt{i} \rightarrow$$
$$\rightarrow \begin{cases} k = 0 \rightarrow \alpha = \dfrac{90° + 360° \cdot 0}{2} = 45° \rightarrow 1_{45°} \\ k = 1 \rightarrow \alpha = \dfrac{90° + 360° \cdot 1}{2} = 225° \rightarrow 1_{225°} \end{cases}$$

ACTIVIDADES

1 Escribe estos números como $a + bi$.

a) $\sqrt{-3}$ c) 3

b) $\sqrt{-16}$ d) -3

a) $0 + \sqrt{3}i$ c) $3 + 0i$

b) $0 + 4i$ d) $-3 + 0i$

2 Resuelve las siguientes ecuaciones, expresando sus soluciones como números complejos.

a) $3x^2 - 3x + 2 = 0$ b) $x^2 - x + 1 = 0$

a) $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{15}i}{6} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{15}}{6}i \\ x_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{15}}{6}i \end{cases}$$

b) $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \\ x_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

3 Escribe dos números complejos cuya parte real sea -1 y otros dos cuya parte imaginaria sea -1.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$a = -1 \rightarrow \begin{cases} b = 0 \rightarrow -1 \\ b = 1 \rightarrow -1 + i \end{cases}$$

$$b = -1 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \rightarrow -i \\ a = 1 \rightarrow 1 - i \end{cases}$$

4 Halla a y b para que sean ciertas las igualdades.

a) $2 + 3bi = a - 1$

b) $4a - 2b = 2 - ai$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $a = 2 + 1 = 3 \rightarrow b = 0$

b) $a = 0 \rightarrow 4a - 2b = 2 \rightarrow b = -1$

5 Dado el número complejo $z = -2x + \dfrac{y}{2}i$, determina los valores de x e y, reales, para que sea:

a) Un número real.

b) Un número imaginario puro.

c) Un número complejo que no sea real ni imaginario puro.

a) $y = 0$ b) $x = 0$ c) $x \neq 0, y \neq 0$

6 Halla el opuesto y el conjugado de los siguientes números complejos.

a) $\sqrt{2} - 3i$ d) $-3 + \dfrac{2}{5}i$ g) 0

b) $\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{5}i$ e) $\dfrac{3}{5}i$ h) $-2i$

c) $3 - 2i$ f) -7

a) Opuesto: $-\sqrt{2} + 3i$ Conjugado: $\sqrt{2} + 3i$

b) Opuesto: $-\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{5}i$ Conjugado: $\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{5}i$

c) Opuesto: $-3 + 2i$ Conjugado: $3 + 2i$

d) Opuesto: $3 - \dfrac{2}{5}i$ Conjugado: $-3 - \dfrac{2}{5}i$

e) Opuesto: $-\dfrac{3}{5}i$ Conjugado: $-\dfrac{3}{5}i$

f) Opuesto: 7 Conjugado: -7

g) Opuesto: 0 Conjugado: 0

h) Opuesto: $2i$ Conjugado: $2i$

7 Representa gráficamente los siguientes números complejos.

a) $\frac{1}{2} + i$

b) $-\frac{1}{2} + i$

c) $\frac{1}{2} - i$

d) $-\frac{1}{2} - i$

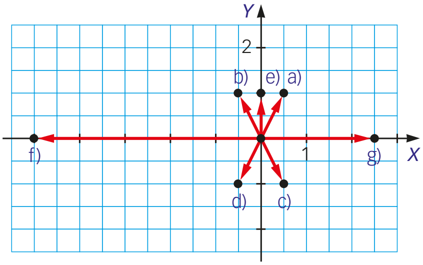
e) i

f) -5

g) $\frac{5}{2}$

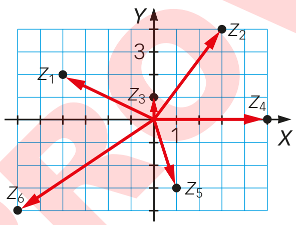
h) 0

¿Dónde estará situado un número real? ¿Y si el número es imaginario puro?



Un número real estará situado en el eje de abscisas y un número imaginario puro en el eje de ordenadas.

8 Escribe los números complejos representados gráficamente.



$Z_1 = -4 + 2i$ $\quad$ $Z_4 = 5$

$Z_2 = 3 + 4i$ $\quad$ $Z_5 = 1 - 3i$

$Z_3 = i$ $\quad$ $Z_6 = -6 - 4i$

9 Resuelve las siguientes operaciones.

a) $(-1 - i) + (-4 + 5i)$

b) $\frac{-1 - i}{-4 + 5i}$

c) $(-1 - i)(-4 + 5i)$

d) $\frac{(-2 + i)(1 + 3i)}{-1 + 2i} - 2i$

a) $-5 + 4i$

b) $\frac{(-1 - i)(-4 - 5i)}{(-4 + 5i)(-4 - 5i)} = \frac{-1 + 9i}{41}$

c) $4 - 5i + 4i + 5 = 9 - i$

d) $\frac{(-5 - 5i)(-1 - 2i)}{(-1 + 2i)(-1 - 2i)} - 2i =$

$= -1 + 3i - 2i = -1 + i$

10 Calcula el valor real x para que el resultado sea un número real.

a) $(2x + i)(-2 + xi)$

b) $\frac{2x - i}{-2 + 7i}$

a) $-4x + 2x^2 i - 2i - x =$

$= -5x + (2x^2 - 2)i \rightarrow$

$\rightarrow 2x^2 - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

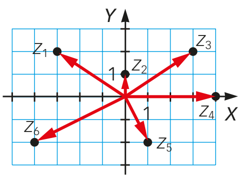
b) $\frac{(2x - i)(-2 - 7i)}{(-2 + 7i)(-2 - 7i)} =$

$= \frac{-4x - 14xi + 2i - 7}{53} =$

$= \frac{(-4x - 7) + (-14x + 2)i}{53} \rightarrow$

$\rightarrow -14x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{7}$

11 Determina la expresión polar de los números complejos representados.



$Z_1 \rightarrow \begin{cases} r = |z| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13} \\ tg\ \alpha = \frac{2}{-3} \rightarrow \alpha = 146{,}31° \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow Z_1 = \sqrt{13}_{146{,}31°}$

$Z_2 \rightarrow \begin{cases} r = |z| = \sqrt{1^2} = 1 \\ \alpha = 90° \end{cases} \rightarrow Z_2 = 1_{90°}$

$Z_3 \rightarrow \begin{cases} r = |z| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \\ tg\ \alpha = \frac{2}{3} \rightarrow \alpha = 33{,}7° \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow Z_3 = \sqrt{13}_{33{,}7°}$

$$z_4 \rightarrow \begin{cases} r = |z| = \sqrt{4^2} = 4 \\ \alpha = 0° \end{cases} \rightarrow z_4 = 4_{0°}$$

$$z_5 \rightarrow \begin{cases} r = |z| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} \\ tg\ \alpha = \dfrac{-2}{1} \rightarrow \alpha = 296{,}57° \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow z_5 = \sqrt{5}_{296{,}57°}$$

$$z_6 \rightarrow \begin{cases} r = |z| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \\ \quad = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \\ tg\ \alpha = \dfrac{-2}{-4} \rightarrow \alpha = 206{,}57° \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow z_6 = 2\sqrt{5}_{206{,}57°}$$

12 Expresa en forma polar.

a) $2 + i$ c) $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$ e) $-4i$

b) $-2 - i$ d) $2 - \sqrt{3}i$ f) 12

a) $\begin{cases} r = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \\ tg\ \alpha = \dfrac{1}{2} \rightarrow \alpha = 26{,}56° \end{cases} \rightarrow \sqrt{5}_{26{,}56°}$

b) $\begin{cases} r = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5} \\ tg\ \alpha = \dfrac{-1}{-2} \rightarrow \alpha = 206{,}56° \end{cases} \rightarrow \sqrt{5}_{206{,}56°}$

c) $\begin{cases} r = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ tg\ \alpha = -1 \rightarrow \alpha = 135° \end{cases} \rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2}_{135°}$

d) $\begin{cases} r = \sqrt{2^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{7} \\ tg\ \alpha = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \rightarrow \alpha = 319{,}11° \end{cases} \rightarrow \sqrt{7}_{319{,}11°}$

e) $\begin{cases} r = \sqrt{(-4)^2} = 4 \\ tg\ \alpha = \dfrac{-4}{0} \rightarrow \alpha = 270° \end{cases} \rightarrow 4_{270°}$

f) $\begin{cases} r = \sqrt{12^2} = 12 \\ tg\ \alpha = \dfrac{0}{12} \rightarrow \alpha = 0° \end{cases} \rightarrow 12_{0°}$

13 Expresa estos números en formas binómica y trigonométrica.

a) $1_{120°}$ b) $3_{240°}$ c) $2_{\frac{\pi}{3}}$ d) $3_{\frac{3\pi}{2}}$

a) $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \cos 120° + i\, sen\ 120°$

b) $\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right) = 3(\cos 240° + i\, sen\ 240°)$

c) $\left(1, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos \dfrac{\pi}{3} + i\, sen\ \dfrac{\pi}{3}\right)$

d) $(0, -3) = 3\left(\cos \dfrac{3\pi}{2} + i\, sen\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$

14 Expresa los siguientes números complejos en formas polar y binómica.

a) $3\,(\cos 45° + i\, sen\ 45°)$

b) $3\,(\cos 135° + i\, sen\ 135°)$

a) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2} + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}i = 3_{45°}$

b) $\dfrac{-3\sqrt{2}}{2} + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}i = 3_{135°}$

15 Opera con estos números complejos.

$z_1 = 2_{30°}$

$z_2 = \cos 60° + i\, sen\ 60°$

$z_3 = 2_{\frac{5\pi}{4}}$

a) $z_1 \cdot z_2$ c) $z_3 \cdot z_3$

b) $z_1 \cdot \overline{z}_3$ d) $(z_1)^2 \cdot \overline{z}_2$

$z_1 = 2_{30°}$

$z_2 = 1_{60°} \rightarrow \overline{z}_2 = 1_{300°}$

$z_3 = 2_{225°} \rightarrow \overline{z}_3 = 2_{135°}$

a) $2_{30°} \cdot 1_{60°} = 2_{90°}$

b) $2_{30°} \cdot 2_{135°} = 4_{165°}$

c) $2_{225°} \cdot 2_{225°} = 4_{90°}$

d) $(2_{30°})^2 \cdot 1_{300°} = 4_{60°} \cdot 1_{300°} = 4_{0°}$

16 Opera con estos números complejos.

$$z_1 = 1_{210°}$$

$$z_2 = 3\,[\cos(-30°) + i\, sen\,(-30°)]$$

a) $\dfrac{z_1}{z_2}$

b) $\dfrac{(z_1)^2 \cdot \overline{z}_2}{z_2}$

c) $\dfrac{z_2 \cdot \overline{z}_1}{z_1}$

$z_1 = 1_{210°} \rightarrow \overline{z}_1 = 1_{150°}$

$z_2 = 3_{-30°} \rightarrow \overline{z}_2 = 3_{30°}$

a) $\dfrac{1_{210°}}{3_{-30°}} = \dfrac{1}{3_{240°}}$

b) $\dfrac{(1_{210°})^2 \cdot 3_{30°}}{3_{-30°}} = \dfrac{1_{60°} \cdot 3_{30°}}{3_{-30°}} = \dfrac{3_{90°}}{3_{-30°}} = 1_{120°}$

c) $\dfrac{3_{-30°} \cdot 1_{150°}}{1_{210°}} = \dfrac{3_{120°}}{1_{210°}} = 3_{-90°} = 3_{270°}$

17 Realiza estas operaciones.

a) $(3_{45°})^2$

b) $(3 - 3i)^5$

c) $\left(2_{\frac{\pi}{6}}\right)^6$

d) $\left(\sqrt{5} + \sqrt{5}\,i\right)^8$

e) $(4_{330°})^3$

f) $(-3i)^5$

a) $3^2_{2 \cdot 45°} = 9_{90°} = 9i$

b) $(3 - 3i)^5 = \left(3\sqrt{2}_{315°}\right)^5 = \left(3\sqrt{2}\right)^5_{5 \cdot 315°} =$
$= 972\sqrt{2}_{135°}$

c) $\left(2_{\frac{\pi}{6}}\right)^6 = 2^6_{6 \cdot \frac{\pi}{6}} = 64_{\pi} = -64$

d) $\left(\sqrt{5} + \sqrt{5}\,i\right)^8 = \left(\sqrt{10}_{45°}\right)^8 = \sqrt{10^8}_{8 \cdot 45°} =$
$= 10\,000_{360°} = 10\,000$

e) $(4_{330°})^3 = 64_{3 \cdot 330°} = 64_{270°} = -64i$

f) $(-3i)^5 = (3_{270°})^5 = 3^5_{5 \cdot 270°} = 243_{270°} =$
$= -243i$

18 Resuelve $[16\,(\cos 60° + i\,\text{sen}\,60°)] \cdot (2_{210°})^4$.

$16_{60°} \cdot 16_{840°} = 256_{900°} = 256_{180°} = -256$

19 Utilizando la fórmula de De Moivre, expresa *cos* 3α y *sen* 3α en función de *cos* α y *sen* α.

Consideramos un número complejo de módulo la unidad.

$(1_\alpha)^3 = (\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)^3 = \cos 3\alpha + i\,\text{sen}\,3\alpha$

Desarrollamos la primera parte de la igualdad.

$\cos^3\alpha + 3i\cos^2\alpha\,\text{sen}\,\alpha - 3\cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha -$
$- i\,\text{sen}^3\alpha = (\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha) +$
$+ (3\cos^2\alpha\,\text{sen}\,\alpha - \text{sen}^3\alpha)i$

Igualamos este resultado con la segunda parte de la igualdad.

$(\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha) +$
$+ (3\cos^2\alpha\,\text{sen}\,\alpha - \text{sen}^3\alpha)i =$
$= \cos 3\alpha + i\,\text{sen}\,3\alpha$

Igualamos las partes reales y las partes imaginarias:

$$\begin{cases} \cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha \\ \text{sen}\,3\alpha = 3\cos^2\alpha\,\text{sen}\,\alpha - \text{sen}^3\alpha \end{cases}$$

20 Calcula las siguientes raíces.

a) $\sqrt{3_{150°}}$

b) $\sqrt[3]{-27}$

c) $\sqrt[4]{-i}$

d) $\sqrt[3]{-1 + i}$

a) El módulo de las soluciones será la raíz cuadrada del módulo, $\sqrt{3}$.

Existirán dos argumentos.

Si $k = 0 \rightarrow \beta_1 = \dfrac{150° + 0 \cdot 360°}{2} = 75°$

Si $k = 1 \rightarrow \beta_2 = \dfrac{150° + 1 \cdot 360°}{2} = 255°$

Por tanto, las raíces son $\sqrt{3}_{75°}$, $\sqrt{3}_{255°}$.

b) $\sqrt[3]{27_{180°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cúbica del módulo, 3.

Existirán tres argumentos.

Si $k = 0 \rightarrow \beta_1 = \dfrac{180° + 0 \cdot 360°}{3} = 60°$

Si $k = 1 \rightarrow \beta_2 = \dfrac{180° + 1 \cdot 360°}{3} = 180°$

Si $k = 2 \rightarrow \beta_3 = \dfrac{180° + 2 \cdot 360°}{3} = 300°$

Por tanto, las raíces son $3_{60°}$, $3_{180°} = -3$, $3_{300°}$.

c) $\sqrt[4]{1_{270°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cuarta del módulo, 1.

Existirán cuatro argumentos.

Si $k = 0 \rightarrow \beta_1 = \dfrac{270° + 0 \cdot 360°}{4} =$
$= 67°\,30'$

Si $k = 1 \rightarrow \beta_2 = \dfrac{270° + 1 \cdot 360°}{4} =$
$= 157°\,30'$

Si $k = 2 \rightarrow \beta_3 = \dfrac{270° + 2 \cdot 360°}{4} =$
$= 247°,5°$

Si $k = 3 \to \beta_4 = \dfrac{270° + 3 \cdot 360°}{4} = 337°, 5°$

Por tanto, las raíces son $1_{67°,5°}$, $1_{157°,5°}$, $1_{247°,5°}$ y, $1_{337°,5°}$.

d) $\sqrt[3]{\sqrt{2}_{135°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cúbica del módulo, $\sqrt[6]{2}$.

Existirán tres argumentos.

Si $k = 0 \to \beta_1 = \dfrac{135° + 0 \cdot 360°}{3} = 45°$

Si $k = 1 \to \beta_2 = \dfrac{135° + 1 \cdot 360°}{3} = 165°$

Si $k = 2 \to \beta_3 = \dfrac{135° + 2 \cdot 360°}{3} = 285°$

Por tanto, las raíces son $\sqrt[6]{2}_{45°}$, $\sqrt[6]{2}_{165°}$ y $\sqrt[6]{2}_{285°}$.

21 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $z^3 - 1 = 0$

b) $z^5 + 32 = 0$

c) $z^4 + 16 = 0$

d) $z^4 - 81 = 0$

a) $z = \sqrt[3]{1_{0°}}$

El módulo de las soluciones será 1.

Existirán tres argumentos.

Si $k = 0 \to \beta_1 = 0°$

Si $k = 1 \to \beta_2 = \dfrac{0° + 1 \cdot 360°}{3} = 120°$

Si $k = 2 \to \beta_3 = \dfrac{0° + 2 \cdot 360°}{3} = 240°$

Por tanto, las raíces son $1_{0°}$, $1_{120°}$, $1_{240°}$.

b) $z = \sqrt[5]{32_{180°}}$

El módulo de las soluciones será 2.

Existirán cinco argumentos.

Si $k = 0 \to \beta_1 = \dfrac{180°}{5} = 36°$

Si $k = 1 \to \beta_2 = \dfrac{180° + 1 \cdot 360°}{5} = 108°$

Si $k = 2 \to \beta_3 = \dfrac{180° + 2 \cdot 360°}{5} = 180°$

Si $k = 3 \to \beta_4 = \dfrac{180° + 3 \cdot 360°}{5} = 252°$

Si $k = 4 \to \beta_5 = \dfrac{180° + 4 \cdot 360°}{5} = 324°$

Por tanto, las raíces son $2_{36°}$, $2_{108°}$, $2_{180°}$, $2_{252°}$, $2_{324°}$.

c) $z = \sqrt[4]{16_{180°}}$

El módulo de las soluciones será 2.

