ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

1.- Sea α un ángulo del primer cuadrante, sin hallar el ángulo calcula:

a) Si tg α = 2/5 halla tg($\pi/2 - \alpha$), tg($\pi - \alpha$), tg($\pi/2 + \alpha$), tg($\pi + \alpha$), tg($-\alpha$) y tg($3\pi/2 - \alpha$).

b) Si sen α = 3/4 halla sen($\pi/2 - \alpha$), sen($\pi - \alpha$), sen($\pi/2 + \alpha$), sen($\pi + \alpha$), sen($-\alpha$), sen($3\pi/2 - \alpha$) y sen($3\pi/2 + \alpha$)

c) Si cos α = 2/3 halla cos($\pi/2 - \alpha$), cos($\pi - \alpha$), cos($\pi/2 + \alpha$), cos($\pi + \alpha$), cos($-\alpha$), cos($3\pi/2 - \alpha$) y cos($3\pi/2 + \alpha$).

(Sol: a) 5/2; -2/5; 2/5; -2/5 y 5/2

b) $\frac{\sqrt{7}}{4}$; 3/4; $\frac{\sqrt{7}}{4}$; -3/4; -3/4; $-\frac{\sqrt{7}}{4}$ y $-\frac{\sqrt{7}}{4}$

c) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; -2/3; $-\frac{\sqrt{5}}{3}$; -2/3; 2/3; $-\frac{\sqrt{5}}{3}$ y $\frac{\sqrt{5}}{3}$)

2. Sabiendo que senα = 1/4, halla sen(2α), cos(2α) y tg(2α) sin calcular el ángulo α.

(Sol: $\sqrt{15}$ / 8; 7/ 8 y $\sqrt{15}$ / 7).

3. Sabiendo que cosα = 0,35, halla sen(α/2), cos(α/2) y tg(α/2) sin calcular el ángulo α.

(Sol: ± 0,57; ± 0,82 y 0,69).

4. Dado a un ángulo del 3º cuadrante tal que tg a= $\frac{\sqrt{3}}{3}$ halla las razones trigonométricas del ángulo 2a.

(Sol: sen(2a)= $\sqrt{3}$ /2, cos(2a)=1/2, tg(2a) = $\sqrt{3}$)

5. Sabiendo que tg(2a) = $\sqrt{3}$ y 2a es un ángulo del tercer cuadrante, halla sena y cosa. ¿De qué ángulo a se trata?

(Sol: sen a = $\sqrt{3}$ /2, cosa = -1/2, a = 120°)

6. Comprueba si son ciertas las siguientes igualdades:

a) $\frac{tg\alpha}{1+\sec\alpha} - \frac{tg\alpha}{1-\sec\alpha} = \frac{2}{sen\alpha}$ b) $\frac{sen\alpha + \cos\alpha \cdot tg\alpha}{\cos\alpha} = 2tg\alpha$ c) $\frac{\sec^4\alpha - 1}{tg^2\alpha} = \sec^2\alpha + 1$

d) $\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha - sen\alpha} = \frac{\cos\alpha\cdot(\cos\alpha - sen\alpha)}{1-2sen\alpha\cdot\cos\alpha}$ e) $\frac{2\cos^2\alpha - sen^2\alpha + 1}{\cos\alpha} = 3\cos\alpha$

f) $\frac{\cos\alpha}{1-sen\alpha} - \frac{1+sen\alpha}{\cos\alpha} = 0$ g) $\frac{\cos ec\alpha - sen\alpha}{ctg\alpha} - \frac{ctg\alpha}{\cos ec\alpha} = 0$ h) $\frac{\sec\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{\sec\alpha + 1}{sen^2\alpha}$

i) $(\sec\alpha - tg\alpha)\cdot(\cos ec\alpha + 1) = ctg\alpha$ j) $(sen^2\alpha - \cos^2\alpha) = sen^4\alpha - \cos^4\alpha$

(Sol: Son todas ciertas)

d) $\cos\alpha\cdot(1-2\,sen\,\alpha\cos\alpha) = \cos\alpha\cdot(\cos\alpha - sen\,\alpha)^2$ Es equivalente

$1-2\,sen\,\alpha\cos\alpha = (\cos\alpha - sen\,\alpha)^2$ Es equivalente

$(\cos\alpha - sen\,\alpha)^2 = \cos^2\alpha + sen^2\alpha - 2\,sen\,\alpha\cos\alpha = 1-2\,sen\,\alpha\cos\alpha$ Queda demostrada la igualdad

