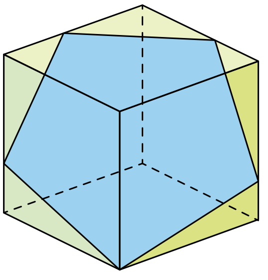
DESAFÍO

¡Qué corte!

Si cortamos un cubo con un plano, ¿qué figuras se pueden obtener?

Si la intersección de un cubo con un plano es un pentágono, ¿se puede tratar en algún caso de un pentágono regular?



Valora las diferentes secciones que pueden conseguirse al cortar un cubo con un plano según el ángulo de inclinación del plano.

Las figuras que se pueden obtener al cortar un cubo con un plano son las siguientes: Cuadrado, rectángulo, trapecio, triángulos de distintos tipos (equiláteros, isósceles y escalenos no obtusángulos), pentágono y hexágono.

No es posible obtener un pentágono regular.

PIENSA

PÁG. 92. ¿Qué ángulos, en positivo y en negativo, representan el mismo ángulo?

Los ángulos que representan, en positivo y en negativo, el mismo ángulo son 0°, 180° y sus vueltas. Es decir: $0° + 360° \cdot k$ y $180° + 360° \cdot k$, con $k \in \mathbb{Z}$.

PÁG. 93. ¿Cuánto puede valer como máximo el seno de un ángulo agudo? ¿Y como mínimo?

¿Cuáles pueden ser el valor máximo y el valor mínimo del coseno?

El seno de un ángulo agudo puede valer como máximo 1, pero este 1 es cota superior, es decir, no se llega a alcanzar (sería para 90°, que ya no es agudo).

El valor mínimo es 0.

El valor máximo del coseno de un ángulo agudo es 1, y el mínimo 0, siendo 0 una cota inferior, es decir, no se llega a alcanzar en un ángulo agudo.

PÁG. 94. Transforma esta expresión: $1 + cotg^2\,\alpha = cosec^2\,\alpha$ hasta obtener:

$$sen^2\,\alpha = \frac{tg^2\,\alpha}{1 + tg^2\,\alpha}.$$

$$1 + \frac{cos^2\,\alpha}{sen^2\,\alpha} = \frac{1}{sen^2\,\alpha} \rightarrow$$

$$\rightarrow sen^2\,\alpha = \frac{1}{1 + \dfrac{cos^2\,\alpha}{sen^2\,\alpha}} \rightarrow$$

$$\rightarrow sen^2\,\alpha = \frac{\dfrac{\dfrac{1}{sen^2\,\alpha}}{\dfrac{cos^2\,\alpha}{}}}{\dfrac{1 + \dfrac{cos^2\,\alpha}{sen^2\,\alpha}}{\dfrac{sen^2\,\alpha}{cos^2\,\alpha}}} \rightarrow$$

$$\rightarrow sen^2\,\alpha = \frac{tg^2\,\alpha}{1 + tg^2\,\alpha}$$

PÁG. 96. ¿Por qué no existe *tg* 90°?

¿Ocurre lo mismo con todos los ángulos que son múltiplos de 90°?

No existe porque el coseno de 90° es cero, y no se puede dividir un número entre cero. Esto pasa con los múltiplos impares de 90°, ya que los pares (180°, 360°…) tienen por coseno ± 1.

PÁG. 99. Demuestra las relaciones de la diferencia de ángulos a partir de las de la suma haciendo:

$$sen(\alpha - \beta) = sen(\alpha + (-\beta))$$
$$cos(\alpha - \beta) = cos(\alpha + (-\beta))$$

y aplicando las relaciones conocidas entre ángulos opuestos:

$$sen(-\beta) = -sen\,\beta \qquad cos(-\beta) = cos\,\beta$$

$$sen(\alpha + (-\beta)) = sen\,\alpha \cdot cos(-\beta) +$$
$$+ cos\,\alpha \cdot sen(-\beta) =$$
$$= sen\,\alpha \cdot cos\,\beta + cos\,\alpha \cdot (-sen\,\beta) =$$
$$= sen\,\alpha \cdot cos\,\beta - cos\,\alpha \cdot sen\,\beta = sen(\alpha - \beta)$$

$$cos(\alpha + (-\beta)) = cos\,\alpha \cdot cos(-\beta) -$$
$$- sen\,\alpha \cdot sen(-\beta) =$$
$$= cos\,\alpha \cdot cos\,\beta - sen\,\alpha \cdot (-sen\,\beta) =$$
$$= cos\,\alpha \cdot cos\,\beta + sen\,\alpha \cdot sen\,\beta = cos(\alpha - \beta)$$

PÁG. 100. ¿Qué interpretación geométrica tiene que el parámetro *k* que aparece en las soluciones de las ecuaciones trigonométricas tome un valor negativo?

Las vueltas son en sentido horario (sentido negativo de los ángulos de la circunferencia goniométrica).

PÁG. 102. ¿Qué resultado se obtiene al aplicar el teorema del seno a un triángulo rectángulo?

La definición del seno de un ángulo en un triángulo rectángulo como el cociente del cateto opuesto entre la hipotenusa.

PÁG. 103. ¿Qué resultado se obtiene al aplicar el teorema del coseno a un triángulo rectángulo?

El teorema de Pitágoras.

ACTIVIDADES

1 Encuentra la equivalencia en radianes de estos ángulos.

a) 10°

b) 135°

c) −60°

a) $\dfrac{2\pi}{360} = \dfrac{x}{10} \rightarrow x = \dfrac{20\pi}{360} = \dfrac{\pi}{18}$ rad

b) $\dfrac{2\pi}{360} = \dfrac{x}{135} \rightarrow x = \dfrac{270\pi}{360} = \dfrac{3\pi}{4}$ rad

c) $\dfrac{2\pi}{360} = \dfrac{x}{-60} \rightarrow x = \dfrac{-120\pi}{360} = \dfrac{-\pi}{3}$ rad

2 Expresa en radianes la medida de los ángulos interiores de estos polígonos regulares.

a) Un triángulo.

b) Un cuadrado.

c) Un pentágono.