Existirán cuatro argumentos.

Si $k = 0 \to \beta_1 = \dfrac{180°}{4} = 45°$

Si $k = 1 \to \beta_2 = \dfrac{180° + 360°}{4} = 135°$

Si $k = 2 \to \beta_3 = \dfrac{180° + 360° \cdot 2}{4} = 225°$

Si $k = 3 \to \beta_4 = \dfrac{180° + 360° \cdot 3}{4} = 315°$

Por tanto, las raíces son $2_{45°}$, $2_{135°}$, $2_{225°}$, $2_{315°}$.

d) $z = \sqrt[4]{81_{0°}}$

El módulo de las soluciones será 3.

Existirán cuatro argumentos.

Si $k = 0 \to \beta_1 = 0°$

Si $k = 1 \to \beta_2 = \dfrac{360°}{4} = 90°$

Si $k = 2 \to \beta_3 = \dfrac{360° \cdot 2}{4} = 180°$

Si $k = 3 \to \beta_3 = \dfrac{360° \cdot 3}{4} = 270°$

Por tanto, las raíces son $3_{0°}$, $3_{90°}$, $3_{180°}$, $3_{270°}$.

22 Calcula y representa las raíces cúbicas de este número.

$$\frac{1+i}{-1-i}$$

$$\frac{(1+i)(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)} = \frac{-1-1}{1+1} = -1 = 1_{180°}$$

Módulo: $\sqrt[3]{1} = 1$

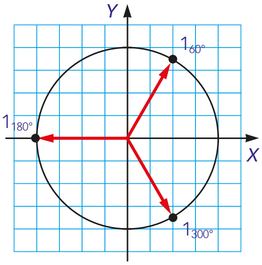
Argumentos:

Si $k = 0 \to \beta_1 = \dfrac{180° + 0 \cdot 360°}{3} = 60°$

Si $k = 1 \to \beta_2 = \dfrac{180° + 1 \cdot 360°}{3} = 180°$

Si $k = 2 \to \beta_3 = \dfrac{180° + 2 \cdot 360°}{3} = 300°$

Por tanto, las raíces son $1_{60°}$, $1_{180°}$ y $1_{300°}$.



23 Un cuadrado, con centro en el origen de coordenadas, tiene uno de sus vértices en el punto $A(3, 2)$. Determina los demás vértices.

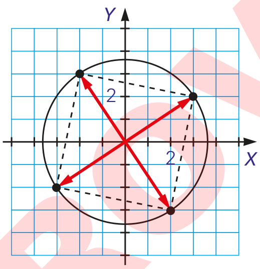
$3 + 2i$ es una de las raíces cuartas de un número complejo z.

Módulo: $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

Argumentos: $tg\ \alpha = \dfrac{2}{3} \rightarrow \alpha = 33°\ 41'\ 24{,}2''$

Sumamos 90° al argumento de cada vértice para obtener el siguiente.

Por tanto, las raíces son $\sqrt{13}_{33°\ 41'\ 24{,}2''}$, $\sqrt{13}_{123°\ 41'\ 24{,}2''}$, $\sqrt{13}_{213°\ 41'\ 24{,}2''}$ y, $\sqrt{13}_{303°\ 41'\ 24{,}2''}$.



PRÁCTICA

24 Resuelve estas ecuaciones.

a) $x^2 + 10x + 29 = 0$

b) $x^2 + 6x + 10 = 0$

a) $x = \dfrac{-10 \pm \sqrt{100 - 116}}{2} = -5 \pm 2i$

b) $x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2} = -3 \pm i$

25 Calcula el valor de k para que $\dfrac{k + (k-3)i}{3i}$ sea un número.

a) Imaginario puro.

b) Real.

$$\frac{k + (k-3)i}{3i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{ki + (-k+3)}{-3} =$$
$$= \frac{k-3}{3} - \frac{k}{3}i$$

a) $k - 3 = 0 \rightarrow k = 3$

b) $k = 0$

26 Resuelve las ecuaciones si z es un número complejo.

a) $\dfrac{3 + z + i}{3} = 3z + i$

b) $\dfrac{5 + 2zi - 4i}{3} = z$

a) $3 + zi + i = 9z + 3i \rightarrow$
$\rightarrow 3 - 2i = z(9 - i) \rightarrow$
$\rightarrow z = \dfrac{3 - 2i}{9 - i} \cdot \dfrac{9 + i}{9 + i} = \dfrac{29}{82} - \dfrac{15}{82}i$

b) $5 + 2zi - 4i = 3z \rightarrow$
$\rightarrow 5 - 4i = (3 - 2i)z \rightarrow$
$\rightarrow z = \dfrac{5 - 4i}{3 - 2i} \cdot \dfrac{3 + 2i}{3 + 2i} = \dfrac{23}{13} - \dfrac{2}{13}i$

27 Calcula estas operaciones.

a) $\dfrac{i^{241}}{1 - i} - \dfrac{2i^{42}}{1 + i^9} + i^{83}$

b) $i^{333} - \dfrac{i^{27}}{1 - i^{27}} + \dfrac{i^{72}}{1 - i^{25}}$

a) $\dfrac{i}{1 - i} - \dfrac{-2}{1 + i} - i =$
$= \dfrac{i(1 + i) + 2(1 - i) - i(1 - i^2)}{1 - i^2} =$
$= \dfrac{1 - 3i}{2}$

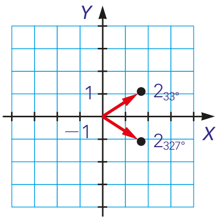
b) $i - \dfrac{-i}{1 - (-i)} + \dfrac{1}{1 - i} =$
$= \dfrac{i(1 - i^2) + i(1 - i) + (1 + i)}{2} =$
$= 1 + 2i$

28 Calcula los conjugados de los siguientes números escritos en forma polar y represéntalos.

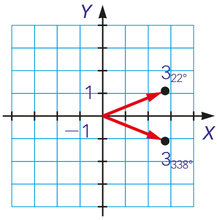
a) $2_{33°}$ c) $1_{105°}$

b) $3_{22°}$ d) $2_{222°}$

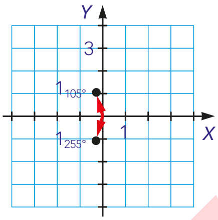
a) $2_{-33°} = 2_{327°}$



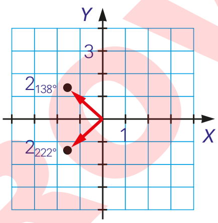
b) $3_{-22°} = 3_{338°}$



c) $1_{-105°} = 1_{255°}$



d) $2_{-222°} = 2_{138°}$

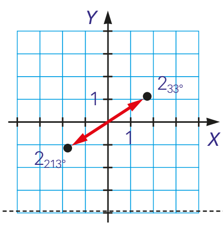


29 Calcula los opuestos de los siguientes números escritos en forma polar y represéntalos.

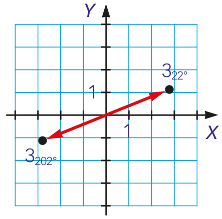
a) $2_{33°}$ c) $1_{105°}$

b) $3_{22°}$ d) $2_{222°}$

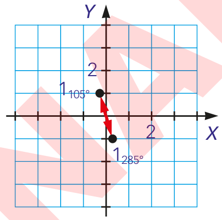
a) $2_{33°+180°} = 2_{213°}$



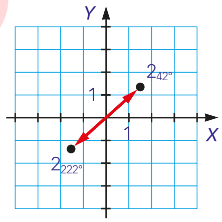
b) $3_{22°+180°} = 3_{202°}$



c) $1_{105°+180°} = 1_{285°}$



d) $2_{222°+180°} = 2_{42°}$



30 Calcula los inversos de los siguientes números complejos.

a) $z = 1 + 2i$

b) $z = -3i$

c) $z = 5_{300°}$

d) $z = 3_{125°}$

a) $z = \sqrt{5}_{63°\,26'\,6''} \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{1}{z} = \left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)_{-63°\,26'\,6''} = \left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)_{296°\,33'\,54''}$

b) $z = 3_{270°} \rightarrow \dfrac{1}{z} = \left(\dfrac{1}{3}\right)_{-270°} = \left(\dfrac{1}{3}\right)_{90°}$

c) $\dfrac{1}{z} = \left(\dfrac{1}{5}\right)_{-300°} = \left(\dfrac{1}{5}\right)_{60°}$

d) $\dfrac{1}{z} = \left(\dfrac{1}{3}\right)_{-125°} = \left(\dfrac{1}{3}\right)_{235°}$

31 Resuelve estas operaciones.

a) $1_{45°} + 1_{135°} + 1_{225°} + 1_{315°}$

b) $(1 + 2i) - (2 - 3i) + 7i$

a) $\left.\begin{array}{l} a = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ b = \operatorname{sen} 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow 1_{45°} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

$\left.\begin{array}{l} a = \cos 135° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ b = \operatorname{sen} 135° = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow 1_{135°} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

$\left.\begin{array}{l} a = \cos 225° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ b = \operatorname{sen} 225° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow 1_{45°} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

$\left.\begin{array}{l} a = \cos 315° = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ b = \operatorname{sen} 315° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow 1_{45°} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

$\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i - \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i - \dfrac{\sqrt{2}}{2} -$

$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i + \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i = 0$

b) $1 + 2i - 2 + 3i + 7i = -1 + 12i$

32 Calcula.

$$\frac{\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^4 \left(-\sqrt{7} - \sqrt{7}i\right)^2}{\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}i\right)^3}$$

$$\frac{(1_{120°})^4 \cdot \left(\sqrt{14}_{225°}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{2}_{60°}\right)^3} = \frac{1_{120°} \cdot 14_{90°}}{\dfrac{1}{8}_{180°}} = \frac{14_{210°}}{\dfrac{1}{8}_{180°}} =$$

$$= 112_{30°}$$

33 Resuelve:

$$\frac{(1-2i)(-2+i)}{i(-1+i)^2} - \frac{2}{i}$$

$$\frac{-2+i+4i+2}{i(1-2i-1)} - \frac{2}{i} = \frac{5i}{2} - \frac{2}{i} =$$

$$= \frac{-5-4}{2i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{9}{2}i$$

34 Determina las coordenadas de los vértices del triángulo *ABC* sabiendo que son los afijos de las raíces cúbicas de -27.

$z = 27_{180°} \rightarrow |z| = 27 \rightarrow \sqrt[3]{27} = 3$

$k = 0 \rightarrow \dfrac{180° + 0 \cdot 360°}{3} = 60° \rightarrow 3_{60°} \rightarrow$

$\rightarrow A\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$k = 1 \rightarrow \dfrac{180° + 1 \cdot 360°}{3} = 180° \rightarrow 3_{180°} \rightarrow$

$\rightarrow B(-3{,}0)$

$k = 2 \rightarrow \dfrac{180° + 2 \cdot 360°}{3} = 300° \rightarrow 3_{300°} \rightarrow$

$\rightarrow C\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

35 Halla todas las soluciones de las siguientes ecuaciones.

a) $z^4 - 16 = 0$ c) $z^4 - 27 = 0$

b) $z^3 + 8 = 0$ d) $z^3 + 9 = 0$

a) $z = \sqrt[4]{16_{0°}} \rightarrow z_1 = 2_{0°}, z_2 = 2_{90°},$
$z_3 = 2_{180°}, z_4 = 2_{270°}$

b) $z = \sqrt[3]{8_{180°}} \rightarrow z_1 = 2_{60°}, z_2 = 2_{180°},$
$z_3 = 2_{300°}$

c) $z = \sqrt[4]{27_{0°}} \rightarrow z_1 = \sqrt[4]{27}_{0°}, z_2 = \sqrt[4]{27}_{90°},$
$z_3 = \sqrt[4]{27}_{180°}, z_4 = \sqrt[4]{27}_{270°}$

d) $z = \sqrt[3]{9_{180°}} \rightarrow z_1 = \sqrt[3]{9}_{60°}, z_2 = \sqrt[3]{9}_{180°},$
$z_3 = \sqrt[3]{9}_{300°}$

ACTIVIDADES FINALES

1. Valora los números complejos como ampliación de los números reales

36 Calcula las soluciones de las siguientes ecuaciones, indicando si son reales, imaginarias o complejas.

a) $x^2 - 25 = 0$

b) $x^2 + 9 = 0$

c) $2x^2 + 8 = 0$

d) $x^2 - 2x + 5 = 0$

e) $x^2 - 4x + 5 = 0$

f) $2x^2 + 3x + 5 = 0$

a) $x^2 = 25 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -5 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow$ Números reales

b) $x^2 = -9 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3i \\ x_2 = -3i \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow$ Números imaginarios puros

c) $x^2 = -4 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2i \\ x_2 = -2i \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow$ Números imaginarios puros

d) $x = \dfrac{2 \pm 4i}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + 2i \\ x_2 = 1 - 2i \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow$ Números complejos

e) $x = \dfrac{4 \pm 2i}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 + i \\ x_2 = 2 - i \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow$ Números complejos

f) $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{31}i}{4} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-3 + \sqrt{31}i}{4} \\ x_2 = \dfrac{-3 - \sqrt{31}i}{4} \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow$ Números complejos

37 Resuelve estas ecuaciones y expresa sus soluciones mediante números complejos.

a) $-x^2 - 64 = 0$

b) $1 - (-x^2) = -120$

c) $1 - x^2 = 2x + 5$

d) $-3 + x^2 = 2x^2 + 1$

e) $(x - 10)^2 = -20x$

f) $1 + 4x^2 = 2x(1 - x)$

a) $x^2 = -64 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 8i \\ x_2 = -8i \end{cases}$

b) $x^2 = -121 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 11i \\ x_2 = -11i \end{cases}$

c) $x = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{3}i}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 + \sqrt{3}i \\ x_2 = -1 - \sqrt{3}i \end{cases}$

d) $x^2 = -4 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2i \\ x_2 = -2i \end{cases}$

e) $x^2 = -100 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 10i \\ x_2 = -10i \end{cases}$

f) $x = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{5}i}{12} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1 + \sqrt{5}i}{6} \\ x_2 = \dfrac{1 - \sqrt{5}i}{6} \end{cases}$

38 **INVENTA.** Escribe dos ecuaciones que tengan alguna solución compleja.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$x^2 + 9 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3i \\ x_2 = -3i \end{cases}$

$x^3 + 4x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2i \\ x_3 = -2i \end{cases}$

39 **MATEMÁTICAS E... HISTORIA.** Rafael Bombelli fue un matemático del siglo XVI que avanzó en el estudio de los números complejos ideando la fórmula para obtener una solución de las ecuaciones del tipo $x^3 = px + q$:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Una vez obtenida una solución, factorizó la ecuación y resolvió la ecuación de segundo grado resultante.

Considera la ecuación $x^3 = 15x + 4$. Resuélvela primero con la fórmula dada y luego por Ruffini.

¿Cómo podía estar seguro Bombelli de que las raíces de números negativos debían existir?

$$x = \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{3}\right)^3}} + $$
$$+ \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{3}\right)^3}} =$$
$$= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Aplicando el método de Ruffini obtenemos $x_1 = 4$ y con la fórmula de la ecuación de segundo grado: $x_2 = -2 + \sqrt{3}$, $x_3 = -2 - \sqrt{3}$.

Como se debe llegar a la misma solución por cualquier método, $\sqrt{-121}$ debe existir y, por tanto, también las raíces de números negativos.

Esta actividad puede utilizarse para trabajar el ODS 4, educación de calidad.

2. Interpreta las formas binómica y polar de un número complejo

ACTIVIDADES FLASH

40 Expresa como números complejos en forma binómica.

a) $\sqrt{-16} + 3$

b) $-2 - \sqrt{-4}$

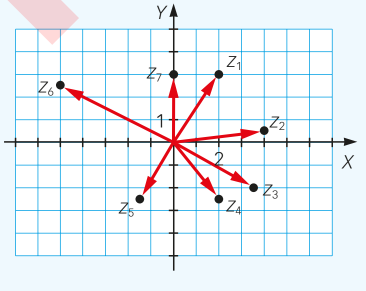
c) $\sqrt{-8} + \sqrt{2}$

a) $3 + 4i$

b) $-2 - 2i$

c) $\sqrt{2} + \sqrt{8}\,i$

41 Expresa en forma binómica estos números complejos.



$z_1 = 2 + 3i$ | $z_5 = \dfrac{-3 - 5i}{2}$

$z_2 = 4 + \dfrac{1}{2}i$ | $z_6 = -5 + \dfrac{5}{2}i$

$z_3 = \dfrac{7}{2} - 2i$ | $z_7 = 3i$

$z_4 = 2 - \dfrac{5}{2}i$

42 Halla a y b para que se cumpla cada igualdad.

a) $(2a + b) + 5i = -2 + (a - b)i$

b) $13 + ai = (a + 3b) + (2b + 3)i$

c) $(a + 1) - (b - 2)i = -1$

a) $\left.\begin{array}{r} 2a + b = -2 \\ a - b = 5 \end{array}\right\} \to 3a = 3 \to$
$\to a = 1 \qquad b = -4$

b) $\left.\begin{array}{r} a + 3b = 13 \\ a = 2b + 3 \end{array}\right\} \to$
$\to 3b = 13 - 2b - 3 \to$
$\to a = 7 \qquad b = 2$

c) $\left.\begin{array}{r} a + 1 = -1 \\ b - 2 = 0 \end{array}\right\} \to a = -2 \qquad b = 2$

43 Halla los valores de a y b que cumplen:

$$a(1 + 2i) + b(2 - i) = 8 + 6i$$

$a + 2ai + 2b - bi = 8 + 6i \to$
$\to \left.\begin{array}{r} a + 2b = 8 \\ 2a - b = 6 \end{array}\right\} \to a = 4 \qquad b = 2$

44 Representa el opuesto y el conjugado de cada número.

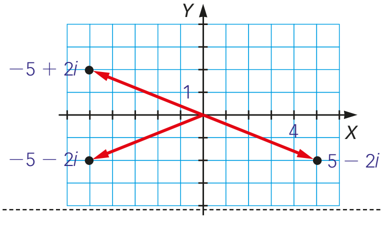
a) $-5 + 2i$

c) $-i$

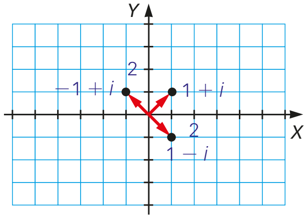
b) $1 - i$

d) 5

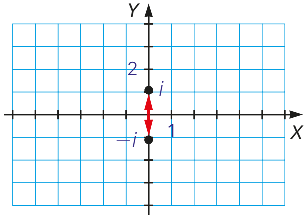
a) Opuesto: $5 - 2i$ Conjugado: $-5 - 2i$



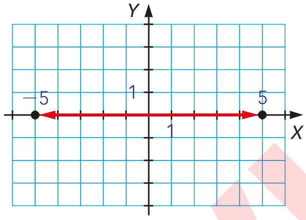
b) Opuesto: $-1 + i$ Conjugado: $1 + i$



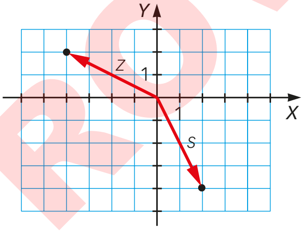
c) Opuesto: i Conjugado: i



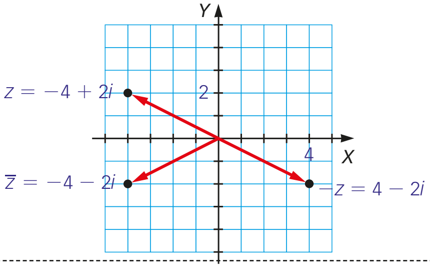
d) Opuesto: -5 Conjugado: 5

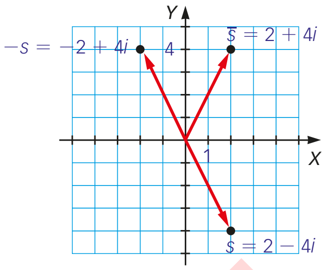


45 **INVESTIGA.** Dibuja el conjugado y el opuesto de z y s.