7. Demostrar las siguientes identidades:

a) $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{sen^2\alpha+\cos 2\alpha}=2\,tg^2\alpha$

b) sen 2α cos α – sen α cos 2α = sen α

c) $1-sen\,\alpha=\left(sen\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)-\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\right)^2$

d) $\cos(2\alpha)+2\,sen^2\alpha=1$

$$\cos(2\alpha)+2\,sen^2\alpha=\cos^2\alpha-sen^2\alpha+2\,sen^2\alpha=\cos^2\alpha+sen^2\alpha=1$$

e) $\dfrac{sen\,\alpha+sen(2\alpha)}{1+\cos\alpha+\cos(2\alpha)}=tg\,\alpha$

$$\frac{sen\,\alpha+sen(2\alpha)}{1+\cos\alpha+\cos(2\alpha)}=\frac{sen\,\alpha+2\,sen\,\alpha\cos\alpha}{1+\cos\alpha+\cos^2\alpha-sen^2\alpha}=\frac{sen\,\alpha(1+2\cos\alpha)}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha}=\frac{sen\,\alpha(1+2\cos\alpha)}{\cos\alpha(1+2\cos\alpha)}=tg\,\alpha$$

f) $\left(\dfrac{tg^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}{sen\,\alpha}-2\,sen^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\right)\cdot\cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{1-\cos\alpha}{2\,sen\,\alpha}-\dfrac{sen^2\alpha}{2}$

$$\left(\frac{tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{sen\,\alpha}-2\,sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\cdot\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{sen\,\alpha}-2\,sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{sen\,\alpha}-2\cdot\frac{1}{4}\cdot sen^2\alpha=$$

$$=\frac{\frac{1-\cos\alpha}{2}}{sen\,\alpha}-\frac{sen^2\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2\,sen\,\alpha}-\frac{sen^2\alpha}{2}$$

8. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) cos 3x = $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (Sol: x=10º+k120º; x=110º+k·120º)

b) sen x + cos x = $\sqrt{2}$. (Sol: x=45º+k·360º)

c) sen x- 2cos 2x= -1/2 (Sol: 30º +k·360º, 150º +k·360º, 311º24’35’’ +k·360º y 228º35’25’’ +k·360º)

d) sen x cos x = 1/2 (Sol: x=45º+k·180º)

e) sen 2x=cos x (Sol: x=30º+k·360º; x=150º+k·360º; x=90º+k·180º)

f) 3 sen x + cos x = 1 (Sol: x=k·360º; x=143,13º+k·360º)

g) 2cos^{2}x – sen^{2}x + 1 = 0 (Sol: x=90º+k·180º)

h) sen^{2}x-senx=0 (Sol: x=k·180º; x=90º+k·360º)

i) 2 cos^{2}x - $\sqrt{3}$ cos x = 0 (Sol: x=90º+k·180º; x=30º+k·360º; x=330º+k·360º)

9. Resuelve las ecuaciones trigonométricas:

a) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (Sol: x= 19π/24+π k·; x = -π/24+π k)

$\pi/4 + 2x_1 = \pi/6+2\pi k$ –> $2x_1 = -2\pi/24+ 2\pi k$ –> $x_1 = -\pi/24+ \pi k\cdot$

$\pi/4 + 2x_2 = (2\pi - \pi/6)+2\pi k$ –> $2x_2 = 19\pi/12+ 2\pi k$ –> $x_2 = 19\pi/24+ \pi k\cdot$

b) $sen\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (Sol: x= π/12+π k·; x = -π/12+π k)

$\pi/2 - 2x_1 = \pi/3 + 2\pi k$ –> $2x_1 = \pi/6+ 2\pi k\cdot\cdot$ –> $x_1 = \pi/12+ \pi k\cdot$

$\pi/2 - 2x_2 = (\pi - \pi/3) + 2\pi k$ –> $2x_2 = -\pi/6+ 2\pi k\cdot\cdot$ –> $x_2 = -\pi/12+ \pi k\cdot$

c) $tg\left(\pi-\frac{x}{2}\right)=-1$ (Sol: x = π/2 + 2πk)

$\pi - x_1/2= 3\pi/4 + 2\pi k$ –> $x_1/2= \pi/4 + 2\pi k\cdot\cdot$ –> $x_1 = \pi/2+ 4\pi k\cdot$

$\pi - x_2/2 = (2\pi - \pi/4) + 2\pi k$ –> $x_2/2 = -3\pi/4+ 2\pi k\cdot\cdot$ –> $x_2 = -3\pi/2+ 4\pi k\cdot$

d) sen2x = 2cosx (Sol: x = π/2 + πk)

2senxcosx - 2cosx = 0 –> 2cosx (senx – 1) = 0 –> cosx = 0 –> x = π/2 + πk

senx = 1 –> x = π/2 + 2πk

e) sen4x = sen2x (Sol: x= π k·; x = π/6+π k; x = π/2+π k; x = 5π/6+π k)

