

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA.**RAZONES DE ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS, SUPLEMENTARIOS Y OPUESTOS.**

1. Sabiendo que $\operatorname{sen} \alpha = 0,2$, con α un ángulo del 2º cuadrante, halla:

- a) $\cos \alpha$ b) $\operatorname{tg} \alpha$ c) $\sec \alpha$ d) $\operatorname{cosec} \alpha$ e) $\operatorname{cotg} \alpha$

$$a) \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow 0,2^2 + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - 0,04 \rightarrow \cos \alpha = \sqrt{0,96} = -0,9798$$

$$b) \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0,2}{-0,9798} = -0,2041$$

$$c) \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{-0,9798} = -1,0206$$

$$d) \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{0,2} = 5$$

$$e) \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{-0,2041} = -4,8996$$

2. Halla todos los ángulos que cumplan:

a) $\operatorname{sen} a = \frac{1}{2}$

b) $\cos a = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

c) $\cos a = -0,3$

d) $\operatorname{sen} a = -1$

e) $\operatorname{tg} a = -1$

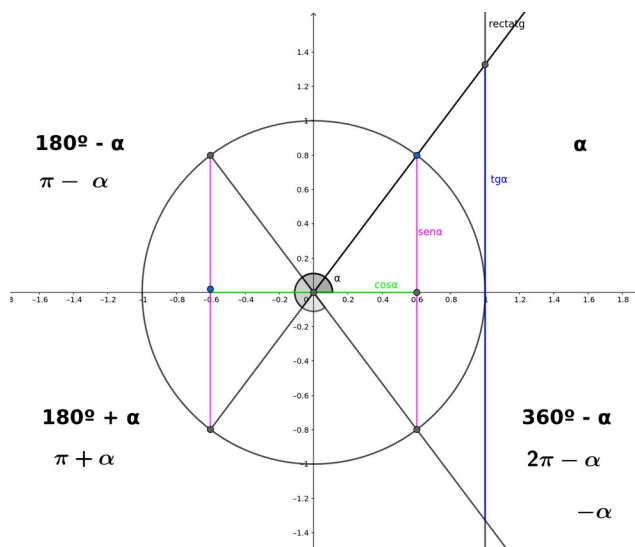
f) $\cos a = -0,25$ y ángulo del 4º cuadrante

g) $\operatorname{sen} a = 1,2$ y ángulo del 2º cuadrante

h) $\operatorname{tg} a = 3$ y ángulo del 2º cuadrante

i) $\operatorname{tg} a = 2$ y ángulo del 3º cuadrante

j) $\operatorname{sen} a = -0,8$ y ángulo del 3º cuadrante



a) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2}$ hay dos ángulos que cumplen la igualdad: $\alpha = 30^\circ$ $\beta = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$

b) $\cos \alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ hay dos ángulos que cumplen la igualdad en el 2º y 3º cuadrante:

Hallamos primero el ángulo del primer cuadrante $\alpha = 30^\circ \rightarrow \beta = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$

$$\gamma = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$$

c) $\cos \alpha = -0,3$ hay dos ángulos que cumplen la igualdad en el 2º y 3º cuadrante:

Hallamos primero el ángulo del primer cuadrante con la calculadora:

$$\alpha = \cos^{-1} 0,3 = 72,542396876$$

$$\beta = 180^\circ - 72,542396876^\circ = 107,457603124^\circ = 107^\circ 27' 27,3''$$

$$\gamma = 180^\circ + 72,542396876^\circ = 252,542396876^\circ = 252^\circ 32' 32,6''$$

d) $\sin \alpha = -1$ $\alpha = 270^\circ$

e) $\tan \alpha = -1$ hay dos ángulos que cumplen la igualdad en el 2º y 4º cuadrante:

Hallamos primero el ángulo del primer cuadrante $\alpha = 45^\circ \rightarrow \beta = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

$$\gamma = 360^\circ - 45^\circ = 315^\circ$$

f) $\cos \alpha = -0,25$ y ángulo del 4º cuadrante No tiene solución

g) $\sin \alpha = 1,2$ y ángulo del 2º cuadrante No tiene solución

h) $\tan \alpha = 3$ y ángulo del 2º cuadrante No tiene solución

i) $\tan \alpha = 2$ y ángulo del 3º cuadrante

Hallamos primero el ángulo del primer cuadrante con la calculadora:

$$\alpha = \tan^{-1} 2 = 63,434948823$$

El ángulo del 3º cuadrante: $\gamma = 180^\circ + 63,434948823^\circ = 243,434948823^\circ = 243^\circ 26' 5,82''$

j) $\sin \alpha = -0,8$ y ángulo del 3º cuadrante

Hallamos primero el ángulo del primer cuadrante con la calculadora $\alpha = 53,130102^\circ$

$$\gamma = 180^\circ + 53,130102354^\circ = 233,130102354^\circ = 233^\circ 7' 48,37''$$

Página 110 → 61, 66 y 68

61 Calcula las razones trigonométricas que faltan, sin calcular el ángulo al que corresponden.

Cuadrante	sen	cos	tg
Segundo	0,670		
Tercero		-0,453	
Cuarto			-0,745
Tercero	-0,782		
Segundo			-1,902
Cuarto		0,698	

Cuadrante	sen α	cos α	tan α
	$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$		$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$
Segundo	0,670		
Tercero			
Cuarto	(*) -0,597	0,802	-0,745
Tercero	-0,782	$-\sqrt{1 - (-0,782)^2} = -0,623$	$\frac{-0,782}{-0,623} = 1,255$
Segundo	(**) 0,884	-0,465	-1,902
Cuarto	$-\sqrt{1 - 0,698^2} = -0,716$	0,698	$\frac{-0,716}{0,698} = -1,026$

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1 \\ \text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = -0,745 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1 \\ \text{sen } \alpha = -0,745 \text{cos } \alpha \end{array} \right\} \rightarrow (-0,745 \text{cos } \alpha)^2 + \text{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow$$

$$0,555 \text{cos}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow 1,555 \text{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow \text{cos } \alpha = 0,802 \rightarrow \text{sen } \alpha = -0,597$$

$$(**) \left\{ \begin{array}{l} \text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1 \\ \text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = -1,902 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1 \\ \text{sen } \alpha = -1,902 \text{cos } \alpha \end{array} \right\} \rightarrow (-1,902 \text{cos } \alpha)^2 + \text{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow$$

$$3,618 \text{cos}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow 4,618 \text{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow \text{cos } \alpha = -0,465 \rightarrow \text{sen } \alpha = 0,884$$

66 Sabiendo que $\text{sen } \alpha = 0,23$ y que α es un ángulo agudo, calcula las siguientes razones trigonométricas.

- a) $\text{cos } \alpha$ c) $\text{cos}(180^\circ - \alpha)$ e) $\text{tg}(-\alpha)$
 b) $\text{tg } \alpha$ d) $\text{sen}(180^\circ + \alpha)$ f) $\text{sen}(720^\circ + \alpha)$

66.

$$a) \text{cos } \alpha = \sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,23^2} = 0,97$$

$$b) \text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{0,23}{0,97} = 0,24$$

$$c) \text{cos}(180^\circ - \alpha) = -\text{cos } \alpha = -0,97$$

$$d) \text{sen}(180^\circ + \alpha) = -\text{sen } \alpha = -0,23$$

$$e) \text{tg}(-\alpha) = -\text{tg } \alpha = -0,24$$

$$f) \text{sen}(720^\circ + \alpha) = \text{sen}(360^\circ \cdot 2 + \alpha) = \text{sen } \alpha = 0,23$$