¿Qué relación hay entre la representación de un número y la de su conjugado? ¿Y con la de su opuesto?





El afijo del conjugado es simétrico al del número respecto al eje real y el afijo del opuesto es simétrico al del número respecto al origen.

46 **INVENTA.** Escribe 4 números complejos tales que al representarlos y unir sus afijos formen un cuadrado.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$z_1 = 2_{30°}$ $z_2 = 2_{120°}$ $z_3 = 2_{210°}$ $z_4 = 2_{300°}$

47 Calcula el valor de a para que el número complejo $\dfrac{2a - i}{3 - 2i}$ se encuentre en:

a) El eje de abscisas.

b) El eje de ordenadas.

c) La bisectriz del cuarto cuadrante.

$$\frac{(2a - i)(3 + 2i)}{(3 - 2i)(3 + 2i)} = \frac{(6a + 2) + (4a - 3)i}{13}$$

a) $4a - 3 = 0 \rightarrow a = \dfrac{3}{4}$

b) $6a + 2 = 0 \rightarrow a = \dfrac{-1}{3}$

c) $4a - 3 = -6a - 2 \rightarrow a = \dfrac{1}{10}$

48 Calcula el valor de k para que el número $k + (k - 3)i$ cumpla las siguientes condiciones.

a) Sea un número imaginario puro.

b) Sea un número real.

a) $k = 0$

b) $k - 3 = 0 \rightarrow k = 3$

49 Calcula el valor de a para que el número $\frac{2-3ai}{3+4i}$:

a) Sea un número real.

b) Sea un número imaginario puro.

c) Tenga su afijo en la bisectriz del tercer cuadrante.

$$\frac{2-3ai}{3+4i}\cdot\frac{3-4i}{3-4i}=\frac{(6-12a)-(8+9a)i}{25}$$

a) $8a+9=0 \rightarrow a=\frac{-9}{8}$

b) $6-12a=0 \rightarrow a=\frac{1}{2}$

c) $6-12a=-8-9a \rightarrow a=\frac{14}{3}$

50 Halla a de manera que $(a+5i)^2$ sea un número imaginario puro.

$a^2-25+10ai \rightarrow a^2-25=0 \rightarrow$
$\rightarrow a_1=5 \quad a_2=-5$

51 **RETO.** Sabiendo que $i=(a+bi)^2$, ¿cuál es el valor de a^2+b^2?

$$a+bi=\sqrt{i}=\sqrt{1_{90°}}=1_{\frac{90°+k\cdot 360°}{2}}$$

$$\left\{\begin{array}{l} k=0 \rightarrow 1_{45°}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i \rightarrow \\ \qquad \rightarrow a_1=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad b_1=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

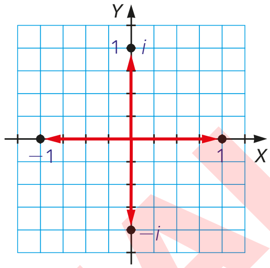
$$\left\{\begin{array}{l} k=1 \rightarrow 1_{225°}=\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{-\sqrt{2}}{2}i \rightarrow \\ \qquad \rightarrow a_2=\frac{-\sqrt{2}}{2} \quad b_2=\frac{-\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \rightarrow$$

$\rightarrow a^2+b^2=1$

52 **INVESTIGA.** Calcula y representa en el plano complejo los números i^1, i^2, i^3, i^4, i^5, i^6…

Investiga también lo que ocurre con las potencias negativas i^{-1}, i^{-2}, i^{-3}, i^{-4}, i^{-5}, i^{-6}…

$i^{4n-3}=i$
$i^{4n-2}=-1$
$i^{4n-1}=-i$
$i^{4n}=1$



Con las potencias negativas:

$i^{-4n+3}=-i$
$i^{-4n+2}=-1$
$i^{-4n+1}=i$
$i^{-4n}=1$

53 **RETO.** Calcula esta suma.

$$i+2i^2+3i^3+\ldots+102i^{102}$$

$i-2-3i+4+5i-6-7i+8+9i+$
$+\ldots+100+101i-102$

Lo podemos separar en varias progresiones aritméticas.

- 4, 8, 12, 16, ..., 100

  $a_1=4 \quad d=4 \quad n=25 \rightarrow$

  $\rightarrow S_{25}=\frac{(4+100)\cdot 25}{2}=1300$

- $-2, -6 -10, -14, ..., -102$

  $a_1=-2 \quad d=-4 \quad n=26 \rightarrow$

  $\rightarrow S_{26}=\frac{(-2+(-102))\cdot 26}{2}=-1352$

- $i+5i+9i+13i+\ldots+101i=$
  $=(1+5+9+13+\ldots+101)i$

  $a_1=1 \quad d=4 \quad n=26 \rightarrow$

  $\rightarrow S_{26}=\frac{(1+101)\cdot 26}{2}=1326 \rightarrow 1326i$

- $-3i-7i-11i+\ldots-99i=$
  $=(-3-7-11-\ldots-99)i$

  $a_1=-3 \quad d=-4 \quad n=25 \rightarrow$

  $\rightarrow S_{25}=\frac{(-3+(-99))\cdot 25}{2}=-1275 \rightarrow$
  $\rightarrow -1275i$

Si sumamos todo, resulta $-52+51i$.

54 **RETO.** Averigua para qué valor de n se cumple:

$$i + 2i^2 + 3i^3 + \ldots + ni^n = 48 + 49i$$

Para $n = 97$:

$i - 2 - 3i + 4 + 5i - 6 - 7i + 8 + 9i +$
$+ \ldots + 96 + 97i$

Lo podemos separar en varias progresiones aritméticas.

- $4, 8, 12, 16, \ldots, 96$

  $a_1 = 4 \quad d = 4 \quad n = 24 \rightarrow$

  $\rightarrow S_{24} = \dfrac{(4 + 96) \cdot 24}{2} = 1200$

- $-2, -6\ -10, -14, \ldots, -94$

  $a_1 = -2 \quad d = -4 \quad n = 24 \rightarrow$

  $\rightarrow S_{24} = \dfrac{(-2 + (-94)) \cdot 24}{2} = -1152$

- $i + 5i + 9i + 13i + \ldots + 97i =$

  $= (1 + 5 + 9 + 13 + \ldots + 97)i$

  $a_1 = 1 \quad d = 4 \quad n = 25 \rightarrow$

  $\rightarrow S_{25} = \dfrac{(1 + 97) \cdot 25}{2} = 1225 \rightarrow 1225i$

- $-3i - 7i - 11i + \ldots - 95i =$

  $= (-3 - 7 - 11 - \ldots - 95)i$

  $a_1 = -3 \quad d = -4 \quad n = 24 \rightarrow$

  $\rightarrow S_{24} = \dfrac{(-3 + (-95)) \cdot 24}{2} = -1176 \rightarrow$

  $\rightarrow -1176i$

Si sumamos todo, resulta $48 + 49i$.

55 Resuelve la operación $i^{254} + \dfrac{i^{320}}{i + 1} - \dfrac{2}{i^9}$.

$-1 + \dfrac{1}{i + 1} - \dfrac{2}{i} =$

$= -1 + \dfrac{i - 1}{(i + 1)(i - 1)} - \dfrac{2i}{i \cdot i} =$

$= -1 + \dfrac{i - 1}{2} + 2i = \dfrac{2 + i - 1 - 4i}{-2} =$

$= \dfrac{-1 + 3i}{2}$

56 Averigua el valor que debe tener k para que $\dfrac{2 + i}{k - i}$ sea un número real. ¿De qué número real se trata?

$\dfrac{2 + i}{k - i} \cdot \dfrac{k + i}{k + i} =$

$= \dfrac{2k + 2i + ki - 1}{k^2 + 1} =$

$= \dfrac{2k - 1}{k^2 + 1} + \dfrac{2 + k}{k^2 + 1} i \rightarrow k = -2$

$\dfrac{2 + i}{-2 - i} = \dfrac{(2 + i)(-2 + i)}{(-2 - i)(-2 + i)} = -1$

Se trata del número -1.

57 Averigua el valor que debe tener k para que $\dfrac{k - \sqrt{2}\, i}{\sqrt{2} - i}$ sea un número imaginario puro. ¿Cuál es?

$\dfrac{k - \sqrt{2}\, i}{\sqrt{2} - i} \cdot \dfrac{\sqrt{2} + i}{\sqrt{2} + i} =$

$= \dfrac{\sqrt{2}\, k + \sqrt{2} + (k - 2)i}{2 + 1} \rightarrow k = -1$

El número es $\dfrac{-3i}{3} = -i$.

58 Calcula el valor de a para que el número $\dfrac{6 - 2i}{1 + ai}$ sea:

a) Un número imaginario puro.

b) Un número real.

c) El número complejo $2 - 4i$.

d) Un número complejo con módulo 1.

e) Un número complejo con argumento $\dfrac{7\pi}{4}$ rad.

$\dfrac{6 - 2i}{1 + ai} \cdot \dfrac{1 - ai}{1 - ai} = \dfrac{6 - 2a + (-6a - 2)i}{1 + a^2}$

a) $6 - 2a = 0 \rightarrow a = 3$

b) $-6 - 2a = 0 \rightarrow a = -3$

c) $\dfrac{6 - 2i}{1 + ai} = 2 - 4i \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{6 - 2i}{2 - 4i} = \dfrac{3 - i}{1 - 2i} \cdot \dfrac{1 + 2i}{1 + 2i} =$

$= \dfrac{5 + 5i}{5} = 1 + i = 1 + ai \rightarrow$

$\rightarrow a = 1$

d) $\dfrac{\sqrt{40}}{\sqrt{1 + a^2}} = 1 \rightarrow 40 = 1 + a^2 \rightarrow$

$\rightarrow a = \pm\sqrt{39}$

e) $\dfrac{\sqrt{40}_{\,arc\ tg\left(-\frac{1}{3}\right)}}{\sqrt{1+a^2}_{\,arc\ tg\, a}} = r_{\frac{7\pi}{4}}$

$arc\ tg\left(-\dfrac{1}{3}\right) - arc\ tg\ a = \dfrac{7\pi}{4} \rightarrow$

$\rightarrow arc\ tg\ a = arc\ tg\left(-\dfrac{1}{3}\right) - 315° \rightarrow$

$\rightarrow a = \dfrac{1}{2}$

59 Calcula c sabiendo que la representación gráfica de $\dfrac{12+ci}{-5+2i}$ está sobre la bisectriz del primer cuadrante.

$\dfrac{12+ci}{-5+2i} \cdot \dfrac{-5-2i}{-5-2i} =$

$= \dfrac{-60-24i-5ci+2c}{25+4} =$

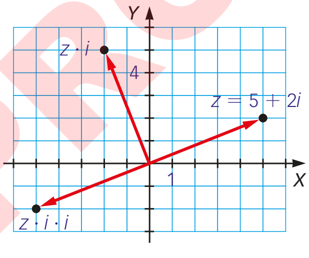
$= \dfrac{(-60+2c)+(-24-5c)i}{29}$

Si el afijo (a, b) está sobre la bisectriz del primer cuadrante, se cumple que $a = b$.

$-60 + 2c = -24 - 5c \rightarrow$

$\rightarrow c = \dfrac{36}{7}$

60 **INVESTIGA.** Representa $5 + 2i$. Multiplícalo por i y representa el resultado. Multiplica dos veces por i y explica qué se obtiene.



$(5+2i)i = -2 + 5i$

$(5+2i)i \cdot i = -5 - 2i$

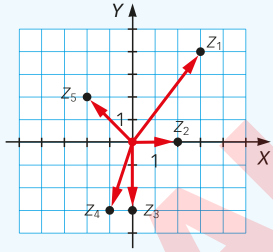
$i \cdot i = i^2 = -1$

Al multiplicarlo dos veces por i se obtiene el opuesto.

Cada vez que se multiplica por i, se realiza al afijo un giro de 90° en sentido antihorario respecto del origen.

ACTIVIDADES FLASH

61 Expresa estos números complejos en forma polar.



$Z_1 = 3 + 4i = 5_{53,13°}$

$Z_2 = 2 = 2_{0°}$

$Z_3 = -3i = 3_{270°}$

$Z_4 = -1 - 3i = \sqrt{10}_{251,57°}$

$Z_5 = -2 + 2i = 2\sqrt{2}_{135°}$

62 Determina si estos números son iguales.

a) $1_{90°}$ y $1_{270°}$
b) $2_{90°}$ y $2_{-90°}$
c) $3_{120°}$ y $3_{480°}$
d) $\sqrt{27}_{45°}$ y $\left(3\sqrt{3}\right)_{405°}$
e) $4_{60°}$ y $4_{-60°}$
f) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)_{-30°}$ y $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)_{690°}$

a) $\left\{\begin{array}{l} 1_{90°} = i \\ 1_{270°} = -i \end{array}\right. \rightarrow$ No son iguales.

b) $\left\{\begin{array}{l} 2_{90°} = 2i \\ 2_{-90°} = 2_{270°} = -2i \end{array}\right. \rightarrow$
$\rightarrow$ No son iguales.

c) $3_{480°} = 3_{120°+360°} = 3_{120°} \rightarrow$
$\rightarrow$ Son iguales.

d) $\left\{\begin{array}{l} 4_{60°} = 4\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ 4_{-60°} = 4\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) \end{array}\right. \rightarrow$
$\rightarrow$ No son iguales.

e) $3\sqrt{3}_{405°} = 3\sqrt{3}_{360°+45°} = \sqrt{27}_{45°} \rightarrow$
$\rightarrow$ Son iguales.

f) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)_{690°} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)_{330°+360°} =$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)_{330°} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)_{-30°} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{-30°} \rightarrow \text{Son iguales.}$$

63 Si $2_{45°}$ y r_{α} son dos números complejos iguales, ¿cuánto puede valer r y cuáles pueden ser los valores de α?

$r = 2 \qquad \alpha = 45° + k \cdot 360°$

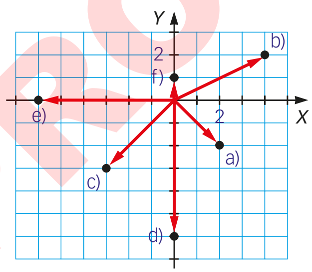
64 **INVESTIGA.** ¿Qué ocurre en el plano complejo si al afijo de un número real se le aplica un giro de 90°?

Se transforma en el afijo de un número imaginario puro.

65 Escribe estos números en forma polar y represéntalos.

a) $1 - i$
b) $\sqrt{3} + i$
c) $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$
d) $-3i$
e) -3
f) $\frac{1}{2}i$

a) $\sqrt{2}_{315°}$
b) $2_{30°}$
c) $2_{225°}$
d) $3_{270°}$
e) $3_{180°}$
f) $\frac{1}{2}_{90°}$



66 Escribe en forma binómica los siguientes números.

a) $4_{60°}$
b) $2_{225°}$
c) $3_{\frac{\pi}{2}}$
d) 2_{π}
e) $3_{150°}$
f) $1_{\frac{3\pi}{2}}$
g) $\sqrt{2}_{\frac{7\pi}{4}}$
h) $\sqrt{3}_{300°}$

a) $2 + 2\sqrt{3}i$
b) $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$
c) $3i$
d) -2
e) $-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$
f) $-i$
g) $1 - i$
h) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

67 Determina el ángulo que forman los vectores correspondientes a los números $4 + i$ y $1 + 2i$.

$$\cos \alpha = \frac{(4, 1) \cdot (1, 2)}{|4 + i| \cdot |1 + 2i|} = \frac{6}{\sqrt{85}}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{6}{\sqrt{85}}\right) = 49{,}4°$$

68 Escribe en forma polar estos números complejos.

a) $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\ \mathrm{sen}\frac{\pi}{6}\right)$

b) $3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\ \mathrm{sen}\frac{\pi}{2}\right)$

a) $\sqrt{3}_{\frac{\pi}{6}}$

b) $3_{\frac{\pi}{2}}$

69 Escribe, en forma polar y binómica, el conjugado y el opuesto de estos números complejos.

$z_1 = 5_{240°} \qquad z_2 = 3_{135°} \qquad z_3 = \sqrt{3}_{\frac{\pi}{6}}$

$$z_1 = 5_{240°} = \frac{-5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i$$

$$\overline{z}_1 = 5_{-240°} = 5_{120°} = \frac{-5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$$

$$-z_1 = 5_{240°+180°} = 5_{60°} = \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_2 = 3_{135°} = \frac{-3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$$

$$\overline{z}2 = 3_{-135°} = 3_{225°} = \frac{-3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$$

$$-z_2 = 3_{135°+180°} = 3_{315°} = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$$

$$z_3 = \sqrt{3}_{\frac{\pi}{6}} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\overline{z}_3 = \sqrt{3}_{\frac{-\pi}{6}} = \sqrt{3}_{\frac{11\pi}{6}} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$-z_3 = \sqrt{3}_{\frac{\pi}{6}+\pi} = \sqrt{3}_{\frac{7\pi}{6}} = \frac{-3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

70 ●●○ **INVESTIGA.** Dado el número escrito en forma polar r_α, di cómo serían su opuesto y su conjugado.