2sen2xcos2x - sen2x = 0 –> sen2x(2cos2x - 1) = 0 –>

sen2x = 0 –> $2x_1 = 0 + 2\pi k$ $x_1 = \pi k$
$2x_2 = \pi + 2\pi k$ $x_2 = \pi/2+\pi k$

cos2x = ½ –> $2x_3 = \pi/3 + 2\pi k$ $x_3 = \pi/6+\pi k$
$2x_4 = 5\pi/3 + 2\pi k$ $x_4 = 5\pi/6+\pi k$

f) senx = 1 + 2cos2x (Sol: x= 0,848+2π k·; x = 2,294+2π k; x = 3π/2+2π k)

$senx = 1 + 2(1 - 2sen^2 x)$ –> $senx = 1 + 2 - 2sen^2 x$ –> $2sen^2 x + senx - 3 = 0$

Resolviendo la ecuación de 2º grado: sen x= ¾ y sen x = -1

g) secx + tgx = 0 No tiene solución

$\frac{1}{cosx}+\frac{senx}{cosx}=0$ –> $\frac{1+senx}{cosx}=0$ –> 1 + senx = 0 –> senx = -1

En este caso si senx = -1 –> cosx = 0 y no tiene solución

h) $6\cos^2 (x/2) + \cos x = 1$ (Sol: x= 2π/3+2π k·; x = 4π/3+2π k)

$6\cdot\left(\frac{1+cosx}{2}\right)+cosx=1$ –> 3(1 + cosx) + cosx = 1 –> 3cosx + cosx = -2 –> cosx = -1/2

10. Resuelve los sistemas de ecuaciones trigonométricas, siendo x e y ángulos agudos:

a) $\begin{cases} sen^2 x + 2\cos^2 y = \frac{3}{2} \\ \cos^2 x - 2\,sen^2 y = -\frac{1}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} sen\,x + \cos y = 1 \\ \cos 2x + sen^2 y = \frac{5}{4} \end{cases}$ c) $\begin{cases} senx + sen^2 y = 1 \\ \cos(2x) - sen^2 y = 0 \end{cases}$

(Sol: a) $x = \pi/4 + 2\pi k$·; $y = \pi/4 + 2\pi k$

b) $x_1 = \pi/6 + 2\pi k$·; $y_1 = \pi/3 + 2\pi k$ $x_2 = 0{,}1674 + 2\pi k$·; $y_2 = 0{,}5857 + 2\pi k$

c) $x_1 = 2\pi k$·; $y_1 = \pi/2 + \pi k$ $x_2 = \pi/6 + 2\pi k$·; $y_2 = \pi/4 + 2\pi k$)

a) $\begin{cases} sen^2 x + 2\cos^2 y = \frac{3}{2} \\ \cos^2 x - 2\,sen^2 y = -\frac{1}{2} \end{cases}$ sumando las ecuaciones $sen^2 x + \cos^2 x + 2\cos^2 y - 2\,sen^2 y = 1$

$1 + 2\cos 2y = 1$ –> $\cos 2y = 0$ –> $2y_1 = \pi/2 + 2\pi k$ –> $y_1 = \pi/4 + \pi k$

$sen^2 x_1 + 2\cos^2(\pi/4) = 3/2$ –> $sen^2 x_1 + 2 \cdot 1/2 = 3/2$ –> $sen^2 x_1 = 1/2$

$x_1 = \pi/4 + 2\pi k$ $y_1 = \pi/4 + \pi k$

b) $\begin{cases} sen\,x + \cos y = 1 \\ \cos 2x + sen^2 y = \frac{5}{4} \end{cases}$ $senx = 1 - \cos y$ –> Sustituyendo en la 2ª ecuación:

$\cos 2x + sen^2 y = 5/4$ –> $1 - 2sen^2 x + sen^2 y = 5/4$ –> $1 - 2(1 - \cos y)^2 + sen^2 y = 5/4$

$1 - 2(1 + \cos^2 y - 2\cos y) + sen^2 y = 5/4$ –> $1 - 2 - 2\cos^2 y + 4\cos y + 1 - \cos^2 y = 5/4$

$-3\cos^2 y + 4\cos y - 5/4 = 0$ resolviendo la ecuación de 2º grado $\cos y = 1/2$ o $\cos y = 5/6$

c) $\begin{cases} senx + sen^2 y = 1 \\ \cos(2x) - sen^2 y = 0 \end{cases}$ sumando las dos ecuaciones: $senx + \cos 2x = 1$

$senx + 1 - 2sen^2 x = 1$ –> $-2sen^2 x + senx = 0$ –> $senx = 0$ $senx = ½$