Si llamamos *n* al número de lados del polígono regular, entonces sus ángulos interiores miden $\dfrac{180°(n-2)}{n}$.

a) $60° = \dfrac{\pi}{3}$ rad

b) $90° = \dfrac{\pi}{2}$ rad

c) $108° = \dfrac{3\pi}{5}$ rad

3 Halla la medida en grados de estos ángulos.

a) $\dfrac{2\pi}{3}$ rad b) 3 rad c) $-\dfrac{4\pi}{3}$ rad

a) $\dfrac{360}{2\pi} = \dfrac{x}{\frac{2\pi}{3}} \rightarrow x = \dfrac{360 \cdot 2\pi}{6\pi} = 120°$

b) $\dfrac{360}{2\pi} = \dfrac{x}{3} \rightarrow x = \dfrac{360 \cdot 3}{2\pi} = 171{,}88°$

c) $\dfrac{360}{2\pi} = \dfrac{x}{-\frac{4\pi}{3}} \rightarrow$

$\rightarrow x = \dfrac{-360 \cdot 4\pi}{6\pi} = -240°$

4 Expresa en grados los ángulos cuya amplitud es 1, 2, 3, 4, 5 y 6 radianes.

$\dfrac{360}{2\pi} = \dfrac{x}{1} \rightarrow$

$\rightarrow x = \dfrac{360 \cdot 1}{2\pi} = 57{,}258° = 57°17'45''$

Procediendo de la misma forma, calculamos:

1 rad = 57° 17′ 45″

2 rad = 114° 35′ 30″

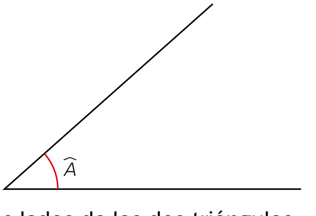
3 rad = 171° 53′ 14″

4 rad = 229° 10′ 59″

5 rad = 286° 28′ 44″

6 rad = 343° 46′ 29″

5 Dibuja dos rectas perpendiculares a uno de los lados de este ángulo de modo que se formen dos triángulos rectángulos.



Mide los lados de los dos triángulos y verifica que las razones del ángulo $\widehat{A}$ son idénticas en ambos.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Las medidas de uno de los triángulos son 5; 4,6 y 6,5 cm, en cuyo caso las razones trigonométricas del ángulo $\widehat{A}$ son:

$$sen\ \widehat{A} = \frac{4,6}{6,5} = 0,708$$

$$cos\ \widehat{A} = \frac{5}{6,5} = 0,769$$

$$tg\ \widehat{A} = \frac{4,6}{5} = 0,92$$

Las medidas del otro triángulo son 2,5; 2,3 y 3,25 cm, obteniendo:

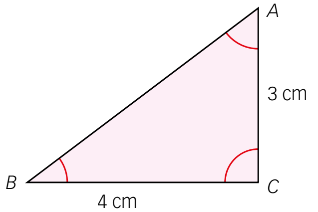
$$sen\ \widehat{A} = \frac{2,3}{3,25} = 0,708$$

$$cos\ \widehat{A} = \frac{2,5}{3,25} = 0,769$$

$$tg\ \widehat{A} = \frac{2,3}{2,5} = 0,92$$

6 Halla la longitud de la hipotenusa de este triángulo rectángulo y, después, calcula:

a) $sen\ \widehat{A}$
b) $sen\ \widehat{B}$
c) $cos\ \widehat{A}$
d) $cos\ \widehat{B}$
e) $tg\ \widehat{A}$
f) $tg\ \widehat{B}$



¿Qué relación tienen las razones trigonométricas de $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$?

$h = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

a) $sen\ \widehat{A} = \frac{4}{5} = 0,8$

b) $sen\ \widehat{B} = \frac{3}{5} = 0,6$

c) $cos\ \widehat{A} = \frac{3}{5} = 0,6$

d) $cos\ \widehat{B} = \frac{4}{5} = 0,8$

e) $tg\ \widehat{A} = \frac{4}{3} = 1,\widehat{3}$

f) $tg\ \widehat{B} = \frac{3}{4} = 0,75$

El seno de $\widehat{A}$ coincide con el coseno de $\widehat{B}$ y viceversa. Las tangentes son inversas.

7 Calcula las razones trigonométricas del ángulo α si:

a) $sen\ \alpha = \frac{1}{4}$
b) $tg\ \alpha = 0,49$
c) $cos\ \alpha = \frac{2}{3}$
d) $sen\ \alpha = 0,2$

a) $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^2 + cos^2\ \alpha = 1$

$cos\ \alpha = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4} \rightarrow$

$\rightarrow sec\ \alpha = \frac{4}{\sqrt{15}} = \frac{4\sqrt{15}}{15}$

$\rightarrow tg\ \alpha = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{4}{4\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15} \rightarrow$

$\rightarrow cotg\ \alpha = \sqrt{15}$

$sen\ \alpha = \frac{1}{4} \rightarrow cosec\ \alpha = 4$

b) $cos\ \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + tg^2\ \alpha}} = 0,9 \rightarrow$

$\rightarrow sec\ \alpha = 1,11$

$sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow$

$\rightarrow sen^2\ \alpha + 0,9^2 = 1$

$sen\ \alpha = 0,44 \rightarrow cosec\ \alpha = 2,29$

$tg\ \alpha = 0,49 \rightarrow cotg\ \alpha = 2,04$

c) $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow$

$\rightarrow sen^2\ \alpha + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 \rightarrow$

$\rightarrow sen\ \alpha = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \rightarrow$

$\rightarrow cosec\ \alpha = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

$tg\ \alpha = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \rightarrow cotg\ \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$cos\ \alpha = \frac{2}{3} \rightarrow sec\ \alpha = \frac{3}{2}$

d) $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow$

$\rightarrow 0,2^2 + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow$

$\rightarrow cos\ \alpha = 0,98 \rightarrow sec\ \alpha = 1,02$

$tg\ \alpha = \frac{0,2}{0,98} = 0,204 \rightarrow cotg\ \alpha = 4,9$

$sen\ \alpha = 0,2 \rightarrow cosec\ \alpha = 5$

8 Razona si existe algún ángulo α para el que se verifique:

a) $sen\ \alpha = 0{,}3$ y $cos\ \alpha = 0{,}8$

b) $sen\ \alpha = 0{,}72$ y $tg\ \alpha = 1{,}04$

c) $cos\ \alpha = 0{,}1$ y $sen\ \alpha = 0{,}99$

a) No existe, ya que no cumple la relación $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$.