Opuesto: $-r_\alpha = r_{180° + \alpha}$ Conjugado: $r_{-\alpha}$

71 ●●○ **INVESTIGA.** ¿Cómo debe ser un número complejo para que coincida con su conjugado? ¿Y con su opuesto?

$a + bi = a - bi \rightarrow b = 0$

Para que un número complejo coincida con su conjugado debe ser un número real.

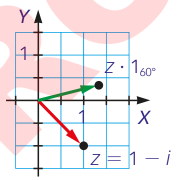
$$a + bi = -a - bi \rightarrow \begin{cases} a = -a \rightarrow a = 0 \\ b = -b \rightarrow b = 0 \end{cases}$$

El único número que coincide con su opuesto es 0.

72 ●●○ Se representa el número complejo $5_{20°}$ y se efectúa un giro de 40°. ¿En qué número complejo se convierte?

$5_{20°} \cdot 1_{40°} = 5_{60°}$

73 ●●○ Representa el número complejo $1 - i$ y realiza en este punto un giro de 60° centrado en el origen. Expresa el número resultante en forma binómica y polar.



$1 - i = \sqrt{2}_{315°}$

$\sqrt{2}_{315°} \cdot 1_{60°} = \sqrt{2}_{15°} = 1{,}37 + 0{,}37i$

74 ●●○ Sea el número complejo $z = 3 + 4i$, halla las coordenadas de los afijos de los números complejos que se obtienen al aplicarle a z las siguientes transformaciones.

a) Un giro con centro el origen y amplitud 90°.

b) Una simetría respecto del eje de abscisas.

c) Una simetría respecto del origen de coordenadas.

d) Un giro con centro el origen y amplitud 60°.

$z = 5_{53,13°}$

a) $5_{53,13°} \cdot 1_{90°} = 5_{143,13°} = -4 + 3i \rightarrow (-4, 3)$

b) El conjugado es el simétrico respecto del eje de abscisas: $\overline{z} = 3 - 4i \rightarrow (3, -4)$

c) El opuesto es el simétrico respecto del origen: $-z = -3 - 4i \rightarrow (-3, -4)$

d) $5_{53,13°} \cdot 1_{60°} = 5_{113,13°} = -1{,}96 + 4{,}6i \rightarrow$
$\rightarrow (-1{,}96;\ 4{,}6)$

75 ●●○ Un triángulo de vértices $A(2, -2)$, $B(2, 2)$ y $C(-4, 0)$ gira 45° respecto del origen. Calcula los vértices transformados.

$A(2, -2) = \sqrt{8}_{315°} \rightarrow$
$\rightarrow \sqrt{8}_{315°} \cdot 1_{45°} = \sqrt{8}_{0°} = \sqrt{8} \rightarrow \left(\sqrt{8}, 0\right)$

$B(2, 2) = \sqrt{8}_{45°} \rightarrow$
$\rightarrow \sqrt{8}_{45°} \cdot 1_{45°} = \sqrt{8}_{90°} = \sqrt{8}i \rightarrow \left(0, \sqrt{8}\right)$

$C(-4, 0) = 4_{180°} \rightarrow$
$\rightarrow 4_{180°} \cdot 1_{45°} = 4_{225°} = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i \rightarrow$
$\rightarrow \left(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}\right)$

76 ●●● **RETO.** Halla los vértices de un cuadrado centrado en el origen si uno de sus vértices es $A(3, 4)$.

$A(3, 4) = 5_{53,13°}$

$5_{53,13° + 90°} = 5_{143,13°} \rightarrow B(-4, 3)$

$5_{143,13° + 90°} = 5_{233,13°} \rightarrow C(-3, -4)$

$5_{233,13° + 90°} = 5_{323,13°} \rightarrow D(4, -3)$

77 ●●● **RETO.** Si el número complejo $a + bi$ tiene módulo m y argumento α, ¿cómo expresarías en forma binómica un número complejo con módulo $6m$ y argumento $360° - \alpha$? ¿Y si el módulo es $3m$ y el argumento $\alpha + 270°$?

$$a + bi \rightarrow \begin{cases} a = m \cos \alpha \\ b = m \operatorname{sen} \alpha \end{cases}$$

a) $6m(\cos(360° - \alpha) + i \operatorname{sen}(360° - \alpha)) =$
$= 6m(\cos \alpha - i \operatorname{sen} \alpha) =$
$= 6m \cos \alpha - 6m\, i \operatorname{sen} \alpha = 6a - 6bi$

b) $3m(\cos(270° + \alpha) + i\ \text{sen}(270° + \alpha)) =$
$= 3m(\text{sen}\ \alpha - i \cos \alpha) =$
$= 3m\ \text{sen}\ \alpha - 3mi \cos \alpha = 3b - 3ai$

3. Opera con números complejos

Sumas, restas, multiplicaciones y divisiones

ACTIVIDADES FLASH

78 Calcula el resultado de estas operaciones.

a) $(4 - i) + (-2 + 3i)$

b) $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}i\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{4}i\right)$

c) $5 - (2 - i)$

d) $\left(\frac{2}{5} - i\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5}i\right)$

a) $2 + 2i$

b) $\frac{2}{3} - \frac{3}{4}i$

c) $3 + i$

d) $\frac{11}{15} - \frac{7}{5}i$

79 Realiza las siguientes operaciones.

a) $(3 - 5i) + (2 - 7i) + (-4 + 8i)$

b) $(-1 + 2i) - (3 + 6i) - (-4 - i)$

c) $-(1 - 2i) - (-7i) - (-4 - 3i)$

d) $2(1 - 4i) - 2(1 + 4i) - 3(4 - 4i)$

e) $\left(\frac{1}{2} + 2i\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{3}i\right) + 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}i\right)$

a) $1 - 4i$

b) $(-1 + 2i) + (-3 - 6i) + (4 + i) =$
$= -3i$

c) $(-1 + 2i) + 7i + (4 + 3i) = 3 + 12i$

d) $(2 - 8i) - (2 + 8i) - (12 - 12i) =$
$= -12 - 4i$

e) $\left(\frac{1}{2} + 2i\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{3}i\right) + \left(\frac{2}{3} + i\right) =$
$= \frac{5}{12} + \frac{14}{3}i$

80 **INVENTA.** Escribe dos números complejos cuya suma sea un número real y otros dos cuya resta sea un número imaginario puro.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$z_1 = 4 + 3i$

$z_2 = 2 - 3i \rightarrow z_1 + z_2 = 6$

$z_1' = 2 - 5i$

$z_2' = 2 + 3i \rightarrow z_1' - z_2' = -8i$

81 Si $z = 3 + ai$ y $z' = 5 - i$, halla el valor del número real a para que $3z - 2z'$ sea un número real.

$3z - 2z' = 9 + 3ai - 10 + 2i =$
$= -1 + (3a + 2)i \rightarrow 3a + 2 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow a = \frac{-2}{3}$

82 La suma de dos números complejos conjugados es 16 y sus módulos suman 20. ¿Cuáles son estos números?

Sea $z = a + bi$.

$$\left.\begin{array}{r} a + bi + a - bi = 16 \\ \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + (-b)^2} = 20 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} a = 8 \\ \sqrt{a^2 + b^2} = 10 \end{array}\right\}$$

$\rightarrow 64 + b^2 = 100 \rightarrow b = \pm 6$

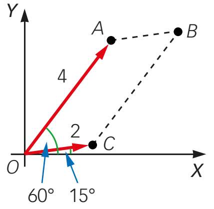
Los números son $8 + 6i$ y $8 - 6i$.

83 **INVESTIGA.** ¿Qué posición deben tener los afijos de dos números complejos para que su suma sea un número imaginario puro? ¿Y para que sea un número real?

a) Para que la suma sea un número imaginario puro, su parte real tiene que ser 0. Si $z_1 = a + bi \rightarrow A_1(a, b)$, el otro número tiene que ser de la forma $z_2 = -a + ci \rightarrow A_2(-a, c)$, por tanto, los afijos deben estar situados cada uno a un lado del eje de ordenadas, estando ambos a la misma distancia del eje.

b) Para que la suma sea un número real, su parte imaginaria tiene que ser 0. Si $z_1 = a + bi \rightarrow A_1(a, b)$, el otro número tiene que ser de la forma $z_2 = c - bi \rightarrow A_2(c, -b)$; por tanto, los afijos deben estar situados cada uno a un lado del eje de abscisas, estando ambos a la misma distancia del eje.

84 ●●● **RETO.** Observa la representación de estos números complejos y calcula.



a) Las coordenadas del vértice B.

b) Los vértices del paralelogramo simétrico a $OCBA$ respecto del eje de abscisas.

c) Los vértices del transformado por un giro de 90° y centro O.

a) $A(4\cos 60°, 4\,sen\,60°) \rightarrow A\left(2, 2\sqrt{3}\right)$

$C(2\cos 15°, 2\,sen\,15°) \rightarrow C(1{,}93; 0{,}52)$

$B = A + C \rightarrow B(3{,}93; 3{,}98)$

b) El punto simétrico respecto del eje de abscisas coincide con el afijo del conjugado.

$O' = \overline{O} = O \rightarrow O'(0, 0)$

$A' = \overline{A} \rightarrow A'\left(2, -2\sqrt{3}\right)$

$B' = \overline{B} \rightarrow B'(3{,}93; -3{,}98)$

$C' = \overline{C} \rightarrow C'(1{,}93; -0{,}52)$

c) El transformado por un giro de 90° coincide con el afijo del resultado de multiplicar por $1_{90°}$.

$O(0\cos 90°, 0\,sen\,90°) \rightarrow O''(0, 0)$

$A''(4\cos(60° + 90°), 4\,sen(60° + 90°)) \rightarrow$
$\rightarrow A''\left(-2\sqrt{3}, 2\right)$

$C''(2\cos(15° + 90°), 2\,sen(15° + 90°)) \rightarrow$
$\rightarrow C''(-0{,}52; 1{,}93)$

$B'' = A'' + C'' \rightarrow B''(-3{,}98; 3{,}93)$

85 ●●○ ¿Qué número complejo hay que sumarle a $-3 + 2i$ para que resulte $5_{270°}$? ¿Y para que resulte $6_{\frac{5\pi}{3}}$?

$5_{270°} = -5i$

$6_{\frac{5\pi}{3}} = 3 - 3\sqrt{3}i$

$(-3 + 2i) + (a + bi) = -5i \rightarrow$
$\rightarrow a = 3, b = -7 \rightarrow z = 3 - 7i$

$(-3 + 2i) + (a + bi) = 3 - 3\sqrt{3}i \rightarrow$
$\rightarrow a = 6, b = -2 - 3\sqrt{3} \rightarrow$
$\rightarrow z = 6 - \left(2 + 3\sqrt{3}\right)i$

86 ●○○ Calcula estos productos.

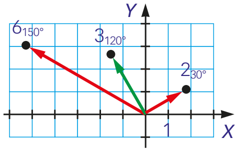
a) $(1 - 3i)(2 - 6i)$
b) $(-3 - 4i)(7 - i)$
c) $(5 - 4i)(5 + 4i)$
d) $\left(-3 - 2\sqrt{2}i\right)\left(-3 + 2\sqrt{2}i\right)$
e) $4_{120°} \cdot 3_{60°}$
f) $4_{\frac{\pi}{3}} \cdot 2_{270°}$
g) $2_{260°} \cdot 5_{130°}$
h) $1_{40°} \cdot 5_{50°}$

a) $2 - 6i - 6i - 18 = -16 - 2i$
b) $-21 + 3i - 28i - 4 = -25 - 25i$
c) $25 + 16 = 41$
d) $9 + 8 = 17$
e) $12_{180°}$
f) $4_{60°} \cdot 2_{270°} = 8_{330°}$
g) $10_{390°} = 10_{30°}$
h) $5_{90°}$

87 ●○○ ¿Por qué número hay que multiplicar a un número complejo z para obtener otro número complejo con el mismo módulo y cuyo argumento sea 45° mayor?

Hay que multiplicarlo por $1_{45°}$.

88 ●●● Dibuja los números $2_{30°}$ y $6_{150°}$. ¿Por qué número complejo hay que multiplicar al primero para obtener el segundo?



Hay que multiplicarlo por $3_{120°}$.

89 ●○○ **INVENTA.** Escribe dos números complejos no reales cuyo producto sea un número real y otros dos cuyo producto sea un número imaginario puro.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$2_{220°} \cdot 3_{140°} = 6_{0°} = 6$

$5_{15°} \cdot 3_{75°} = 15_{90°} = 15i$

90 ●○○ Halla a para que el producto $(3 + i)(a + i)$ sea un número imaginario puro. ¿Puede ser un número real?

$$(3+i)(a+i) = 3a + 3i + ai - 1 = $$
$$= (3a-1) + (3+a)i$$

Para que sea imaginario puro:

$3a - 1 = 0 \rightarrow a = \dfrac{1}{3}$

Para que sea real:

$3 + a = 0 \rightarrow a = -3$

91 Encuentra p y q para que se cumpla la siguiente igualdad.

$$(p+3i)(4+qi) = 15 + 9i$$

$(4p - 3q) + (12 + pq)i = 15 + 9i$

$$\left.\begin{array}{r} 4p - 3q = 15 \\ 12 + pq = 9 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} p_1 = 3 \quad q_1 = -1 \\ p_2 = \dfrac{3}{4} \quad q_2 = -4 \end{array}\right.$$

92 Halla el valor de b en la igualdad.

$$4_{72°} \cdot (1 + bi) = 8_{132°}$$

$1 + bi = \dfrac{8_{132°}}{4_{72°}} \rightarrow$

$\rightarrow 2_{60°} = 2(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°) \rightarrow$

$\rightarrow b = 2 \operatorname{sen} 60° = \sqrt{3}$

93 **INVESTIGA.** ¿Es cierto que siempre que multiplicas un número real por un número complejo z el resultado tiene el mismo argumento que z?

Si no es cierto, enuncia una propiedad correcta.

No es cierto. Por ejemplo:

$1_{180°} \cdot 1_{90°} = 1_{270°}$

Solo es cierto si el número es positivo.

Si multiplicamos un número real positivo por un número complejo z, el resultado tiene el mismo argumento que z.

94 El valor del argumento del número complejo z_1 es 150°, y el módulo de z_2 es 2. Calcula z_1 y z_2 sabiendo que su producto es $-8i$.

$z_1 = r_{150°} \qquad z_2 = 2_\alpha$

$-8i = 8_{270°} \rightarrow r_{150°} \cdot 2_\alpha = 8_{270°} \rightarrow$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} r \cdot 2 = 8 \\ 150° + \alpha = 270° \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} r = 4 \\ \alpha = 120° \end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow z_1 = 4_{150°} \quad z_2 = 2_{120°}$

95 Realiza las siguientes divisiones de números complejos.

a) $(5 + 2i) : (2i)$

b) $\dfrac{5}{2+4i}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}\,i}$

d) $\dfrac{-1+5i}{3-2i}$

e) $\dfrac{-1+5i}{2-i}$

f) $\dfrac{6_\pi}{2_{\frac{\pi}{4}}}$

g) $\dfrac{8_{170°}}{2_{50°}}$

h) $\dfrac{7_{\frac{2\pi}{3}}}{5_{\frac{5\pi}{2}}}$

i) $\dfrac{1_{80°}}{\sqrt{2}_{30°}}$

a) $\dfrac{5+2i}{2i} \cdot \dfrac{-2i}{-2i} = \dfrac{-10i+4}{4} = \dfrac{-5i+2}{2}$

b) $\dfrac{5}{2+4i} \cdot \dfrac{2-4i}{2-4i} = \dfrac{10-20i}{20} = \dfrac{1-2i}{2}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}\,i} \cdot \dfrac{1-\sqrt{2}\,i}{1-\sqrt{2}\,i} = \dfrac{\sqrt{2}-2i}{3}$

d) $\dfrac{-1+5i}{3-2i} \cdot \dfrac{3+2i}{3+2i} =$

$= \dfrac{-3-2i+15i-10}{9+4} =$

$= -1 + i$

e) $\dfrac{-1+5i}{2-i} \cdot \dfrac{2+i}{2+i} = \dfrac{-2-i+10i-5}{4+1} =$

$= \dfrac{-7+9i}{5}$

f) $3_{\frac{3\pi}{4}}$

g) $4_{120°}$

h) $\dfrac{7}{5}_{\frac{\pi}{6}}$

i) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)_{50°}$

96 Resuelve estas divisiones.

a) $\dfrac{1+3i}{1-3i}$

b) $\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{1+\sqrt{3}\,i}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}-i}{\sqrt{2}+i}$

a) $\dfrac{1+3i}{1-3i}\cdot\dfrac{1+3i}{1+3i}=\dfrac{-8+6i}{10}=\dfrac{-4+3i}{5}$

b) $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}\cdot\dfrac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}=\dfrac{-2-2\sqrt{3}i}{4}=$

$=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}-i}{\sqrt{2}+i}\cdot\dfrac{\sqrt{2}-i}{\sqrt{2}-i}=\dfrac{1-2\sqrt{2}i}{3}$

97 Si $z=2-2i$ y $w=1+i$, calcula:

a) $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{w}$

b) $\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{w}$

c) $\dfrac{1}{z+w}$

d) $\dfrac{1}{z-w}$

e) $\dfrac{z+w}{z-w}$

f) $\dfrac{z-w}{z+w}$

a) $\dfrac{1}{2-2i}+\dfrac{1}{1+i}=\dfrac{2+2i}{8}+\dfrac{1-i}{2}=$

$=\dfrac{2+2i+4-4i}{8}=\dfrac{3-i}{4}$

b) $\dfrac{1}{2-2i}-\dfrac{1}{1+i}=\dfrac{2+2i}{8}-\dfrac{1-i}{2}=$

$=\dfrac{2+2i-4+4i}{8}=\dfrac{-1+3i}{4}$

c) $\dfrac{1}{3-i}=\dfrac{3+i}{10}$

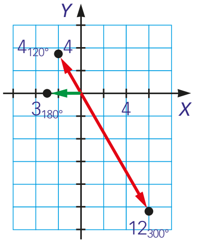
d) $\dfrac{1}{1-3i}=\dfrac{1+3i}{10}$

e) $\dfrac{3-i}{1-3i}\cdot\dfrac{1+3i}{1+3i}=\dfrac{6+8i}{10}=\dfrac{3+4i}{5}$

f) $\dfrac{1-3i}{3-i}\cdot\dfrac{3+i}{3+i}=\dfrac{6-8i}{10}=\dfrac{3-4i}{5}$

98 Representa los números $12_{300°}$ y $4_{120°}$. ¿Por qué número complejo hay que dividir el primero para obtener el segundo?