68 Utiliza la calculadora para calcular el ángulo α .

- a) $\cos \alpha = 0,4539$ c) $\operatorname{tg} \alpha = -2,1618$
 b) $\operatorname{sen} \alpha = 0,9284$ d) $\cos \alpha = -0,2926$

a) El ángulo puede estar en el 1º o el 4º cuadrante: $\alpha = \cos^{-1}0,4539 = 63^{\circ}0'21''$

$$\beta = 360^{\circ} - 63^{\circ}0'21'' = 296^{\circ}59'39''$$

b) El ángulo puede estar en el 1º o el 2º cuadrante: $\alpha = \operatorname{sen}^{-1}0,9284 = 68^{\circ}11'12''$

$$\beta = 180^{\circ} - 68^{\circ}11'12'' = 111^{\circ}48'48''$$

c) El ángulo puede estar en el 2º o el 4º cuadrante:

$$\alpha = 180^{\circ} - \operatorname{tg}^{-1}(2,1618) = 180^{\circ} - 65^{\circ}10'33'' = 114^{\circ}49'27''$$

$$\beta = 360^{\circ} - \operatorname{tg}^{-1}(2,1618) = 360^{\circ} - 65^{\circ}10'33'' = 294^{\circ}49'27''$$

d) El ángulo puede estar en el 2º o el 3º cuadrante:

$$\alpha = 180^{\circ} - \cos^{-1}0,2926 = 107^{\circ}0'49''$$

$$\beta = 180^{\circ} + \cos^{-1}0,2926 = 252^{\circ}59'11''$$

+Página 111 → 69, 70, 71, 73 y 74

69 Halla las razones trigonométricas de estos ángulos.

- a) $\pi < \gamma < \frac{3\pi}{2}$, $\cos \gamma = -0,54$
 b) $\frac{3\pi}{2} < \delta < 2\pi$, $\operatorname{sen} \delta = -0,64$

(calculadora en radianes)

$$\gamma = \pi + \cos^{-1}0,54 = \pi + 1$$

$$\delta = 2\pi - \operatorname{sen}^{-1}0,64 = 5,5886870$$

$$\text{a) } \operatorname{sen} \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma} = -\sqrt{1 - 0,54^2} = -0,84$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\cos \gamma} = \frac{-0,84}{-0,54} = 1,56$$

$$\text{b) } \cos \delta = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \delta} = -\sqrt{1 - 0,64^2} = 0,77$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\operatorname{sen} \delta}{\cos \delta} = \frac{-0,64}{0,77} = -0,83$$

70 De un ángulo de un triángulo se sabe que su seno vale 0,7. ¿Podrías determinar de qué ángulo se trata?

Es un ángulo agudo $\alpha = \operatorname{sen}^{-1}0,7 = 44^{\circ}25'37''$

71 De un ángulo de un triángulo se conoce su coseno, que vale 0,2. ¿Podrías determinar qué ángulo es?

Es un ángulo agudo $\alpha = \cos^{-1}0,2 = 78^{\circ}27'47''$

73 De un ángulo α del 2.º cuadrante se sabe únicamente que su seno es 0,5. Determina las restantes razones trigonométricas de dicho ángulo.

$$\operatorname{sen}(180^{\circ} - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha = 0,5 \rightarrow \alpha = 30^{\circ}$$

El ángulo es $180^{\circ} - 30^{\circ} = 150^{\circ}$

$$\operatorname{sen} 150^{\circ} = 0,5 \rightarrow \cos 150^{\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \operatorname{tg} 150^{\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

74 Sabiendo que la tangente de un ángulo es dos veces su seno y que ambas razones son negativas, halla sus razones trigonométricas.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= 2 \operatorname{sen} \alpha < 0 \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = 2 \operatorname{sen} \alpha \rightarrow \\ \cos \alpha &= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

El seno y la tangente negativas corresponde a un ángulo del 4º cuadrante: $360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + 0,5^2 = 1 \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 2 \cdot -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