$0{,}3^2 + 0{,}8^2 = 0{,}73 \neq 1$

b) Sí existe, pues cumple la relación $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$.

Calculamos el coseno:

$1{,}04 = \dfrac{0{,}72}{cos\ \alpha} \rightarrow cos\ \alpha = 0{,}69 \rightarrow$

$\rightarrow 0{,}72^2 + 0{,}69^2 = 1$

c) Sí existe, porque cumple la relación $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$.

$0{,}1^2 + 0{,}99^2 = 1$

9 Halla el valor de las siguientes expresiones.

a) $cos\ 30° - sen\ 60° + tg\ 45°$

b) $cos^2\ 60° - sen^2\ 45°$

c) $sen^2\ 60° + sen\ 45° - cos^2\ 30°$

d) $tg\ 30° + tg\ 60° - sen\ 30° \cdot cos\ 30°$

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 1$

b) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -\dfrac{1}{4}$

c) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{13\sqrt{3}}{12}$

10 Halla con ayuda de la calculadora.

a) $cos\ 79°$

b) $sen\ (0{,}35\ \text{rad})$

c) $sen\ 43{,}5°$

d) $cos\ (1\ \text{rad})$

e) $tg\ 10°\ 28'$

f) $tg\ (1{,}27\ \text{rad})$

a) 0,19 c) 0,69 e) 0,18

b) 0,34 d) 0,54 f) 3,22

11 Calcula la altura de un triángulo equilátero de lado 5 cm, sin utilizar el teorema de Pitágoras.

$cos\ 30° = \dfrac{h}{5} \rightarrow h = 5 \cdot cos\ 30° = 4{,}33$

La altura del triángulo es 4,33 cm.

12 Indica el signo que tienen las razones trigonométricas de los ángulos, identificando el cuadrante en el que se encuentran.

a) 66°

b) 18°

c) 175°

d) 135°

e) 342°

f) 120°

g) 235°

h) 359°

i) 265°

a) Es del 1.er cuadrante. Todas las razones trigonométricas son positivas.

b) Es del 1.er cuadrante. Todas las razones trigonométricas son positivas.

c) Es del 2.º cuadrante. El seno y la cosecante son positivos, y el resto de las razones trigonométricas son negativas.

d) Es del 2.º cuadrante. El seno y la cosecante son positivos, y el resto de las razones trigonométricas son negativas.

e) Es del 4.º cuadrante. El coseno y la secante son positivos, y el resto de las razones trigonométricas son negativas.

f) Es del 2.º cuadrante. El seno y la cosecante son positivos, y el resto de las razones trigonométricas son negativas.

g) Es del 3.er cuadrante. El seno, el coseno, la cosecante y la secante son negativos, la tangente y la cotangente son positivas.

h) Es del 4.º cuadrante. El coseno y la secante son positivos, y el resto de las razones trigonométricas son negativas.

i) Es del 3.er cuadrante. El seno, el coseno, la cosecante y la secante son negativos, la tangente y la cotangente son positivas.

13 Indica las razones trigonométricas de estos ángulos.

a) $-90°$

b) $-180°$

c) $-270°$

a) $sen\,(-90°) = -1$
$cos\,(-90°) = 0$
La tangente de $-90°$ no existe.

b) $sen\,(-180°) = 0$
$cos\,(-180°) = -1$
$tg\,(-180°) = 0$

c) $sen\,(-270°) = 1$
$cos\,(-270°) = 0$
La tangente de $-270°$ no existe.

14 Ordena de menor a mayor los cosenos de los siguientes ángulos sin calcularlos.

34°	98°	126°	251°
72°	160°	28°	345°

Se ordenan teniendo en cuenta que el coseno es positivo en los ángulos del primer y cuarto cuadrante.

$cos\,160° < cos\,126° < cos\,251° < cos\,98° <$
$< cos\,72° < cos\,34° < cos\,28° < cos\,345°$

15 Ordena de menor a mayor las tangentes de estos ángulos sin calcularlas.

65°	170°	182°	315°
110°	210°	34°	360°

Ordenamos teniendo en cuenta que la tangente es positiva en los ángulos del primer y tercer cuadrantes y negativa en el segundo y cuarto cuadrantes.

$tg\,110° < tg\,315° < tg\,170° < tg\,360° <$
$< tg\,182° < tg\,210° < tg\,34° < tg\,65°$

16 Sabiendo que $cos\,50° = 0{,}6428$; halla las razones trigonométricas de:

a) 130°
b) 230°
c) $-50°$
d) 310°

Calculamos el seno de 50° utilizando las relaciones entre razones trigonométricas.

$sen^2\,50° + 0{,}6428^2 = 1 \rightarrow sen\,50° = 0{,}766$

a) $-cos\,50° = cos\,130° = -0{,}6428$
$sen\,50° = sen\,130° = 0{,}766$
$tg\,130° = -1{,}1918$
$sec\,130° = -1{,}5557$
$cosec\,130° = 1{,}3054$
$cotg\,130° = -0{,}8391$

b) $-cos\,50° = cos\,230° = -0{,}6428$
$-sen\,50° = sen\,230° = -0{,}766$
$tg\,230° = 1{,}1918;\ sec\,230° = -1{,}5557$
$cosec\,230° = -1{,}3054$
$cotg\,230° = 0{,}8391$

c) $cos\,50° = cos\,(-50°) = 0{,}6428$
$-sen\,50° = sen\,(-50°) = -0{,}766$
$tg\,(-50°) = -1{,}1918$
$sec\,(-50°) = 1{,}5557$
$cosec\,(-50°) = -1{,}3054$
$cotg\,(-50°) = -0{,}8391$

d) $cos\,50° = cos\,310° = 0{,}6428$
$-sen\,50° = sen\,310° = -0{,}766$
$tg\,310° = -1{,}1918;\ sec\,310° = 1{,}5557$
$cosec\,310° = -1{,}3054$
$cotg\,310° = -0{,}8391$