Hay que dividir entre $3_{180°}$.



99 **INVENTA.** Escribe dos números complejos no reales cuyo cociente sea un número real y otros dos cuyo cociente sea un número imaginario puro.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\dfrac{6_{120°}}{3_{120°}}=2_{0°}=2$ b) $\dfrac{9_{120°}}{3_{30°}}=3_{90°}=3i$

100 Calcula para qué valores de *a, b, c, d, e* y *f* se verifican las condiciones indicadas en cada apartado.

a) $(3-5i)+(-1+ai)$ es un número real.

b) $(b+3i)+(5+2i)$ es un número imaginario puro.

c) $(c+6i)(3-2i)$ es un número real.

d) $(d+6i)(3-2i)$ es un número imaginario puro.

e) $\dfrac{7+11i}{e-2i}$ es un número real.

f) $\dfrac{7+11i}{f-2i}$ es un número imaginario puro.

a) $2+(-5+a)i\rightarrow -5+a=0\rightarrow a=5$

b) $(b+5)+5i\rightarrow\ b+5=0\rightarrow b=-5$

c) $3c-2ci+18i+12=$

$=(3c+12)+(18-2c)i\rightarrow$

$\rightarrow 18-2c=0\rightarrow c=9$

d) $3d-2di+18i+12=$

$=(3d+12)+(18-2d)i\rightarrow$

$\rightarrow 3d+12=0\rightarrow d=-4$

e) $\dfrac{7+11i}{e-2i}\cdot\dfrac{e+2i}{e+2i}=$

$=\dfrac{7e+14i+11ei-22}{e^2+4}=$

$=\dfrac{(7e-22)+(14+11e)i}{e^2+4}\rightarrow$

$\rightarrow 14+11e=0\rightarrow e=\dfrac{-14}{11}$

f) $\dfrac{7+11i}{f-2i}\cdot\dfrac{f+2i}{f+2i}=$

$=\dfrac{7f+14i+11fi-22}{f^2+4}=$

$=\dfrac{(7f-22)+(14+11f)i}{f^2+4}\rightarrow$

$\rightarrow 7f-22=0\rightarrow f=\dfrac{22}{7}$

101 ●●○ **INVESTIGA.** ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas? En caso de ser falsas, pon un ejemplo.

Si dos números complejos tienen sus afijos en el primer cuadrante, entonces:

a) Su suma estará en el primer cuadrante.

b) Su producto estará en el primer o cuarto cuadrante.

c) Su cociente estará en el primer o cuarto cuadrante.

a) Cierto. Si sus afijos están en el primer cuadrante, se cumple que tanto su parte real como su parte imaginaria son positivas, y la suma de números positivos también es positiva.

b) Falso. Ejemplo: $2_{70^\circ} \cdot 5_{30^\circ} = 10_{100^\circ}$

c) Cierto. Si están en el primer cuadrante, sus argumentos cumplen que $0^\circ < \alpha < 90^\circ$; por tanto, la diferencia de ambos argumentos cumplirá que $-90^\circ < \alpha < 90^\circ$ luego el afijo del cociente estará en el primer o en el cuarto cuadrante.

102 ●●○ Halla el opuesto, el conjugado y el inverso de estos números complejos.

a) $2 + 3i$ d) 1_{330°

b) $4 - 5i$ e) 2_{45°

c) $-1 - 2i$ f) $3(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ)$

a) $z = 2 + 3i$

$-z = -2 - 3i$

$\overline{z} = 2 - 3i$

$\frac{1}{z} = \frac{2 - 3i}{13}$

b) $z = 4 - 5i$

$-z = -4 + 5i$

$\overline{z} = 4 + 5i$

$\frac{1}{z} = \frac{4 + 5i}{41}$

c) $z = -1 - 2i$

$-z = 1 + 2i$

$\overline{z} = -1 + 2i$

$\frac{1}{z} = \frac{-1 + 2i}{5}$

d) $z = 1_{330^\circ}$

$-z = 1_{330^\circ + 180^\circ} = 1_{150^\circ}$

$\overline{z} = 1_{-330^\circ} = 1_{30^\circ}$

$\frac{1}{z} = 1_{-330^\circ} = 1_{30^\circ}$

e) $z = 2_{45^\circ}$

$-z = 2_{45^\circ + 180^\circ} = 2_{225^\circ}$

$\overline{z} = 2_{-45^\circ} = 2_{315^\circ}$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{2_{-45^\circ}} = \frac{1}{2_{315^\circ}}$

f) $z = \frac{-3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} i$

$-z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} i$

$\overline{z} = \frac{-3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} i$

$\frac{1}{z} = \frac{2\left(-3 + 3\sqrt{3} i\right)}{36} = \frac{-1 + \sqrt{3}\, i}{6}$

103 ●●○ **INVESTIGA.** ¿Existe algún número complejo cuyo inverso coincida con su conjugado? ¿Y cuyo inverso coincida con su opuesto?

a) Sí, los números complejos de módulo 1.

b) Sí, los números imaginarios puros con módulo 1.

104 ●●● **RETO.** Demuestra que el inverso del producto de dos números complejos es el producto de sus inversos.

Es cierto, pues, dados z_1 y z_2 dos números complejos cualesquiera, se tiene que:

$$(z_1 \cdot z_2)^{-1} = \frac{1}{z_1 \cdot z_2} = \frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_2} = z_1^{-1} \cdot z_2^{-1}$$

105 ●●○ Resuelve estas operaciones.

a) $\frac{(1 - 2i)(-2 + i)}{3i(1 - i)} + \frac{2}{i}$

b) $\frac{30(1 - i)}{-4 - 2i} + (2 - 3i)i$

c) $2i - \frac{(2 + 3i)3}{-3 + i}$

d) $\frac{4(10 - i) + 8}{2 - 6i} - (3 - i)(2 + 6i)$

e) $(-2 - 5i) - \frac{10 - 10i - 5(1 + i)}{(8 + 2i) - (5 + 3i)}$

a) $\dfrac{-2+i+4i+2}{3+3i}+\dfrac{2}{i}\cdot\dfrac{i}{i}=$

$=\dfrac{5i}{3+3i}\cdot\dfrac{3-3i}{3-3i}-2i=$

$=\dfrac{15+15i}{18}-\dfrac{36i}{18}=\dfrac{5-7i}{6}$

b) $\dfrac{30-30i}{-4-2i}\cdot\dfrac{-4+2i}{-4+2i}+2i+3=$

$=\dfrac{-60+180i}{20}+2i+3=$

$=-3+9i+2i+3=11i$

c) $2i-\dfrac{6+9i}{-3+i}\cdot\dfrac{-3-i}{-3-i}=$

$=2i-\dfrac{-9-33i}{10}=\dfrac{9+53i}{10}$

d) $\dfrac{2(10-i)+4}{1-3i}-(12+16i)=$

$=\dfrac{24-2i}{1-3i}\cdot\dfrac{1+3i}{1+3i}-12-16i=$

$=\dfrac{30+70i}{10}-12-16i=$

$=-9-9i$

e) $-2-5i-\dfrac{5-15i}{3-i}\cdot\dfrac{3+i}{3+i}=$

$=-2-5i-(3-4i)=-5-i$

106 Realiza la siguiente operación.

$$\frac{1}{i}+\frac{1+i}{i^3}-\frac{(1+i)\cdot(1-i)}{i^2-1}-\frac{2(1+i)}{i-1}$$

$\dfrac{1}{i}+\dfrac{1+i}{-i}-\dfrac{1-i^2}{i^2-1}-\dfrac{2+2i}{i-1}=$

$=\dfrac{1}{i}-\dfrac{1+i}{i}+1-\dfrac{2+2i}{i-1}=$

$=-\dfrac{2+2i}{i-1}=-\dfrac{2+2i}{i-1}\cdot\dfrac{i+1}{i+1}=$

$=-\dfrac{(2+2i)(i+1)}{-2}=2i$

107 Resuelve la ecuación $\dfrac{xi}{1+3i}-\dfrac{2x}{4-i}=1$.

$xi(4-i)-2x(1+3i)=(1+3i)(4-i)\rightarrow$

$\rightarrow x(4i+1-2-6i)=7+11i\rightarrow$

$\rightarrow x=\dfrac{7+11i}{-1-2i}\cdot\dfrac{-1+2i}{-1+2i}=\dfrac{-29+3i}{5}$

108 La suma de dos números complejos es $3+2i$ y la parte real del segundo es 2. Halla los dos números sabiendo que el cociente del primero entre el segundo es un número imaginario puro.

$(a+bi)+(2+di)=3+2i\rightarrow$

$\rightarrow\begin{cases}a=1\\b+d=2\end{cases}$

$\dfrac{(1+bi)(2-di)}{(2+di)(2-di)}=\dfrac{2+bd+(2b-d)i}{4+d^2}\rightarrow$

$\rightarrow 2+bd=0$

$\left.\begin{array}{r}b+d=2\\2+bd=0\end{array}\right\}\rightarrow\begin{cases}d=1+\sqrt{3}\\b=1-\sqrt{3}\end{cases}$

o bien $\begin{cases}d=1-\sqrt{3}\\b=1+\sqrt{3}\end{cases}$

Hay dos soluciones.

$z_1=1+\left(1+\sqrt{3}\right)i$ y $z_2=2+\left(1-\sqrt{3}\right)i$

$z_1=1+\left(1-\sqrt{3}\right)i$ y $z_2=2+\left(1+\sqrt{3}\right)i$

109 Encuentra dos números complejos cuya suma vale 3 y cuyo cociente es i.

$(a+c)+(b+d)i=3\rightarrow$

$\rightarrow\left.\begin{array}{r}a+c=3\\b+d=0\end{array}\right\}$

$\dfrac{a+bi}{c+di}=i\rightarrow\dfrac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}=i\rightarrow$

$\rightarrow\dfrac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=i\rightarrow$

$\rightarrow\left.\begin{array}{r}ac+bd=0\\bc-ad=c^2+d^2\end{array}\right\}$

Por tanto:

$\left.\begin{array}{r}b+d=0\\a+c=3\\ac+bd=0\\bc-ad=c^2+d^2\end{array}\right\}\rightarrow$

$\rightarrow a=\dfrac{3}{2}\quad b=\dfrac{3}{2}\quad c=\dfrac{3}{2}\quad d=\dfrac{-3}{2}$

Los números son $\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}i$ y $\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}i$

110 Halla dos números complejos conjugados tales que su diferencia sea $6i$ y su cociente la unidad imaginaria.

$(a+bi)-(a-bi)=2bi=6i \rightarrow b=3$

$$\frac{a+bi}{a-bi}\cdot\frac{a+bi}{a+bi}=\frac{a^2-b^2+2abi}{a^2+b^2}=$$
$$=\frac{a^2-9+6ai}{9+a^2}=i$$

$a^2-9=0$ y $\dfrac{6a}{18}=1 \rightarrow a=3$

Los números son $3+3i$ y $3-3i$.

111 Busca un número complejo tal que sumándole $\dfrac{1+i}{2-2i}$ dé otro complejo de módulo $\sqrt{2}$ y argumento 45°.

$$\frac{1+i}{2-2i}\cdot\frac{1+i}{1+i}=\frac{i}{2}$$

$$a+bi+\frac{1}{2}i=a+\left(b+\frac{1}{2}\right)i$$

$$\sqrt{2}=\sqrt{a^2+\left(b+\frac{1}{2}\right)^2}\rightarrow$$

$$\rightarrow a^2+\left(b+\frac{1}{2}\right)^2=2$$

$$tg\ 45°=1=\frac{b+\frac{1}{2}}{a}\rightarrow a=b+\frac{1}{2}\rightarrow$$

$$\rightarrow a=1\ b=\frac{1}{2}$$

El número complejo es $1+\dfrac{1}{2}i$.

Potencias de números complejos

112 Calcula las siguientes potencias.

a) $(1+\sqrt{3}i)^2$

b) $(\sqrt{12}+\sqrt{2}i)^3$

c) $(1-i)^4$

d) $(-\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^6$

e) $(-1+\sqrt{3}i)^4$

f) $(\sqrt{12}-\sqrt{2}i)^3$

g) $\left(5_{\frac{\pi}{3}}\right)^2$

h) $(2_{120°})^5$

i) $\left(\sqrt{3}_{\frac{5\pi}{2}}\right)^6$

j) $\left(4_{\frac{\pi}{3}}\right)^2$

k) $(3_{-25°})^6$

l) $\left(\sqrt{5}_{\frac{3\pi}{4}}\right)^6$

a) $(2_{60°})^2=4_{120°}$

b) $\left(\sqrt{14}_{22,21°}\right)^3=14\sqrt{14}_{66,62°}$

c) $\left(\sqrt{2}_{315°}\right)^4=4_{180°}$

d) $(2_{135°})^6=64_{90°}$

e) $(2_{120°})^4=16_{120°}$

f) $\left(\sqrt{14}_{337,8°}\right)^3=14\sqrt{14}_{293,38°}$

g) $25_{\frac{2\pi}{3}}$

h) $32_{240°}$

i) 27_{π}

j) $16_{\frac{2\pi}{3}}$

k) $729_{210°}$

l) $125_{\frac{9\pi}{2}}$

113 Realiza las siguientes potencias empleando la fórmula de De Moivre.

a) $[3\,(cos\ 25°+i\ sen\ 25°)]^4$

b) $[2\,(cos\ 40°+i\ sen\ 40°)]^9$

c) $[5\,(cos\ 115°+i\ sen\ 115°)]^7$

d) $\left(cos\ \dfrac{\pi}{3}+i\ sen\ \dfrac{\pi}{3}\right)^3$

e) $\left[3\left(cos\ \dfrac{3\pi}{2}+i\ sen\ \dfrac{3\pi}{2}\right)\right]^4$

a) $(3(cos\ 25°+i\ sen\ 25°))^4=$
$=81(cos\ 100°+i\ sen\ 100°)$

b) $(2\,(cos\ 40°+i\ sen\ 40°))^9=$
$=512\,(cos\ 0°+i\ sen\ 0°)=512$

c) $(5(cos\ 115°+i\ sen\ 115°))^7=$
$=78\,125(cos\ 85°+i\ sen\ 85°)$

d) $\left(cos\ \dfrac{\pi}{3}+i\ sen\ \dfrac{\pi}{3}\right)^3=$
$=cos\ \pi+i\ sen\ \pi=-1$

e) $\left(3\left(cos\ \dfrac{3\pi}{2}+i\ sen\ \dfrac{3\pi}{2}\right)\right)^4=$
$=81\,(cos\ 0°+i\ sen\ 0°)=81$

114 **INVENTA.** Escribe dos números complejos tales que al elevarlos al cubo den un número real y otros dos que al elevarlos al cuadrado den un número complejo imaginario puro.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Real: $z_1=2_{60°}\rightarrow(2_{60°})^3=8_{180°}=-8$

$z_2=3_{120°}\rightarrow(3_{120°})^3=27_{0°}=27$

Imaginario puro:

$z_1=2_{45°}\rightarrow(2_{45°})^2=4_{90°}=4i$

$z_2=3_{135°}\rightarrow(3_{135°})^2=9_{270°}=-9i$

115 Calcula y simplifica las expresiones que aparecen a continuación.

a) $i^{49} \cdot i^{87}$

b) $i^{34} \cdot i^{103} + i^{78} \cdot i^{116}$

c) $(-3i)^3 + (2i)^6 : (12i^{18})$

d) $i^{19} \cdot (2i^{33} - 3i^{28})$

a) $i^{136} = 1$

b) $i^{137} + i^{194} = i - 1$

c) $27i - 64 : (-12) = 27i + \dfrac{16}{3}$

d) $-i \cdot (2i - 3) = 2 + 3i$

116 Halla el número complejo z en cada caso.

a) $z = i\,(1 - i)^2$

b) $z = 2i\,(1 - 3i)^4$

c) $z = \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\,i\right)^2 - \sqrt{6}\,i$

d) $2(3 + i) - z = -i$

e) $z = (-i)(3 + i)$

f) $iz = (2 + i)(2 - i)$

a) $z = 2$

b) $z = 56 + 192\,i$

c) $z = 1 - 3\sqrt{6}\,i$

d) $z = 6 + 3i$

e) $z = 1 - 3i$

f) $z = \dfrac{5}{i} = -5i$

117 Resuelve estas operaciones.

a) $\dfrac{(1 + i)^6}{(4_{30°})^3}$

b) $\left(\dfrac{1_{90°}}{\sqrt{3} + i}\right)^3 - \left(4_{270°}(1 + i)\right)^2$

a) $\dfrac{\left(\sqrt{2}_{45°}\right)^6}{(4_{30°})^3} = \dfrac{8_{270°}}{64_{90°}} = \dfrac{1}{8}_{180°} = \dfrac{-1}{8}$

b) $\left(\dfrac{1_{90°}}{2_{30°}}\right)^3 - \left(4_{270°} \cdot \sqrt{2}_{45°}\right)^2 =$

$= \left(\dfrac{1}{2}_{60°}\right)^3 - \left(4\sqrt{2}_{315°}\right)^2 =$

$= \dfrac{1}{8}_{180°} - 32_{270°} = \dfrac{-1}{8} + 32i$

118 Simplifica esta expresión:

$\left(\dfrac{1 + i}{1 - i} - \dfrac{1 - i}{1 + i}\right)^5.$

$\left(\dfrac{(1 + i)^2}{2} - \dfrac{(1 - i)^2}{2}\right)^5 = (2i)^5 = 32i$

119 Demuestra que $z = 1 - 3i$ verifica $\dfrac{z^2}{2} = z - 5.$

$\dfrac{z^2}{2} = \dfrac{(1 - 3i)^2}{2} = \dfrac{-8 - 6i}{2} =$

$= -4 - 3i = 1 - 3i - 5 = z - 5$

120 Resuelve la siguiente operación.

$(1 + i)^{20} - (1 - i)^{20}$

$\left(\sqrt{2}_{45°}\right)^{20} - \left(\sqrt{2}_{315°}\right)^{20} =$

$= 1\,024_{180°} - 1\,024_{180°} = 0$

121 Calcula la parte real del siguiente número complejo.

$1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + (1 + i)^3 +$
$+ (1 + i)^4 + (1 + i)^5$

$1 + \sqrt{2}_{45°} + 2_{90°} + 2\sqrt{2}_{135°} + 4_{180°} + 4\sqrt{2}_{225°}$

La parte real es:

$1 + \sqrt{2}\cos 45° + 2\sqrt{2}\cos 135° - 4 +$
$+ 4\sqrt{2}\cos 225° = -8$

122 Si $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$, calcula el valor de la expresión:

$1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^8$

$1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i + i - \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i -$

$- 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i - i + \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} +$

$+ 1 = 1$

123 **RETO.** ¿Cuánto tiene que valer n para que $(n + i)^4$ sea un número real?