3.- Sea α un ángulo del primer cuadrante, sin hallar el ángulo calcula:

h

a) Si $\operatorname{tg} \alpha = 2$ halla

$$\operatorname{tg}(\pi/2 - \alpha) \quad \operatorname{tg}(\pi - \alpha) \quad \operatorname{tg}(\pi/2 + \alpha) \quad \operatorname{tg}(\pi + \alpha) \quad \operatorname{tg}(-\alpha) \quad \text{y} \quad \operatorname{tg}(3\pi/2 - \alpha).$$

b) Si $\operatorname{sen} \alpha = 1/3$ halla

$$\operatorname{sen}(\pi/2 - \alpha), \operatorname{sen}(\pi - \alpha), \operatorname{sen}(\pi/2 + \alpha), \operatorname{sen}(\pi + \alpha), \operatorname{sen}(-\alpha), \operatorname{sen}(3\pi/2 - \alpha) \text{ y } \operatorname{sen}(3\pi/2 + \alpha)$$

c) Si $\cos \alpha = 4/5$ halla

$$\cos(\pi/2 - \alpha), \cos(\pi - \alpha), \cos(\pi/2 + \alpha), \cos(\pi + \alpha), \cos(-\alpha), \cos(3\pi/2 - \alpha) \text{ y } \cos(3\pi/2 + \alpha).$$

$$\text{a) } \operatorname{tg}(\pi/2 - \alpha) = \operatorname{cotg} \alpha = 1/2$$

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha = -2$$

$$\operatorname{tg}(\pi/2 + \alpha) = -\operatorname{cotg}(\alpha) = -1/2$$

$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}(\alpha) = 2$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}(\alpha) = -2$$

$$\operatorname{tg}(3\pi/2 - \alpha) = \operatorname{cotg} \alpha = 1/2$$

$$\text{b) } \operatorname{sen}(\pi/2 - \alpha) = \cos \alpha = \frac{\sqrt{8}}{3}$$

$$\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha = 1/3$$

$$\operatorname{sen}(\pi/2 + \alpha) = \cos \alpha = \frac{\sqrt{8}}{3}$$

$$\operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha = -1/3$$

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen} \alpha = -1/3$$

$$\operatorname{sen}(3\pi/2 - \alpha) = -\cos \alpha = -\frac{\sqrt{8}}{3}$$

$$\operatorname{sen}(3\pi/2 + \alpha) = -\cos \alpha = -\frac{\sqrt{8}}{3}$$

$$\text{c) } \cos(\pi/2 - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha = 1/3$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha = -4/5$$

$$\cos(\pi/2 + \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha = -3/5$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha = -4/5$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha = 4/5$$

$$\cos(3\pi/2 - \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha = -3/5$$

$$\cos(3\pi/2 + \alpha) = \operatorname{sen} \alpha = 3/5$$

4. Sea α un ángulo del primer cuadrante tal que $\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = 0,75$; sin hallar el ángulo α calcula:

a) $\operatorname{sen} \alpha$, $\cos \alpha$ y $\operatorname{cotg} \alpha$.

b) $\operatorname{tg}(\pi/2 - \alpha)$, $\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$ y $\operatorname{tg}(\pi/2 + \alpha)$

c) $\operatorname{sen}(-\alpha)$, $\cos(-\alpha)$ y $\operatorname{tg}(3\pi/2 + \alpha)$.

$$a) \operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha = 0,75 \quad \rightarrow \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \rightarrow \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + 0,75^2} = 0,64$$

$$\cos \alpha = 0,8$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{1 - 0,8^2} = 0,6$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = 4/3$$

$$b) \operatorname{tg}(\pi/2 - \alpha) = \operatorname{cotg} \alpha = 1/\operatorname{tg} \alpha = 4/3$$

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}(\alpha) = -0,75$$

$$\operatorname{tg}(\pi/2 + \alpha) = -\operatorname{cotg} \alpha = -4/3$$

$$c) \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen} \alpha = -0,6$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha = 0,8$$

$$\operatorname{tg}(3\pi/2 + \alpha) = -\operatorname{cotg} \alpha = -4/3$$