17 Calcula las razones trigonométricas en función de las razones de otros ángulos del 1.er cuadrante.

a) 475°
b) 885°
c) 1 130°
d) 695°
e) 1 215°
f) 985°

a) $sen\,475° = sen\,115° = sen\,65° = 0{,}9063$
$cos\,475° = cos\,115° = cos\,115° =$
$= -cos\,65° = -0{,}4226$
$tg\,475° = tg\,115° = -tg\,65° = -2{,}1445$

b) $sen\,885° = sen\,165° = sen\,15° = 0{,}2588$
$cos\,885° = cos\,165° = -cos\,15° =$
$= -0{,}9659$
$tg\,885° = tg\,165° = -tg\,15° = -0{,}2679$

c) $sen\,1\,130° = sen\,50° = 0{,}766$
$cos\,1\,130° = cos\,50° = 0{,}6428$
$tg\,1\,130° = tg\,50° = 1{,}1917$

d) $sen\,695° = sen\,335° = -sen\,25° =$
$= -0{,}4226$
$cos\,695° = cos\,335° = cos\,25° = 0{,}9063$
$tg\,695° = tg\,335° = -tg\,25° = 0{,}4663$

e) $sen\,1\,215° = sen\,135° = sen\,45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$cos\,1\,215° = cos\,135° = -cos\,45° =$
$= -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$tg\,1\,215° = tg\,135° = -tg\,45° = -1$

f) $sen\,985° = sen\,265° = -sen\,85° =$
$= -0{,}9962$

$\cos 985° = \cos 265° = -\cos 85° =$
$= -0{,}0872$

$tg\, 985° = tg\, 265° = tg\, 85° = 11{,}4301$

18 Sabiendo que $sen\, \alpha = \dfrac{1}{5}$, calcula.

a) $sen\, (90° - \alpha)$
b) $sen\, (180° - \alpha)$
c) $sen\, (-\alpha)$

a) $sen\, \alpha = \cos (90° - \alpha)$
$\cos^2 (90° - \alpha) + sen^2 (90° - \alpha) = 1$

$$\rightarrow sen\, (90° - \alpha) = \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

b) $sen\, \alpha = \dfrac{1}{5}$

c) $-sen\, \alpha = -\dfrac{1}{5}$

19 Si $sen\, 18° = 0{,}309$ y $\cos 18° = 0{,}951$; calcula.

a) $sen\, 72°$
b) $\cos 162°$
c) $tg\, (-72°)$

a) $sen\, (90° - 18°) = \cos 18° = 0{,}951$
b) $\cos (180° - 18°) = -\cos 18° = -0{,}951$
c) $-tg\, 72° = -tg\, (90° - 18°) =$

$$= -\frac{1}{tg\, 18°} = -\frac{\cos 18°}{sen\, 18°} = -\frac{0{,}951}{0{,}309} =$$
$$= -3{,}0777$$

20 Dados los siguientes ángulos, contesta a las preguntas que aparecen a continuación.

25°	115°	−25°
65°	155°	−65°

a) ¿Cuáles tienen el mismo seno? ¿Y el mismo coseno?
b) ¿Qué ángulos tienen igual la tangente?

a) $sen\, 25° = sen\, 155°$
$sen\, 65° = sen\, 115°$
$\cos 65° = \cos (-65°)$
$\cos 25° = \cos (-25°)$

b) $tg\, 115° = tg(-65°)$
$tg\, 155° = tg(-25°)$

21 A partir de las razones de 45° y 60°, calcula las razones trigonométricas de 105° y 15°.

$sen\, (60° + 45°) =$
$= sen\, 60° \cos 45° + \cos 60°\, sen\, 45° =$
$= 0{,}9659$

$\cos (60° + 45°) =$
$= \cos 60° \cos 45° - sen\, 60°\, sen\, 45° =$
$= -0{,}2588$

$$tg\, (60° + 45°) = \frac{tg\, 60° + tg\, 45°}{1 - tg\, 60°\, tg\, 45°} = -3{,}7321$$

$sen\, (60° - 45°) =$
$= sen\, 60° \cos 45° - \cos 60°\, sen\, 45° =$
$= 0{,}2588$

$\cos (60° - 45°) =$
$= \cos 60° \cos 45° + sen\, 60°\, sen\, 45° =$
$= 0{,}9659$

$$tg\, (60° - 45°) = \frac{tg\, 60° - tg\, 45°}{1 + tg\, 60°\, tg\, 45°} = 0{,}2679$$

22 Calcula las razones trigonométricas de 76° y 19° sabiendo que $\cos 38° = 0{,}788$ y $sen\, 38° = 0{,}616$.

$\cos 76° = \cos (2 \cdot 38°) =$
$= \cos^2 38° - sen^2\, 38° = 0{,}2419$

$sen\, 76° = sen\, (2 \cdot 38°) =$
$= 2\, sen\, 38° \cos 38° = 0{,}9703$

$$tg\, 38° = \frac{sen\, 38°}{\cos 38°} = 0{,}7813$$

$$tg\, 76° = tg(2 \cdot 38°) = \frac{2\, tg\, 38°}{1 - tg^2\, 38°} = 4{,}011$$

$$\cos 19° = \cos \frac{38°}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos 38°}{2}} = 0{,}9455$$

$$sen\, 19° = sen\, \frac{38°}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 38°}{2}} = 0{,}3256$$

$$tg\, 19° = tg\, \frac{38°}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 38°}{1 + \cos 38°}} = 0{,}3443$$

23 Usa la calculadora para dar una solución de las siguientes ecuaciones trigonométricas en el intervalo [0°, 360°).

a) $5\ sen\ x = 2$
b) $7\ cos\ x = -1$
c) $5\ tg\ x = 12$
d) $2\ tg\ x = 2$
e) $3\ sen\ x = -1$
f) $4\ cos\ x = 2$

¿Es única la solución en este intervalo?

a) $sen\ x = \frac{2}{5} \rightarrow x = 23{,}58°$

b) $cos\ x = -\frac{1}{7} \rightarrow x = 98{,}21°$

c) $tg\ x = \frac{12}{5} \rightarrow x = 67{,}38°$

d) $tg\ x = 1 \rightarrow x = 45°$

e) $sen\ x = -\frac{1}{3} \rightarrow x = -19{,}47°$

f) $cos\ x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 60°$

No son únicas, ya que existe otro ángulo que cumple la ecuación en cada apartado.