$4\,\text{arc tg}\left(\dfrac{1}{n}\right) = \begin{cases} 180° + 360° \cdot k \\ 0° + 360° \cdot k \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \text{arc tg}\left(\dfrac{1}{n}\right) = \begin{cases} 45° + 90° \cdot k \\ 90° + 90° \cdot k \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow n_1 = 0 \quad n_2 = 1 \quad n_3 = -1$

124 ●●● **RETO.** ¿Cuál es el valor de b en $z = 9 + bi$, siendo $b > 0$, si las partes imaginarias de z^2 y z^3 son iguales?

$z^2 = (81 - b^2) + 18bi$

$z^3 =$

$= 729 - 9b^2 + 162bi + 81bi - b^3i -$

$- 18b^2 =$

$= (729 - 27b^2) + (243b - b^3)i \rightarrow$

$\rightarrow 18b = 243b - b^3 \rightarrow b^3 - 225b = 0 \rightarrow$

$\rightarrow b(b^2 - 225) = 0 \xrightarrow{b>0} b = 15$

125 ●●○ Halla el valor de a para que el siguiente número complejo cumpla que su cuadrado sea igual a su conjugado.

$$a + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\left(a + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = a^2 - \frac{3}{4} + \sqrt{3}ai$$

Hallamos el conjugado: $a - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Igualamos las partes reales y las imaginarias.

$$\left.\begin{array}{l} a^2 - \dfrac{3}{4} = a \\ \sqrt{3}a = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

126 ●●○ **INVESTIGA.** ¿Existe algún número complejo tal que su cuadrado sea igual a su conjugado?

$z = r_\alpha \qquad \overline{z} = r_{-\alpha} \qquad z^2 = (r^2)_{2\alpha}$

$$\left\{\begin{array}{l} r^2 = r \rightarrow r(r-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = 1 \end{cases} \\ 2\alpha = -\alpha \rightarrow \alpha = 0° + 360° \cdot k \end{array}\right.$$

Cumplen esa propiedad los números 0 y 1.

127 ●●○ **INVESTIGA.** Halla los números complejos cuyo cubo es igual a su conjugado.

$(r_\alpha)^3 = r_{-\alpha} \rightarrow r = 1$

$3\alpha = -\alpha \rightarrow \alpha = 0°$

$3\alpha = 360° - \alpha \rightarrow \alpha = 90°$

$3\alpha = 720° - \alpha \rightarrow \alpha = 180°$

$3\alpha = 1080° - \alpha \rightarrow \alpha = 270°$

Los números son $1, i, -1, -i$.

128 ●●● **RETO.** Determina el número complejo que cumple que su cubo es un número real y que la parte real del mismo número es una unidad superior a la parte imaginaria.

$a = b + 1$

$(b + 1 + bi)^3 =$

$= -2b^3 + 6b^2i + 2b^3i + 3b + 3bi + 1$

$2b^3 + 6b^2 + 3b = 0 \rightarrow b(2b^2 + 6b + 3) = 0$

Los números son tres; 1,

$\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} + \dfrac{-3-\sqrt{3}}{2}i$, y

$\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} + \dfrac{-3+\sqrt{3}}{2}i$.

129 ●●● **RETO.** Calcula los números complejos que verifican que el cuadrado de su inverso es el opuesto de su conjugado.

$z = r_\alpha \rightarrow \left(\dfrac{1}{r_{-\alpha}}\right)^2 = r_{-\alpha+180°}$

$\dfrac{1}{r^2} = r \rightarrow r^3 = 1 \rightarrow r = 1$

$-2\alpha = -\alpha + 180° \rightarrow \alpha = 180° + k \cdot 360°$

Los números son $1_{180° + k \cdot 360°}$, $k \in Z$.

INTERNET

130 ●●○ **MATEMÁTICAS Y... ARTE.** Representa el número $1 + i$. Pásalo a forma polar, calcula sus 10 primeras potencias y represéntalas en el plano complejo. ¿Qué curva describen los afijos de esos números complejos?

$z = 1 + i = \sqrt{2}_{45°}$

$z^2 = 2_{90°}$

$z^3 = 2\sqrt{2}_{135°}$

$z^4 = 4_{180°}$

$z^5 = 4\sqrt{2}_{225°}$

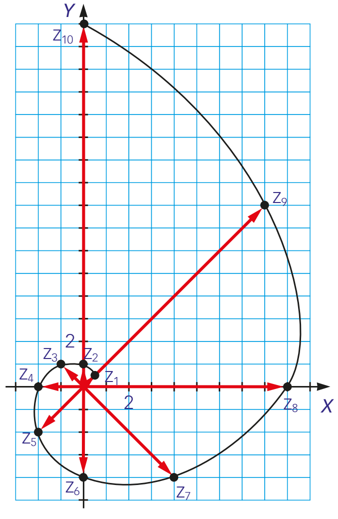
$z^6 = 8_{270°}$

$z^7 = 8\sqrt{2}_{315°}$

$z^8 = 16_{0°}$

$z^9 = 16\sqrt{2}_{45°}$

$z^{10} = 32_{90°}$



La curva obtenida al representar las potencias de z es la espiral áurea.

Raíces de números complejos

ACTIVIDADES FLASH

131 Calcula las siguientes raíces de números complejos.

a) $\sqrt{1}$ d) $\sqrt{i}$

b) $\sqrt[3]{1}$ e) $\sqrt[3]{i}$

c) $\sqrt[4]{1}$ f) $\sqrt[4]{i}$

a) $1_{\frac{0°+k\cdot 360°}{2}}$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = 1_{0°} = 1$

Si $k = 1 \rightarrow x_2 = 1_{180°} = -1$

b) $1_{\frac{0°+k\cdot 360°}{3}}$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = 1_{0°} = 1$

Si $k = 1 \rightarrow x_2 = 1_{120°}$

Si $k = 2 \rightarrow x_3 = 1_{240°}$

c) $1_{\frac{0°+k\cdot 360°}{4}}$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = 1_{0°} = 1$

Si $k = 1 \rightarrow x_2 = 1_{90°} = i$

Si $k = 2 \rightarrow x_3 = 1_{180°} = -1$

Si $k = 3 \rightarrow x_4 = 1_{270°} = -i$

d) $1_{\frac{90°+k\cdot 360°}{2}}$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = 1_{45°}$

Si $k = 1 \rightarrow x_2 = 1_{225°}$

e) $1_{\frac{90°+k\cdot 360°}{3}}$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = 1_{30°}$

Si $k = 1 \rightarrow x_2 = 1_{150°}$

Si $k = 2 \rightarrow x_3 = 1_{270°} = -i$

f) $1_{\frac{90°+k\cdot 360°}{4}}$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = 1_{22,5°}$

Si $k = 1 \rightarrow x_2 = 1_{112,5°}$

Si $k = 2 \rightarrow x_3 = 1_{202,5°}$

Si $k = 3 \rightarrow x_4 = 1_{292,5°}$

132 Calcula las siguientes raíces.

a) $\sqrt[3]{64_{120°}}$ c) $\sqrt[5]{32_{\frac{5\pi}{4}}}$

b) $\sqrt[5]{1_{150°}}$ d) $\sqrt[6]{64_{180°}}$

a) El módulo de las soluciones será 4.

Existirán tres argumentos.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{120° + 0\cdot 360°}{3} = 40°$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{120° + 1\cdot 360°}{3} = 160°$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{120° + 2\cdot 360°}{3} = 280°$$

Por tanto, las raíces son $4_{40°}$, $4_{160°}$, $4_{280°}$.

b) El módulo de las soluciones será 1.

Existirán cinco argumentos.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{150° + 0\cdot 360°}{5} = 30°$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{150° + 1\cdot 360°}{5} = 102°$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{150° + 2\cdot 360°}{5} = 174°$$

$$\text{Si } k = 3 \rightarrow \beta_4 = \frac{150° + 3\cdot 360°}{5} = 246°$$

$$\text{Si } k = 4 \rightarrow \beta_5 = \frac{150° + 4\cdot 360°}{5} = 318°$$

Por tanto, las raíces son $1_{30°}$, $1_{102°}$, $1_{174°}$, $1_{246°}$, $1_{318°}$.

c) El módulo de las soluciones será 2.

Existirán cinco argumentos.

Si $k = 0 \rightarrow \beta_1 = \dfrac{225° + 0 \cdot 360°}{5} = 45°$

Si $k = 1 \rightarrow \beta_2 = \dfrac{225° + 1 \cdot 360°}{5} = 117°$

Si $k = 2 \rightarrow \beta_3 = \dfrac{225° + 2 \cdot 360°}{5} = 189°$

Si $k = 3 \rightarrow \beta_4 = \dfrac{225° + 3 \cdot 360°}{5} = 261°$

Si $k = 4 \rightarrow \beta_5 = \dfrac{225° + 4 \cdot 360°}{5} = 333°$

Por tanto, las raíces son $2_{45°}$, $2_{117°}$, $2_{189°}$, $2_{261°}$, $2_{333°}$.

d) El módulo de las soluciones será 2.

Existirán seis agrumentos.

Si $k = 0 \rightarrow \beta_1 = \dfrac{180° + 0 \cdot 360°}{6} = 30°$

Si $k = 1 \rightarrow \beta_2 = \dfrac{180° + 1 \cdot 360°}{6} = 90°$

Si $k = 2 \rightarrow \beta_3 = \dfrac{180° + 2 \cdot 360°}{6} = 150°$

Si $k = 3 \rightarrow \beta_4 = \dfrac{180° + 3 \cdot 360°}{6} = 210°$

Si $k = 4 \rightarrow \beta_5 = \dfrac{180° + 4 \cdot 360°}{6} = 270°$

Si $k = 5 \rightarrow \beta_6 = \dfrac{180° + 5 \cdot 360°}{6} = 330°$

Por tanto, las raíces son $2_{30°}$, $2_{90°}$, $2_{150°}$, $2_{210°}$, $2_{270°}$, $2_{330°}$.

133 Halla las raíces y represéntalas.

a) $\sqrt[6]{-16}$ c) $\sqrt[3]{16i}$

b) $\sqrt[3]{-i}$ d) $\sqrt[5]{1 - \sqrt{3}\,i}$

a) $\sqrt[6]{16_{180°}}$

El módulo de las raíces será $\sqrt[3]{4}$.

Existirán seis argumentos.

Si $k = 0 \rightarrow \beta_1 = \dfrac{180° + 0 \cdot 360°}{6} = 30°$

Si $k = 1 \rightarrow \beta_2 = \dfrac{180° + 1 \cdot 360°}{6} = 90°$

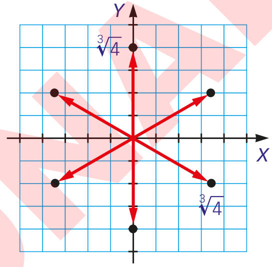
Si $k = 2 \rightarrow \beta_3 = \dfrac{180° + 2 \cdot 360°}{6} = 150°$

Si $k = 3 \rightarrow \beta_4 = \dfrac{180° + 3 \cdot 360°}{6} = 210°$

Si $k = 4 \rightarrow \beta_5 = \dfrac{180° + 4 \cdot 360°}{6} = 270°$

Si $k = 5 \rightarrow \beta_6 = \dfrac{180° + 5 \cdot 360°}{6} = 330°$

Por tanto, las raíces son $\sqrt[3]{4}_{30°}$, $\sqrt[3]{4}_{90°} = \sqrt[3]{4}\,i$, $\sqrt[3]{4}_{150°}$, $\sqrt[3]{4}_{210°}$, $\sqrt[3]{4}_{270°} = -\sqrt[3]{4}\,i$, $\sqrt[3]{4}_{330°}$.



b) $\sqrt[3]{1_{270°}}$

El módulo de las raíces será 1.

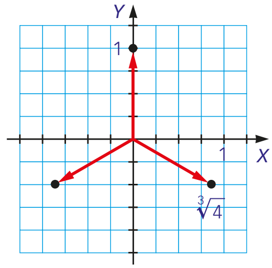
Existirán tres argumentos.

Si $k = 0 \rightarrow \beta_1 = \dfrac{270° + 0 \cdot 360°}{3} = 90°$

Si $k = 1 \rightarrow \beta_2 = \dfrac{270° + 1 \cdot 360°}{3} = 210°$

Si $k = 2 \rightarrow \beta_3 = \dfrac{270° + 2 \cdot 360°}{3} = 330°$

Por tanto, las raíces son $1_{90°}$, $1_{210°}$, $1_{330°}$.



c) $\sqrt[3]{16_{190°}}$

El módulo de las raíces será $2\sqrt[3]{2}$.

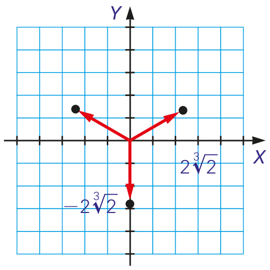
Existirán tres argumentos.

Si $k = 0 \rightarrow \beta_1 = \dfrac{90° + 0 \cdot 360°}{3} = 30°$

Si $k = 1 \rightarrow \beta_2 = \dfrac{90° + 1 \cdot 360°}{3} = 150°$

Si $k = 2 \rightarrow \beta_3 = \dfrac{90° + 2 \cdot 360°}{3} = 270°$

Por tanto, las raíces son $2\sqrt[3]{2}_{30°}$, $2\sqrt[3]{2}_{150°}$, $2\sqrt[3]{2}_{270°} = -2\sqrt[3]{2}\,i$.



d) $\sqrt[5]{2_{300°}}$

El módulo de las raíces será $\sqrt[5]{2}$.

Existirán cinco argumentos.

Si $k = 0 \rightarrow \beta_1 = \dfrac{300° + 0 \cdot 360°}{5} = 60°$

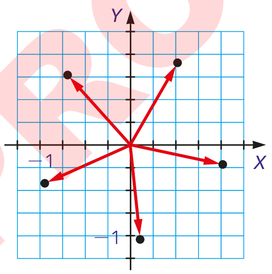
Si $k = 1 \rightarrow \beta_2 = \dfrac{300° + 1 \cdot 360°}{5} = 132°$

Si $k = 2 \rightarrow \beta_3 = \dfrac{300° + 2 \cdot 360°}{5} = 204°$

Si $k = 3 \rightarrow \beta_4 = \dfrac{300° + 3 \cdot 360°}{5} = 276°$

Si $k = 4 \rightarrow \beta_5 = \dfrac{300° + 4 \cdot 360°}{5} = 348°$

Por tanto, las raíces son $\sqrt[5]{2}_{60°}$, $\sqrt[5]{2}_{132°}$, $\sqrt[5]{2}_{204°}$, $\sqrt[5]{2}_{276°}$, $\sqrt[5]{2}_{348°}$.



134 Halla estas raíces.

a) $\sqrt[4]{1 - i}$ b) $\sqrt[3]{27\,(\cos 30° + i \,\text{sen}\, 30°)}$

a) $\left|\sqrt[4]{\sqrt{2}_{315°}}\right| = \sqrt[8]{2}$

Existen 4 argumentos:

$k = 0 \rightarrow \beta_1 = \dfrac{315° + 360° \cdot 0}{4} = 78{,}75°$

$k = 1 \rightarrow \beta_2 = \dfrac{315° + 360° \cdot 1}{4} = 168{,}75°$

$k = 2 \rightarrow \beta_3 = \dfrac{315° + 360° \cdot 2}{4} = 258{,}75°$

$k = 3 \rightarrow \beta_3 = \dfrac{315° + 360° \cdot 3}{4} = 348{,}75°$

Las raíces son $\sqrt[8]{2}_{78,75°}$, $\sqrt[8]{2}_{168,75°}$, $\sqrt[8]{2}_{258,75°}$ y $\sqrt[8]{2}_{348,75°}$.

b) $\left|\sqrt[3]{27_{30°}}\right| = \sqrt[3]{27} = 3$

Existen tres argumentos.

$k = 0 \rightarrow \beta_1 = \dfrac{30° + 360° \cdot 0}{3} = 10°$

$k = 1 \rightarrow \beta_2 = \dfrac{30° + 360° \cdot 1}{3} = 130°$

$k = 2 \rightarrow \beta_3 = \dfrac{30° + 360° \cdot 2}{3} = 250°$

Las raíces son $3_{10°}$, $3_{130°}$, $3_{250°}$.

135 Comprueba que las siguientes raíces suman cero.

a) Las raíces cuartas de $-1 + \sqrt{3}\,i$.

b) Las raíces sextas de 64.

a) Las soluciones de $\sqrt[4]{2_{120°}}$ son $\sqrt[4]{2}_{30°}$, $\sqrt[4]{2}_{120°}$, $\sqrt[4]{2}_{210°}$, $\sqrt[4]{2}_{300°}$.

$$\sqrt[4]{2}\,(\cos 30° + i \,\text{sen}\, 30°) + \sqrt[4]{2}\,(\cos 120° + i \,\text{sen}\, 120°) + \sqrt[4]{2}\,(\cos 210° + i \,\text{sen}\, 210°) + \sqrt[4]{2}\,(\cos 300° + i \,\text{sen}\, 300°) =$$

$$= \left(\sqrt[4]{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

b) Las soluciones de $\sqrt[6]{64}$ son $2_{0°}$, $2_{60°}$, $2_{120°}$, $2_{180°}$, $2_{240°}$, $2_{300°}$.

$$2(\cos 0° + i \,\text{sen}\, 0°) + 2(\cos 60° + i \,\text{sen}\, 60°) + 2(\cos 120° + i \,\text{sen}\, 120°) + 2(\cos 180° + i \,\text{sen}\, 180°) + 2(\cos 240° + i \,\text{sen}\, 240°) + 2(\cos 300° + i \,\text{sen}\, 300°) =$$

$$= 2\left(1 + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

136 Calcula las siguientes raíces.

a) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{i}}$

b) $\sqrt{\dfrac{-1+i}{1+i}}$

c) $\sqrt[3]{(2-i)^2-3(1-i)}$

a) $\sqrt[4]{16i}=\sqrt[4]{16_{270^\circ}}$

El módulo de las soluciones será 2.

Existirán tres argumentos.

Si $k=0\rightarrow$

$\rightarrow \beta_1=\dfrac{270^\circ+0\cdot 360^\circ}{4}=67{,}5^\circ$

Si $k=1\rightarrow$

$\rightarrow \beta_2=\dfrac{270^\circ+1\cdot 360^\circ}{4}=157{,}5^\circ$

Si $k=2\rightarrow$

$\rightarrow \beta_3=\dfrac{270^\circ+2\cdot 360^\circ}{4}=247{,}5^\circ$

Si $k=3\rightarrow$

$\rightarrow \beta_4=\dfrac{270^\circ+3\cdot 360^\circ}{4}=337{,}5^\circ$

Por tanto, las raíces son $2_{67{,}5^\circ}$, $2_{157{,}5^\circ}$, $2_{247{,}5^\circ}$, $2_{337{,}5^\circ}$.

b) $\sqrt{\dfrac{-1+i}{1+i}\cdot\dfrac{1-i}{1-i}}=\sqrt{i}=\sqrt{1_{90^\circ}}$

El módulo de las soluciones será 1.

Existirán dos argumentos.

Si $k=0\rightarrow \beta_1=\dfrac{90^\circ+0\cdot 360^\circ}{2}=45^\circ$

Si $k=1\rightarrow \beta_2=\dfrac{90^\circ+1\cdot 360^\circ}{2}=225^\circ$

Por tanto, las raíces son 1_{45°, 1_{225°.

c) $\sqrt[3]{-i}=\sqrt[3]{1_{270^\circ}}$

El módulo de las soluciones será 1.

Existirán tres argumentos.

Si $k=0\rightarrow \beta_1=\dfrac{270^\circ+0\cdot 360^\circ}{3}=90^\circ$

Si $k=1\rightarrow \beta_2=\dfrac{270^\circ+1\cdot 360^\circ}{3}=210^\circ$

Si $k=2\rightarrow \beta_3=\dfrac{270^\circ+2\cdot 360^\circ}{3}=330^\circ$

Por tanto, las raíces son 1_{90°, 1_{210°, 1_{330°.

137 **INVESTIGA.** Encuentra n y z de manera que dos de las soluciones de $\sqrt[n]{z}$ sean 6_{30° y 6_{120°. ¿Hay una única solución? ¿Cuál es el menor número n que puedes encontrar?

Sea $z=r_\alpha$, la raíz n-ésima de r debe ser 6.

El argumento debe ser múltiplo de 30 y de 120.

La solución no es única.

El menor número que cumple las condiciones es $n=4$.

$z_1=1\,296_{120^\circ}$

Otra solución es $n=8$.

$z_2=1\,679\,616_{240^\circ}$

138 Halla dos números complejos, z y w, tales que su suma sea i y $2i$ sea una raíz cuadrada de su cociente.

$z=a+bi$

$w=c+di$

$(a+bi)+(c+di)=i\rightarrow\begin{cases}a=-c\\ b=1-d\end{cases}$

$\sqrt{\dfrac{-c+(1-d)i}{c+di}}=2i\rightarrow$

$\rightarrow -c+(1-d)i=-4(c+di)\rightarrow$

$\rightarrow\begin{cases}c=0,\\ d=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$

Por tanto: $z=\dfrac{4}{3}i \qquad w=-\dfrac{1}{3}i$

139 **INVESTIGA.** Calcula el producto de las dos raíces de $\sqrt{1}$ y el producto de las tres raíces de $\sqrt[3]{1}$. ¿Cuánto vale el producto de las n raíces n-ésimas de la unidad?

Las raíces cuadradas de 1 son 1_{0°, 1_{180° y su producto es $1_{180^\circ}=-1$.

Las raíces cúbicas de 1 son 1_{0°, 1_{120°, 1_{240° y su producto es $1_{360^\circ}=1$.

El módulo del producto de las n raíces n-ésimas es 1.

El argumento del producto de las n raíces n-ésimas será:

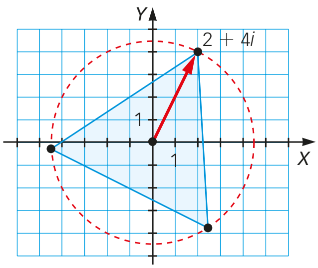
$$\frac{360°\cdot 0}{n}+\frac{360°\cdot 1}{n}+\ldots+\frac{360°\cdot (n-1)}{n}=$$

$$=\frac{360°}{n}\cdot(0+1+\ldots+(n-1))=$$

$$=\frac{360°\cdot n\cdot(n-1)}{2n}=180°\,(n-1)$$

El producto de las n raíces n-ésimas será $(-1)^{n+1}$.

140 Una de las raíces cúbicas de un número complejo es $2+4i$. Halla las otras dos.



Las otras dos raíces tendrán el mismo módulo.

$z_1 = 2+4i = \sqrt{20}_{63,44°}$

$z_2 = \sqrt{20}_{63,44°}\cdot 1_{120°} = \sqrt{20}_{183,44°}$

$z_3 = \sqrt{20}_{63,44°}\cdot 1_{240°} = \sqrt{20}_{303,44°}$

141 El número $3i$ es una raíz cúbica de un número complejo. Calcula las otras raíces y el número complejo.

$\sqrt[3]{z}=3i \rightarrow z=(3i)^3=-27i=27_{270°}$

Existen otros dos argumentos.

$$k=1\rightarrow \beta_1=\frac{270°+360°\cdot 1}{3}=210°$$

$$k=2\rightarrow \beta_2=\frac{270°+360°\cdot 2}{3}=330°$$

Las otras dos raíces son $3_{210°}$ y $3_{330°}$.

142 Sabiendo que $3-2i$ es una raíz cúbica de un número complejo z, halla z.

$\sqrt[3]{z}=3-2i\rightarrow$

$\rightarrow z=(3-2i)^3=-9-46i$

143 Los afijos de los complejos z_1 y z_2 forman con el origen de coordenadas un triángulo equilátero. Calcula z_2 sabiendo que $z_1=3+4i$.

$z_2=a+bi$

$$\left.\begin{array}{l}|z_1|=5\\ |z_2|=5\end{array}\right\}\rightarrow\sqrt{a^2+b^2}=5$$

$|z_2-z_1|=5\rightarrow$

$\rightarrow\sqrt{(a-3)^2+(b-4)^2}=5$

$$\left.\begin{array}{r}\sqrt{a^2+b^2}=5\\ \sqrt{(a-3)^2+(b-4)^2}=5\end{array}\right\}\rightarrow$$

$$\rightarrow\left.\begin{array}{r}a^2+b^2=25\\ a^2+b^2-6a-8b=0\end{array}\right\}\rightarrow$$

$$\rightarrow\left.\begin{array}{r}6a+8b=25\\ a^2+b^2=25\end{array}\right\}$$

$$\rightarrow a=\frac{25-8b}{6}\rightarrow$$

$\rightarrow 100b^2-400b-275=0\rightarrow$

$$\rightarrow\left\{\begin{array}{l}b_1=4{,}6\rightarrow a_1=-1{,}97\\ b_2=-0{,}6\rightarrow a_2=4{,}97\end{array}\right.$$

Hay dos soluciones:

$$\rightarrow\begin{array}{l}z_2=-1{,}97+4{,}6i\\ z_2'=4{,}97-0{,}6i\end{array}$$

144 **RETO.** Halla un número complejo tal que su afijo forme un triángulo equilátero con el de su conjugado y el de -5.

Sea L la longitud del lado del triángulo equilátero, uno de los vértices es el número complejo $a+bi$ y el otro vértice es su conjugado, $a-bi$.

$$b=L\cdot sen\ 30°=\frac{L}{2}$$

$$a=-5+L\cdot cos\ 30°=-5+\frac{L\cdot\sqrt{3}}{2}$$

El número complejo es $\left(-5+\frac{L\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{L}{2}i$.

Todos los triángulos tienen -5 como el vértice situado más a la izquierda.

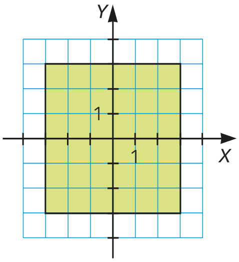
Si el vértice -5 estuviera situado a la derecha del triángulo, el número complejo sería:

$$b=L\cdot sen\ 30°=\frac{L}{2}$$

$a = -5 - L \cdot \cos 30° = -5 + \dfrac{L \cdot \sqrt{3}}{2}$

El número complejo es $\left(-5 - \dfrac{L\sqrt{3}}{2}\right) + \dfrac{L}{2}i.$

145 ●○○ Los vértices del polígono representado son las raíces cuartas de un número complejo.



Determina el número y sus raíces.

Las raíces son:

$z_1 = 3 + 3i = 3\sqrt{2}_{45°}$

$z_2 = -3 + 3i = 3\sqrt{2}_{135°}$

$z_3 = -3 - 3i = 3\sqrt{2}_{225°}$

$z_4 = 3 - 3i = 3\sqrt{2}_{315°}$

El número es:

$z = 324_{180°} = -324$

146 ●●○ Un cuadrado con centro en el origen de coordenadas tiene un vértice en el afijo del complejo $2 + 3i$. Halla los otros tres vértices y el área del cuadrado.

$\left|\sqrt{2^2 + 3^2}\right| = \sqrt{13}$

$\alpha = arc\ tg\left(\dfrac{3}{2}\right) = 56{,}31°$

Los vértices son:

$\sqrt{13}_{56,31°} = (2, 3)$

$\sqrt{13}_{146,31°} = (-3, 2)$

$\sqrt{13}_{236,31°} = (-2, -3)$

$\sqrt{13}_{326,31°} = (3, -2)$

El área del cuadrado es $\left(2\sqrt{13}\right)^2 = 52$ u².

147 ●●○ Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean $3 + i$ y $3 - i$. Haz lo mismo con $-2 - 5i$ y $-2 + 5i$.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$(x - 3 + i)(x - 3 - i) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - 3x - ix - 3x + 9 + 3i + ix -$
$- 3i + 1 = 0 \rightarrow x^2 - 6x + 10 = 0$

$(x + 2 + 5i)(x + 2 - 5i) = 0 \rightarrow$
$\rightarrow x^2 + 2x - 5ix + 2x + 4 - 10i + 5ix +$
$+ 10i + 25 = 0 \rightarrow x^2 + 4x + 29 = 0$

148 ●●○ Halla las coordenadas de los vértices de un hexágono regular, con centro el origen de coordenadas, sabiendo que uno de sus vértices es el afijo del número complejo $3_{180°}$.

V_1: $3_{180°} = (-3, 0)$

V_2: $3_{180° + 60°} = 3_{240°} = \left(\dfrac{-3}{2}, \dfrac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$

V_3: $3_{240° + 60°} = 3_{300°} = \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$

V_4: $3_{300° + 60°} = 3_{0°} = (3, 0)$

V_5: $3_{0° + 60°} = 3_{60°} = \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

V_6: $3_{60° + 60°} = 3_{120°} = \left(\dfrac{-3}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

149 ●●● Un pentágono regular, con centro en el origen, tiene uno de sus vértices en $(-3, -2)$. Obtén los demás vértices, usando números complejos.

$-3 - 2i = \sqrt{13}_{213,69°}$

Elevamos a la quinta: $z = \sqrt{13^5}_{348,45°}$

Calculamos el resto de las raíces:

$\sqrt{13}_{\frac{348,45° + k \cdot 360°}{5}}$

Si $k = 0 \rightarrow z_1 = \sqrt{13}_{69,69°}$

Si $k = 1 \rightarrow z_2 = \sqrt{13}_{141,69°}$

Si $k = 2 \rightarrow z_3 = \sqrt{13}_{213,69°}$

Si $k = 3 \rightarrow z_4 = \sqrt{13}_{285,69°}$

Si $k = 4 \rightarrow z_5 = \sqrt{13}_{357,69°}$

150 ●●● **RETO.** Sea $u = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. Comprueba que si $z = -2 + 5i$, entonces z, $u \cdot z$ y $u^2 \cdot z$ son las tres raíces cúbicas de un número complejo. Demuestra que eso sucede para cualquier número z. ¿Qué tiene de particular el número u?

$u = 1_{120°}$

$z = \sqrt{29}_{291,8°}$

$u \cdot z = 1_{120°} \cdot \sqrt{29}_{291,8°} = \sqrt{29}_{51,8°}$

$u^2 \cdot z = (1_{120°})^2 \cdot \sqrt{29}_{291,8°} =$

$= 1_{240°} \cdot \sqrt{29}_{291,8°} = \sqrt{29}_{171,8°}$

Son las raíces cúbicas de $29\sqrt{29}_{155,4°}$.

Esto sucede para cualquier número complejo, ya que las raíces cúbicas de un número complejo tienen el mismo módulo y su argumento se diferencia en 120°.

Al multiplicar cualquier número por u, su módulo varía y su argumento aumenta 120°.

151 Calcula todas las soluciones complejas de las ecuaciones.

a) $x^5 + 1 = 0$

b) $x^4 - 625 = 0$

c) $x^5 - 1 = 0$

d) $x^4 + 16 = 0$

a) $x = \sqrt[5]{-1} = \sqrt[5]{1_{180°}}$

El módulo de las soluciones será 1.

Existirán cuatro argumentos.

$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \dfrac{180° + 0 \cdot 360°}{5} = 36°$

$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \dfrac{180° + 1 \cdot 360°}{5} = 108°$

$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \dfrac{180° + 2 \cdot 360°}{5} = 180°$

$\text{Si } k = 3 \rightarrow \beta_4 = \dfrac{0° + 3 \cdot 360°}{5} = 252°$

$\text{Si } k = 4 \rightarrow \beta_5 = \dfrac{180° + 3 \cdot 360°}{5} = 324°$

Por tanto, las raíces son $1_{36°}$, $1_{108°}$, $1_{180°}$, $1_{252°}$, $1_{324°}$.

b) $x = \sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{625_{0°}}$

El módulo de las soluciones será 5.

Existirán cuatro argumentos.

$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \dfrac{0° + 0 \cdot 360°}{4} = 0°$

$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \dfrac{0° + 1 \cdot 360°}{4} = 90°$

$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \dfrac{0° + 2 \cdot 360°}{4} = 180°$

$\text{Si } k = 3 \rightarrow \beta_4 = \dfrac{0° + 3 \cdot 360°}{4} = 270°$

Por tanto, las raíces son $5_{0°}$, $5_{90°}$, $5_{180°}$, $5_{270°}$.

c) $x = \sqrt[5]{1} = \sqrt[5]{1_{0°}}$

El módulo de las soluciones será 1.

Existirán cinco argumentos.

$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \dfrac{0° + 0 \cdot 360°}{5} = 0°$

$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \dfrac{0° + 1 \cdot 360°}{5} = 72°$

$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \dfrac{0° + 2 \cdot 360°}{5} = 144°$

$\text{Si } k = 3 \rightarrow \beta_4 = \dfrac{0° + 3 \cdot 360°}{5} = 216°$

$\text{Si } k = 4 \rightarrow \beta_5 = \dfrac{0° + 4 \cdot 360°}{5} = 288°$

Por tanto, las raíces son $1_{0°}$, $1_{72°}$, $1_{144°}$, $1_{216°}$, $1_{288°}$.

d) $x = \sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16_{180°}}$

El módulo de las soluciones será 2.

Existirán cuatro argumentos.

$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \dfrac{180° + 0 \cdot 360°}{4} = 45°$

$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \dfrac{180° + 1 \cdot 360°}{4} = 135°$

$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \dfrac{180° + 2 \cdot 360°}{4} = 225°$

$\text{Si } k = 3 \rightarrow \beta_4 = \dfrac{180° + 3 \cdot 360°}{4} = 315°$

Por tanto, las raíces son $2_{45°}$, $2_{135°}$, $2_{225°}$, $2_{315°}$.

152 **INVENTA.** Escribe una ecuación de segundo grado con coeficientes reales que tenga por soluciones estos números complejos.

a) $1 - i$

b) $3 - 2i$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) Como $1 - i$ es solución, entonces $1 + i$ también lo es.

$(x - (1 + i))(x - (1 - i)) = x^2 - 2x + 2$

b) Como $3-2i$ es solución, entonces $3+2i$ también lo es.
$(x-(3+2i))(x-(3-2i)) = x^2-6x+13$

153 Calcula el valor de m para que el polinomio x^2-6x-m tenga la raíz $3-i$. Halla la raíz que falta.

$(3-i)^2-6(3-i)-m=0 \rightarrow$
$\rightarrow 8-6i-18+6i=m \rightarrow m=-10$

La raíz que falta es $3+i$.

154 Calcula el valor de los números complejos p y q para que el polinomio x^3+px^2+qx-2 tenga las raíces i y $2i$. Halla la raíz que falta.

$(x-i)(x-2i) = x^2-3xi-2$

$(x^2-3xi-2)(x-a) = x^3+(-a-3i)x^2+$
$+(-2+3ia)x+2a \rightarrow a=-1$

$p = 1-3i$

$q=-2-3i$

La raíz que falta es $x=a=-1$.

155 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $x^2+ix+1=0$

b) $x^2-2x+3i=0$

c) $ix^2+7x-12i=0$

d) $ix^3+27=0$

a) $x=\dfrac{-i\pm\sqrt{-1-4}}{2}=\dfrac{-i\pm\sqrt{5}\,i}{2}\rightarrow$

$\rightarrow x_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}i \qquad x_2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}i$

b) $x=\dfrac{2\pm\sqrt{4-12i}}{2}=\dfrac{2\pm2\sqrt{1-3i}}{2}\rightarrow$

$\rightarrow x_1=1+\sqrt{1-3i} \qquad x_2=1-\sqrt{1-3i}$

c) $x=\dfrac{-7\pm\sqrt{49-48}}{2i}=\dfrac{-7\pm1}{2i}\rightarrow$

$\rightarrow x_1=3i \qquad x_2=4i$

d) $x^3=\dfrac{-27}{i}=27i\rightarrow x=\sqrt[3]{27_{90^\circ}}$

El módulo de las soluciones 3.