24 Resuelve estas ecuaciones trigonométricas y simplifica el resultado.

a) $cos\ 2x = 1$
b) $cos\ 2x + sen\ x = 1$
c) $sen\ 2x - cos\ x = 0$
d) $3\ tg\ 2x = \sqrt{3}$

a) $x = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$

b) $cos^2\ x - sen^2\ x + sen\ x = 1 \rightarrow$
$\rightarrow -2sen^2\ x + sen\ x = 0 \rightarrow$
$$\rightarrow \begin{cases} sen\ x = 0 \\ sen\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$x_1 = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$

$x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$

c) $2\ sen\ x\ cos\ x - cos\ x =$
$= cos\ x(2\ sen\ x - 1) = 0$
$$\rightarrow \begin{cases} cos\ x = 0 \\ sen\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$

$x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$

d) $tg\ 2x = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$

25 Resuelve la ecuación $sen\ 2x\ cos\ 2x = \frac{1}{2}$.

$\frac{sen\ 4x}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow sen\ 4x = 1 \rightarrow$
$\rightarrow 4x = 90° + 360° \cdot k \rightarrow$
$\rightarrow x = 22{,}5° + 90° \cdot k$, con $k \in \mathbb{Z}$

26 En un triángulo rectángulo cuyo ángulo recto es $\widehat{A}$, se sabe que $b = 30$ m y $c = 25$ m. Resuélvelo.

$a = \sqrt{30^2 + 25^2} = \sqrt{1525} = 39{,}05$ m

$sen\ \widehat{B} = \frac{b}{a} = \frac{30}{39{,}05} = 0{,}7682 \rightarrow$
$\rightarrow \widehat{B} = 50{,}2°$

$\widehat{C} = 90° - 50{,}2° = 39{,}8°$

27 De un triángulo rectángulo $\widehat{ABC}$ conocemos que $\widehat{C} = 62°$ y que la hipotenusa mide 1 m. Halla sus elementos.

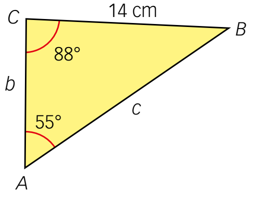
$\widehat{B} = 90° - 62° = 28°$

$sen\ \widehat{B} = \frac{b}{a} = \frac{b}{1} \rightarrow b = sen\ 28° = 0{,}4695$ m

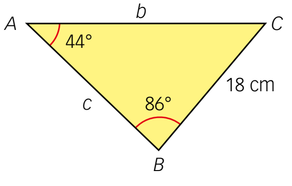
$c = \sqrt{1^2 - 0{,}4695^2} = 0{,}8829$ m

28 Calcula b y c en estos triángulos.

a)



b)



$$\frac{a}{sen\ \widehat{A}} = \frac{b}{sen\ \widehat{B}} = \frac{c}{sen\ \widehat{C}}$$

a) $\widehat{B} = 180° - 88° - 55° = 37°$

$$\frac{b}{sen\ 37°} = \frac{14}{sen\ 55°} \to b = 10{,}29\ cm$$

$$\frac{c}{sen\ 88°} = \frac{14}{sen\ 55°} \to$$

$$\to c = \frac{14 \cdot sen\ 88°}{sen\ 55°} = 17{,}08\ cm$$

b) $\widehat{C} = 180° - 44° - 86° = 50°$

$$\frac{b}{sen\ 86°} = \frac{18}{sen\ 44°} \to$$

$$\to b = \frac{18 \cdot sen\ 86°}{sen\ 44°} \to b = 25{,}85\ cm$$

$$\frac{c}{sen\ 50°} = \frac{18}{sen\ 44°} \to$$

$$\to c = \frac{18 \cdot sen\ 50°}{sen\ 44°} \to c = 19{,}85\ cm$$

29 Determina los ángulos y los lados de los triángulos de los que se conoce:

a) $c = 500$ m $\widehat{A} = 55°$ $\widehat{B} = 110°$

b) $b = 10$ cm $a = 8$ cm $\widehat{B} = 60°$

c) $\widehat{C} = 30°$ $b = 25$ cm $c = 18$ cm

d) $c = 8\,800$ m $\widehat{A} = 37°$ $\widehat{B} = 53°$

$$\frac{a}{sen\ \widehat{A}} = \frac{b}{sen\ \widehat{B}} = \frac{c}{sen\ \widehat{C}}$$

a) $\widehat{C} = 180° - 55° - 110° = 15°$

$$\frac{a}{sen\ 55°} = \frac{500}{sen\ 15°} \to$$

$$\to a = \frac{500 \cdot sen\ 55°}{sen\ 15°} = 1\,582{,}48\ m$$

$$\frac{b}{sen\ 110°} = \frac{500}{sen\ 15°} \to$$

$$\to b = \frac{500 \cdot sen\ 110°}{sen\ 15°} = 1\,815{,}35\ m$$

b) $\dfrac{8}{sen\ \widehat{A}} = \dfrac{10}{sen\ 60°} \to$

$$\to sen\ \widehat{A} = \frac{8 \cdot sen\ 60°}{10} = 0{,}6928 \to$$

$$\to \widehat{A} = 43{,}85°$$

$\widehat{C} = 180° - 60° - 43{,}85 = 76{,}15°$

$$\frac{10}{sen\ 60°} = \frac{c}{sen\ 76{,}15°} \to$$

$$\to c = \frac{10 \cdot sen\ 76{,}15°}{sen\ 60°} = 11{,}21\ cm$$

c) $\dfrac{18}{sen\ 30°} = \dfrac{25}{sen\ \widehat{B}} \to$

$$\to sen\ \widehat{B} = \frac{25 \cdot sen\ 30°}{18} = 0{,}6944 \to$$

$$\to \widehat{B} = 43{,}98°$$

$\widehat{A} = 180° - 30° - 43{,}98 = 106{,}02°$

$$\frac{a}{sen\ 106{,}02°} = \frac{18}{sen\ 30°} \to$$

$$\to a = \frac{18 \cdot sen\ 106{,}02°}{sen\ 30°} = 34{,}60\ cm$$

d) $\widehat{C} = 180° - 37° - 53° = 90°$

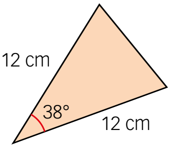
$$\frac{a}{sen\ 37°} = 8\,800 \to$$

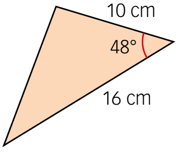
$$\to a = 8\,800 \cdot sen\ 37° = 5\,295{,}97\ m$$

$$\frac{b}{sen\ 53°} = 8\,800 \to$$

$$\to b = 8\,800 \cdot sen\ 53° = 7\,027{,}99\ m$$

30 Calcula la longitud del lado desconocido.

a) 

b) 

a) $a = \sqrt{12^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 12\ cos\ 38°} =$
$= 7{,}81$ cm

b) $a = \sqrt{10^2 + 16^2 - 2 \cdot 10 \cdot 16\ cos\ 48°} =$
$= 11{,}91$ cm

31 Decide si las siguientes medidas corresponden a las longitudes de los lados de un triángulo, calcula la medida de sus ángulos e indica si es acutángulo, rectángulo u obtusángulo.