Existirán tres argumentos.

Si $k=0\rightarrow\beta_1=\dfrac{90^\circ+0\cdot360^\circ}{3}=30^\circ$

Si $k=1\rightarrow\beta_2=\dfrac{90^\circ+1\cdot360^\circ}{3}=150^\circ$

Si $k=2\rightarrow\beta_3=\dfrac{90^\circ+2\cdot360^\circ}{3}=270^\circ$

Por tanto, $x_1=3_{30^\circ}$, $x_2=3_{150^\circ}$, $x_3=3_{270^\circ}$.

156 Calcula para qué valores de a y b se cumple que la ecuación $z^3+az^2+bz-6i=0$ tiene por soluciones 2 y 3. Halla el resto de soluciones.

$\left.\begin{array}{r}8+4a+2b-6i=0\\27+9a+3b-6i=0\end{array}\right\}\rightarrow$

$\rightarrow a=-5-i \qquad b=6+5i$

$z^3-(5+i)z^2+(6+5i)z-6i=$
$=(z-3)(z-2)(z-c)=$
$=z^3-cz^2-5z^2+5zc+6z-6c\rightarrow$
$\rightarrow c=i$

La otra raíz es $z=i$.

157 Resuelve en los números complejos las ecuaciones.

a) $z^2-2z-2+4i=0$

b) $z^4+(4-2i)z^2-8i=0$

c) $z^4+10z^2+169=0$

a) $z=\dfrac{2\pm\sqrt{4-4(-2+4i)}}{2}=$
$=1\pm\sqrt{3-4i}=$
$=1\pm\sqrt{5}_{306,87^\circ}=$
$=1\pm(-2+i)$

$z_1=-1+i \qquad z_2=3-i$

b) $t^2+(4-2i)t-9i=0\rightarrow$

$\rightarrow t=\dfrac{-4+2i\pm\sqrt{12+16i}}{2}=$
$=-2+i\pm\sqrt{3+4i}=$
$=-2+i\pm\sqrt{5}_{53,13^\circ}=$
$=-2+i\pm(-2-i)$

$t_1=2i \qquad t_2=-4$

$z_1=\sqrt{2}_{\frac{90^\circ}{2}}=1+i$

$z_2=\sqrt{2}_{\frac{90^\circ+360^\circ}{2}}=-1-i$

$z_3=\sqrt{4}_{\frac{180^\circ}{2}}=2i$

$z_4=\sqrt{4}_{\frac{180^\circ+360^\circ}{2}}=-2i$

c) $t^2 + 10t + 169 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow t = \dfrac{-10 \pm \sqrt{100 - 676}}{2} =$

$= -5 \pm 12i$

$t_1 = -5 + 12i \qquad t_2 = -5 - 12i$

$z_1 = \sqrt{13}_{56,31°} = 2 + 3i$

$z_2 = \sqrt{13}_{236,31°} = -2 - 3i$

$z_3 = \sqrt{13}_{123,69°} = -2 + 3i$

$z_4 = \sqrt{13}_{303,69°} = 2 - 3i$

158 ●●○ Escribe una ecuación de grado cuatro cuyas soluciones sean $3 + i$, $3 - i$, con $-2 - 5i$ y $-2 + 5i$.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$(x - 3 - i) \cdot (x - 3 + i) \cdot (x + 2 + 5i) \cdot$
$\cdot (x + 2 - 5i) = 0$

$((x - 3)^2 + 1)((x + 2)^2 + 25)) = 0$

$(x^2 - 6x + 10)(x^2 + 4x + 29) = 0$

$x^4 - 2x^3 + 15x^2 - 134x + 290 = 0$

159 ●●○ El número 1 es solución de la ecuación $z^3 + 2z^2 - 3 = 0$. Halla las otras dos soluciones.

	1	2	0	−3
1		1	3	3
	1	3	3	0

$z^2 - 3z + 3 = 0 \rightarrow z = \dfrac{3 \pm \sqrt{-3}}{2} \rightarrow$

$\rightarrow z_1 = \dfrac{3 + \sqrt{3}\,i}{2} \qquad z_2 = \dfrac{3 - \sqrt{3}\,i}{2}$

160 ●●● El número $2 + 3i$ es una de las soluciones de la ecuación $z^3 - 5z^2 + 17z - 13 = 0$. Calcula las otras dos soluciones.

Si $2 + 3i$ es solución, también lo es $2 - 3i$.

$(z - 2 - 3i)(z - 2 + 3i) = z^2 - 4z + 13$

$\dfrac{z^3 - 5z^2 + 17z - 13}{z^2 - 4z + 13} = z - 1 \rightarrow$

$\rightarrow z - 1 = 0 \rightarrow z = 1$

Las otras dos soluciones son $2 - 3i$ y 1.

161 ●●● Resuelve las siguientes ecuaciones con números complejos.

a) $\dfrac{z}{5 - i} + (2 - i)6i = -3 + 2i$

b) $z(-2 + 6i) + \dfrac{-41 + 37i}{4 - 3i} + 10 - 8i =$
$= z(1 + 7i)$

a) $\dfrac{z}{5 - 1} + 6 + 12i = -3 + 2i \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{z}{5 - i} = -9 - 10i \rightarrow$

$\rightarrow z = (5 - i)(-9 - 10i) \rightarrow$

$\rightarrow z = -55 - 41i$

b) $z(1 + 7i) \rightarrow z(-2 + 6i) - 11 + i +$
$+ 10 - 8i = z(1 + 7i) \rightarrow$

$\rightarrow z(-2 + 6i) - 1 - 7i = z(1 + 7i)$

$\rightarrow z(-2 + 6i) - z(1 + 7i) = 1 + 7i \rightarrow$

$\rightarrow z(-2 + 6i - 1 - 7i) = 1 + 7i$

$\rightarrow z = \dfrac{1 + 7i}{-3 - i} \rightarrow z = -1 - 2i$

INTERNET

162 ●●● **MATEMÁTICAS E… HISTORIA.** En la Exposición Universal de París de 1937, en la entrada del pabellón de Matemáticas había un enorme rótulo con esta fórmula:

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

¿Por qué se eligió esta fórmula?

a) Demuestra esta igualdad a partir de la fórmula de Euler: $\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha = e^{\alpha i}$.

b) Calcula el módulo de $e^{\alpha i}$ usando la expresión trigonométrica de un número complejo de módulo m y argumento α.

Se eligió esta fórmula porque es considerada la igualdad más bella, que relaciona cinco de los números más importantes y representativos de las matemáticas: 0, 1, e, i y π. Querían dar a entender que la exposición iba a ser igual de bella y maravillosa.

a) $e^{\pi i} = \cos\pi + i \operatorname{sen}\pi = -1 \rightarrow$

$\rightarrow e^{\pi i} + 1 = -1 + 1 = 0$

b) $z = m(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha) \rightarrow z = me^{\alpha i} \rightarrow$

$\rightarrow |z| = |me^{\alpha i}| \rightarrow m = m|e^{\alpha i}| \rightarrow$

$\rightarrow |e^{\alpha i}| = 1$

Esta actividad puede utilizarse para trabajar el ODS 9, industria, innovación e infraestructura.

163 ●●● **RETO.** Indica una solución compleja de la ecuación $z^6 + z^3 + 1 = 0$ cuyo argumento esté entre 90° y 180°.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Realizamos el cambio de variable: $s = z^3$.

$$s^2 + s + 1 = 0 \rightarrow s = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$$

$$z = \sqrt[3]{s} \xrightarrow{s = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} |s| = 1 \rightarrow \sqrt[3]{1} = 1 \\ \alpha = arc\,tg\left(-\sqrt{3}\right) = 120° \end{cases}$$

$$k = 1 \rightarrow \beta = \frac{120° + 360° \cdot 1}{3} = 160° \rightarrow$$

$$\rightarrow z_1 = 1_{160°}$$

164 ●●● **RETO.** Dada la ecuación $z^2 + (a + bi)z + c + di = 0$, con a, b, c y d números reales, encuentra la relación entre ellos para que sus raíces tengan el mismo argumento.

$$z = \frac{-a - bi \pm \sqrt{(a+bi)^2 - 4(c+di)}}{2} =$$

$$= \frac{-a - bi \pm \sqrt{a^2 - b^2 + 2abi - 4c - 4di}}{2}$$

Para que tengan el mismo argumento, el cociente entre la parte imaginaria y la parte entera deben coincidir.

$$a^2 - b^2 + 2abi - 4c - 4di = 0$$

$$\left.\begin{aligned} a^2 - b^2 - 4c &= 0 \\ 2ab - 4d &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Como solo tenemos dos ecuaciones y cuatro incógnitas dejamos dos de las incógnitas en función de las otras.

$$a_1 = \frac{\left(\sqrt{2c^2 + 2d^2} + \sqrt{2}\,c\right)\sqrt{\sqrt{c^2 + d^2} - c}}{d}$$

$$a_2 = -\frac{\left(\sqrt{2c^2 + 2d^2} + \sqrt{2}\,c\right)\sqrt{\sqrt{c^2 + d^2} - c}}{d}$$

$$a_3 = \frac{\sqrt{\sqrt{c^2 + d^2} + c}\left(\sqrt{2c^2 + 2d^2} - \sqrt{2}\,c\right)i}{d}$$

$$a_4 = \frac{\sqrt{-\sqrt{c^2 + d^2} + c}\left(\sqrt{2c^2 + 2d^2} - \sqrt{2}\,c\right)i}{d}$$

$$b_1 = \sqrt{2\sqrt{c^2 + d^2} - 2c}$$

$$b_2 = -\sqrt{2\sqrt{c^2 + d^2} - 2c}$$

$$b_3 = -\sqrt{2\sqrt{c^2 + d^2} + 2ci}$$

$$b_4 = \sqrt{2\sqrt{c^2 + d^2} + 2ci}$$

FAKE NEWS

¿Nos visitan desde lejos?

A las 20:32 h de ayer, el radar de Torrecolina detectó una presencia anómala situada a 4 km al sur y 6 km al este. Los habitantes de la zona aseguraron ver un destello en el cielo.

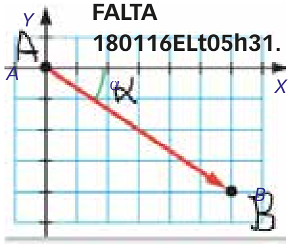
El piloto de una avioneta que sobrevolaba la zona en ese momento confirmó que no vio nada. Según su carta de navegación, volaba en dirección al radar con un ángulo de 330° y estaba situado a unos 7 km de distancia.

Las autoridades han comenzado a investigar este extraño hecho y no descartan la hipótesis de que pueda tratarse de una nave proveniente del espacio exterior.

Y tú, ¿qué opinas?

Consideramos como origen de coordenadas la posición del radar, A, y situamos el destello reportado por los habitantes en el punto B. Podemos calcular la distancia desde A hasta B y el ángulo α.

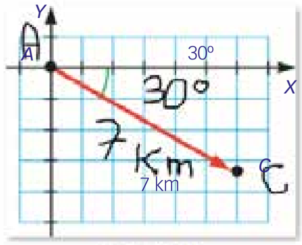
FALTA 180116ELt05h31.



$$d^2 = 4^2 + 6^2 = 52 \rightarrow d = 7{,}2\text{ km}$$

$$tg\alpha = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \rightarrow \alpha = 33{,}7°$$

A continuación representamos la posición de la avioneta, *C*. Se observa que ambas posiciones prácticar



FALTA 180116ELt05h30.

Por tanto, es bastante probable que el destello en el cielo que vieron los habitantes de Torrecolina fuese en realidad la avioneta quesobrevolaba la zona.

PROBLEMAS APARENTEMENTE DISTINTOS

165 Calcula el módulo del número complejo $z = 0{,}8 + 0{,}4i$.

$|z| = \sqrt{0{,}8^2 + 0{,}4^2} = 0{,}894$

166 La impedancia mide la oposición que presenta un circuito a una corriente. Se calcula hallando el módulo de un número complejo cuya parte real es la resistencia, y su parte imaginaria, la reactancia.
En un circuito con una resistencia de 0,8 ohmios y una reactancia de 0,4 ohmios, ¿cuál es la impedancia?

$z = 0{,}8 + 0{,}4i \rightarrow$
$\rightarrow |z| = \sqrt{0{,}8^2 + 0{,}4^2} = 0{,}894\ \Omega$

167 Multiplica $z_1 = 500_{45°}$ y $z_2 = 100 + 100i$.

a) Indica el resultado en forma binómica.

b) ¿En qué cuadrante se encuentra el producto?

a) $z_1 \cdot z_2 = 500_{45°} \cdot 100\sqrt{2}_{45°} =$
$= 50\,000\sqrt{2}_{90°} = 50\,000\sqrt{2}\ i$

b) Se encuentra en el eje *Y*.

168 En un videojuego, el personaje se encuentra a 500 m del centro del mapa y en 45° dirección nordeste. Se desplaza multiplicando su actual posición por $z = 100 + 100i$. ¿A qué posición va?
¿Qué punto cardinal es?

Sea su posición actual $z' = 500_{45°}$.

$z' \cdot z = 500_{45°} \cdot 100\sqrt{2}_{45°} =$
$= 50\,000\sqrt{2}_{90°} = 50\,000\sqrt{2}\ i$

Va a $50\,000\sqrt{2}$ km del centro hacia el sur.

169 Sea la progresión $z_i = z_{i-1} \cdot (i + 1)$ con $z_0 = i + 2$.

a) Calcula todos los z_i tales que $|z_i| < 10$.

b) Dibuja todos esos puntos en un plano.

a) $z_0 = i + 2 \rightarrow |z_0| = \sqrt{5}$

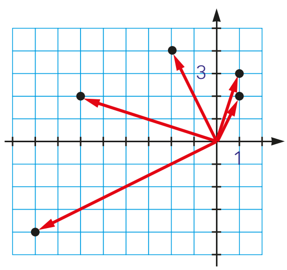
$z_1 = (i + 2)(i + 1) = 1 + 3i \rightarrow$
$\rightarrow |z_1| = \sqrt{10}$

$z_2 = (1 + 3i)(i + 1) = -2 + 4i \rightarrow$
$\rightarrow |z_2| = \sqrt{20}$

$z_3 = (-2 + 4i)(i + 1) = -6 + 2i \rightarrow$
$\rightarrow |z_3| = \sqrt{40}$

$z_4 = (-6 + 2i)(i + 1) = -8 - 4i \rightarrow$
$\rightarrow |z_4| = \sqrt{80}$

b)



170 Para dibujar el logotipo de una empresa, formado por puntos, se han utilizado números complejos. El primer punto es $z_0 = i + 2$, y los siguientes, $z_i = z_{i-1} \cdot (i + 1)$.

a) Si el logotipo mide 10 cm de radio, ¿cuántos puntos lo forman?

b) Dibuja el logotipo.

a) $z_0 = i + 2 \rightarrow |z_0| = \sqrt{5}$

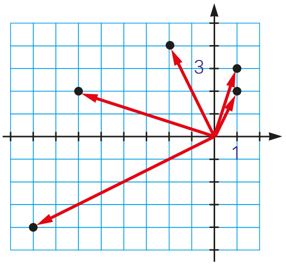
$z_1 = (i + 2)(i + 1) = 1 + 3i \rightarrow$
$\rightarrow |z_1| = \sqrt{10}$

$z_2 = (1 + 3i)(i + 1) = -2 + 4i \rightarrow$
$\rightarrow |z_2| = \sqrt{20}$

$z_3 = (-2 + 4i)(i + 1) = -6 + 2i \rightarrow$
$\rightarrow |z_3| = \sqrt{40}$

$z_4 = (-6 + 2i)(i + 1) = -8 - 4i \rightarrow$
$\rightarrow |z_4| = \sqrt{80}$

b)



¿PARA QUÉ SIRVE...?

1 ¿Qué es un circuito eléctrico y por qué elementos está formado?

Es un camino cerrado por donde circula la corriente. Está formado por componentes eléctricos conectados entre sí para generar, transportar o modificar señales eléctricas.

2 ¿Qué son la impedancia y la admitancia de un circuito eléctrico?

La impedancia de un circuito es la oposición de un conductor al flujo de una corriente alterna.

La admitancia de un circuito es la facilidad que este ofrece al paso de la corriente.

3 ¿Qué relación numérica existe entre la impedancia y la admitancia?

Son inversas la una de la otra.

INTERNET

4 Averigua las aplicaciones de la impedancia y la admitancia. Por ejemplo, ¿qué es la impedancia del cuerpo humano? ¿Qué importancia crees que tiene?

Mide la resistencia de los tejidos al paso de una corriente eléctrica. Permite obtener información sobre los tejidos tales como hidratación, porcentaje de grasa...

5 Si un circuito eléctrico tiene una impedancia de $Z = 3 + 4j$, determina su magnitud a partir del módulo del número complejo y calcula la admitancia en siemens como un número complejo.

$|z| = 5\ \Omega$

$Y = \dfrac{1}{3 + 4j} = \dfrac{3 - 4j}{25}\ \text{S}$

6 En un circuito eléctrico la admitancia es 0,25 S. Calcula su impedancia.

$Z = \dfrac{1}{0{,}25} = 4\ \Omega$

7 Multiplica el numerador y el denominador en la expresión de la admitancia (Y) por $R - Xj$ para obtener la parte real de la admitancia, conocida como conductancia, y la parte imaginaria, conocida como susceptancia.

$Y = \dfrac{1}{3 + 4j} = \dfrac{3 - 4j}{25}\ \text{S}$

Conductancia $= \dfrac{3}{25}\ \text{S}$

Susceptancia $= \dfrac{-4}{25}\ \text{S}$

8 Calcula la conductancia y la susceptancia de un circuito eléctrico que tiene una impedancia de $Z = 6 - 4j$.

$Y = \dfrac{1}{6 - 4j} = \dfrac{6 + 4j}{52}\ \text{S}$

Conductancia $= \dfrac{6}{52} = \dfrac{3}{26}\ \text{S}$

Susceptancia $= \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}\ \text{S}$