a) 12, 11 y 9 cm

b) 23, 14 y 8 cm

c) 26, 24 y 10 cm

d) 40, 30 y 20 m

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos\ \widehat{A}$

a) $12^2 = 11^2 + 9^2 - 2 \cdot 11 \cdot 9 \cdot cos\ \widehat{A} \to$
$\to cos\ \widehat{A} = 0{,}2929 \to \widehat{A} = 72{,}97°$

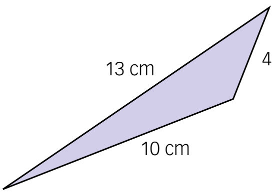
El triángulo es acutángulo.

b) Las medidas no forman un triángulo, ya que la suma de los lados menores es menor que el lado mayor.

c) $26^2 = 24^2 + 10^2 - 2 \cdot 24 \cdot 10 \cdot \cos \widehat{A} \rightarrow$
$\rightarrow \cos \widehat{A} = 0 \rightarrow \widehat{A} = 90°$
El triángulo es rectángulo.

d) $40^2 = 30^2 + 20^2 - 2 \cdot 30 \cdot 20 \cdot \cos \widehat{A} \rightarrow$
$\rightarrow \cos \widehat{A} = -0{,}25 \rightarrow \widehat{A} = 104{,}48°$
El triángulo es obtusángulo.

32 Resuelve este triángulo.



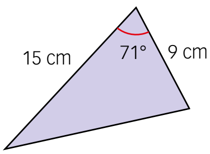
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A}$

$13^2 = 10^2 + 4^2 - 2 \cdot 10 \cdot 4 \cos \widehat{A} \rightarrow$
$\rightarrow \widehat{A} = 131{,}49°$

$10^2 = 13^2 + 4^2 - 2 \cdot 13 \cdot 4 \cos \widehat{B} \rightarrow$
$\rightarrow \widehat{B} = 35{,}18°$

$\widehat{C} = 180° - 131{,}49° - 35{,}18° = 13{,}33°$

33 Resuelve el triángulo.



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A}$

$a = \sqrt{15^2 + 9^2 - 2 \cdot 9 \cdot 15 \cos 71°} =$
$= 14{,}77$ cm

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}}$$

$$\frac{14{,}77}{\operatorname{sen} 71°} = \frac{9}{\operatorname{sen} \widehat{B}} \rightarrow \widehat{B} = 35{,}18°$$

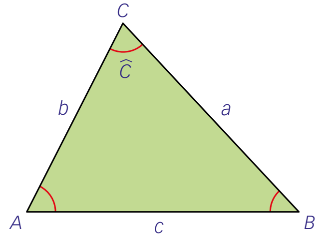
$\widehat{C} = 180° - 71° - 35{,}18° = 73{,}82°$

34 Resuelve un triángulo sabiendo que dos de sus lados miden 14 cm y 18 cm, respectivamente, y el ángulo opuesto al lado de 14 cm mide 70°. Después, dibuja el triángulo.

$$\frac{14}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \frac{18}{\operatorname{sen} 70°} \rightarrow \widehat{B} = 46{,}96°$$

$\widehat{A} + 46{,}96° + 70° = 180° \rightarrow \widehat{A} = 63{,}04°$

$$\rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen} 63{,}04°} = \frac{18}{\operatorname{sen} 70°} \rightarrow a = 17{,}07 \text{ cm}$$



35 Al resolver un triángulo de lados $a = 4$ m, $c = 6$ m y ángulo $\widehat{A} = 25°$, obtenemos como soluciones dos triángulos obtusángulos. Comprueba que esto es posible y dibuja las soluciones.

$$\frac{4}{\operatorname{sen} 25°} = \frac{6}{\operatorname{sen} \widehat{C}} \rightarrow \begin{cases} \widehat{C} = 39{,}34° \\ \widehat{C} = 140{,}66° \end{cases}$$

1.ª solución: $25° + \widehat{B} + 39{,}34° = 180° \rightarrow$
$\rightarrow \widehat{B} = 115{,}66°$

2.ª solución: $25° + \widehat{B} + 140{,}66° = 180° \rightarrow$
$\rightarrow \widehat{B} = 14{,}34°$

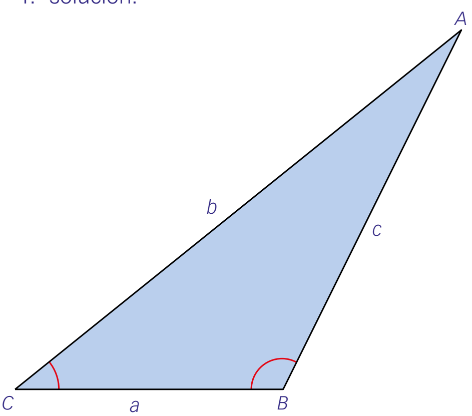
1.ª solución:

$$\frac{b}{\operatorname{sen} 115{,}66°} = \frac{4}{\operatorname{sen} 25°} \rightarrow b = 8{,}53 \text{ m}$$

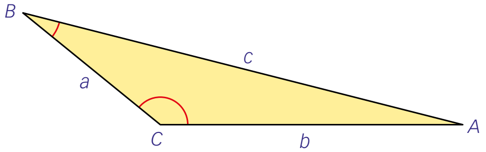
2.ª solución:

$$\frac{b}{\operatorname{sen} 14{,}34°} = \frac{4}{\operatorname{sen} 25°} \rightarrow b = 2{,}34 \text{ m}$$

1.ª solución:



2.ª solución:



PRACTICA

36 Calcula el seno, el coseno y la tangente de α.

a) $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ y $270° < \alpha < 360°$

b) $tg\ \alpha = 3$ y $180° < \alpha < 270°$

a) $sen\ \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} =$

$= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$tg\ \alpha = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$

b) $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{1 + tg^2 \alpha}} =$

$= -\sqrt{\frac{1}{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$

$sen\ \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$

37 Calcula los siguientes cosenos ayudándote de las razones trigonométricas de 50°.

a) $\cos 40°$ d) $\cos 100°$ g) $\cos 80°$

b) $\cos 5°$ e) $\cos 310°$ h) $\cos 230°$

c) $\cos 130°$ f) $\cos 25°$

$\cos 50° = 0{,}6428$ $sen\ 50° = 0{,}7660$

$tg\ 50° = 1{,}1918$

a) $\cos (90° - 50°) =$

$= \cos 90° \cos 50° + sen\ 90°\ sen\ 50° =$

$= 0{,}7660$

b) $\cos (50° - 45°) =$

$= \cos 50° \cos 45° + sen\ 50°\ sen\ 45° =$

$= 0{,}9962$

c) $\cos (180° - 50°) =$

$= \cos 180° \cos 50° + sen\ 180°\ sen\ 50° =$

$= -0{,}6428$

d) $\cos (2 \cdot 50°) = \cos^2 50° - sen^2\ 50° =$

$= -0{,}1736$

e) $\cos (360° - 50°) =$

$= \cos 360° \cos 50° + sen\ 360°\ sen\ 50° =$

$= 0{,}6428$

f) $\cos \frac{50°}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos 50°}{2}} = 0{,}9063$

g) $\cos (30° + 50°) =$

$= \cos 30° \cos 50° - sen\ 30°\ sen\ 50° =$

$= 0{,}1736$

h) $\cos (180° + 50°) =$

$= \cos 180° \cos 50° - sen\ 180°\ sen\ 50° =$

$= -0{,}7877$

38 Resuelve estas ecuaciones.

a) $sen\ (2x + 5°) = 1$

b) $\cos (2x + 5°) = 1$

a) $sen (90° + k \cdot 360°) = 1 \rightarrow$

$\rightarrow 2x + 5° = 90° + k \cdot 360° \rightarrow$

$\rightarrow x = 42{,}5° + k \cdot 180°$, con $k \in \mathbb{Z}$

b) $\cos (k \cdot 360°) = 1 \rightarrow$

$\rightarrow 2x + 5° = k \cdot 360° \rightarrow$

$\rightarrow x = k \cdot 180° - 2{,}5°$; con $k \in \mathbb{Z}$

39 Resuelve estas ecuaciones.

a) $sen\ 2x - 2\ sen\ x = 0$

b) $sen\ 2x + sen\ x = 0$

c) $sen\ 2x = -2 \cos x$

d) $sen\ 2x - 2 \cos x = 0$

a) $2\ sen\ x \cos x - 2\ sen\ x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 2\ sen\ x (\cos x - 1) = 0$

$x_1 = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$

Puede unificarse así: $x = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$

b) $2\ sen\ x \cos x + sen\ x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow sen\ x (2 \cos x + 1) = 0$

$x_1 = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$

$x_3 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$

Puede unificarse así: $x_1 = \frac{2k\pi}{3}$, con $k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$

c) $2\ sen\ x\ cos\ x = -2\ cos\ x \rightarrow$
$\rightarrow 2\ sen\ x\ cos\ x + 2\ cos\ x = 0 \rightarrow$
$\rightarrow 2\ cos\ x(sen\ x + 1) = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} cos\ x = 0 \\ sen\ x + 1 = 0 \rightarrow sen\ x = -1 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 90° + 360° \cdot k \\ x_2 = 270° + 360° \cdot k \end{cases} \rightarrow$$

$\rightarrow x = 90° + 180° \cdot k$, con $k \in \mathbb{Z}$

d) $2\ sen\ x\ cos\ x - 2\ cos\ x = 0 \rightarrow$
$\rightarrow 2\ cos\ x(sen\ x - 1) = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} cos\ x = 0 \\ sen\ x - 1 = 0 \rightarrow sen\ x = 1 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 90° + 180° \cdot k \\ x_2 = 90° + 360° \cdot k \end{cases} \rightarrow$$

$\rightarrow x = 90° + 180° \cdot k$, con $k \in \mathbb{Z}$

40 Resuelve esta ecuación.

$$2\ sen^2\ x + 3\ cos\ x = 0$$

$2(1 - cos^2\ x) + 3\ cos\ x = 0 \rightarrow$
$\rightarrow -2\ cos^2\ x + 3\ cos\ x + 2 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow cos\ x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 2}}{2 \cdot (-2)} =$$

$$\rightarrow \frac{-3 \pm 5}{-4} = \begin{cases} cos\ x = 2 \\ cos\ x = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow cos\ x = -\frac{1}{2}$$

$x_1 = 120° + 360° \cdot k$, con $k \in \mathbb{Z}$
$x_2 = 240° + 360° \cdot k$, con $k \in \mathbb{Z}$

Expresado en radianes:

$$x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

41 Resuelve la siguiente ecuación.

$$sen^2\ x + cos\ x + 1 = 0$$

$1 - cos^2\ x + cos\ x + 1 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow -cos^2\ x + cos\ x + 2 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow cos\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)} =$$

$$= \frac{-1 \pm 3}{-2} = \begin{cases} cos\ x = 2 \\ cos\ x = -1 \end{cases} \rightarrow$$

$\rightarrow cos\ x = -1 \rightarrow x = 180° + 360° \cdot k$, con $k \in \mathbb{Z}$

En radianes: $x = \pi + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$

42 Demuestra que

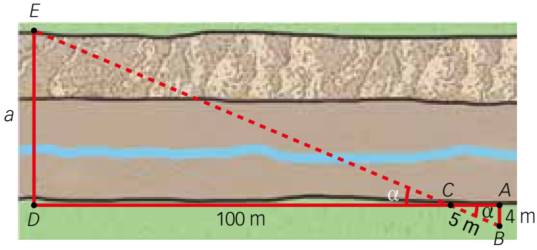
$$\frac{2\ sen\ \alpha}{tg\ 2\alpha} = cos\ \alpha - sen\ \alpha\ tg\ \alpha.$$

$$\frac{2\ sen\ x}{tg\ 2x} = \frac{2\ sen\ x}{\dfrac{2\ tg\ x}{1 - tg^2\ x}} = \frac{sen\ x(1 - tg^2\ x)}{tg\ x} =$$

$$= \frac{sen\ x}{tg\ x} - \frac{sen\ x\ tg^2\ x}{tg\ x} =$$

$$= cos\ x - sen\ x \cdot tg\ x$$

43 Calcula *a*.



$$AC = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3\ \text{m}$$

$$tg\ \alpha = \frac{4}{3} = \frac{a}{100} \rightarrow a = 133{,}33\ \text{m}$$

44 Halla la altura de una torre que se ve bajo un ángulo de 40° y, si se retrocede 20 m, bajo uno de 22°.

Sea h la altura de la torre.

$$\left.\begin{array}{l} tg\ 22° = \dfrac{h}{x + 20} \\ tg\ 40° = \dfrac{h}{x} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow tg\ 22° \cdot (x + 20) = tg\ 40° \cdot x \rightarrow$

$\rightarrow x = 18{,}\overset{\frown}{18} \rightarrow h = 15{,}25$

La torre mide 15,25 m.

45 Calcula el área de un triángulo de lados de 7 y 5 cm si el ángulo que forman mide 30°.

Sea h la altura del triángulo sobre el lado de 7 cm.

$$sen\ 30° = \frac{h}{5} \rightarrow h = 2{,}5\ \text{cm}$$

$$A = \frac{7 \cdot 2{,}5}{2} = 8{,}75\ \text{cm}^2$$

El área del triángulo es 8,75 cm^2.

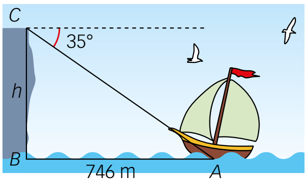
46 Halla el área de un triángulo de base 80 cm y cuyos ángulos adyacentes son 30° y 45°.

$$\left.\begin{aligned} tg\ 30° &= \frac{h}{80 - x} \\ tg\ 45° &= \frac{h}{x} = 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow tg\ 30° \cdot (80 - h) = h \rightarrow h = 29{,}28 \text{ cm}$$

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{80 \cdot 29{,}28}{2} = 1171{,}2 \text{ cm}^2$$

47 Aplica el teorema del seno para calcular la altura del acantilado.



$$\frac{h}{sen\ 35°} = \frac{746}{sen\ 55°} \rightarrow h = 522{,}35 \text{ m}$$

La altura del acantilado es 522,35 m.

48 Dos corredores parten de un mismo punto en distintas direcciones que forman un ángulo de 60°. Al cabo de 2 horas el primero ha recorrido 18 km, y el segundo, 14 km. ¿A qué distancia en línea recta se encuentran?

$$x = \sqrt{14^2 + 18^2 - 2 \cdot 14 \cdot 18 \cdot cos\ 60°} =$$
$$= 16{,}37 \text{ km}$$

Se encuentran a 16,37 km de distancia.

ACTIVIDADES FINALES

1. Conoce las razones trigonométricas de un ángulo

ACTIVIDADES FLASH

49 ●○○ Transforma estos ángulos en grados o radianes, según corresponda.

a) 90°
b) −135°
c) 225°
d) 450°
e) −90°
f) −45°
g) 0,5π rad
h) 3π rad
i) −1,5 rad

a) $\frac{360°}{2\pi} = \frac{90°}{x} \rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ rad

b) $\frac{360°}{2\pi} = \frac{-135°}{x} \rightarrow x = -\frac{3\pi}{4}$ rad

c) $\frac{360°}{2\pi} = \frac{225°}{x} \rightarrow x = \frac{5\pi}{4}$ rad

d) $\frac{360°}{2\pi} = \frac{450°}{x} \rightarrow x = \frac{5\pi}{2}$ rad

e) $\frac{360°}{2\pi} = \frac{-90°}{x} \rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$ rad

f) $\frac{360°}{2\pi} = \frac{-45°}{x} \rightarrow x = -\frac{\pi}{4}$ rad

g) $\frac{360°}{2\pi} = \frac{x}{0{,}5\pi} \rightarrow x = 90°$

h) $\frac{360°}{2\pi} = \frac{x}{3\pi} \rightarrow x = 540°$

i) $\frac{360°}{2\pi} = \frac{x}{-1{,}5} \rightarrow x = -85{,}94°$

50 ●○○ Para cada uno de los siguientes triángulos rectángulos $\widehat{ABC}$, donde A es el vértice del ángulo recto, a la hipotenusa, y b y c los catetos, halla:

a) $sen\ \widehat{B}$ y $tg\ \widehat{B}$ si $b = 12$ cm, $c = 16$ cm
b) $cos\ \widehat{B}$ y $cotg\ \widehat{B}$ si $a = 30$ cm, $c = 22$ cm
c) $cos\ \widehat{C}$ y $cosec\ \widehat{C}$ si $a = 3$ cm, $b = 2$ cm
d) $cos\ \widehat{B}$ y $tg\ \widehat{B}$ si $b = 20$ cm, $c = 20$ cm

a) $a = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$ cm

$$sen\ \widehat{B} = \frac{b}{a} = 0{,}6$$

$$tg\ B = \frac{b}{c} = 0{,}75$$

b) $b = \sqrt{30^2 - 22^2} = \sqrt{416} = 2\sqrt{26}$ cm

$$cos\ \widehat{B} = \frac{c}{a} = \frac{11}{15}$$

$$cotg\ \widehat{B} = \frac{c}{b} = \frac{11}{\sqrt{104}} = \frac{11\sqrt{26}}{52}$$

c) $c = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$ cm

$$cos\ \widehat{C} = \frac{b}{a} = \frac{2}{3}$$

$$cosec\ \widehat{C} = \frac{a}{c} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

d) $a = \sqrt{20^2 + 20^2} = \sqrt{800} = 20\sqrt{2}$ cm

$$\cos \widehat{B} = \frac{c}{a} = \frac{20}{\sqrt{800}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \widehat{B} = \frac{b}{c} = 1$$

51 ●○○ **INVESTIGA.** Determina las razones trigonométricas de los ángulos agudos de una escuadra y un cartabón. ¿Dependen de su tamaño?

La escuadra es un triángulo isósceles, por lo tanto, tiene dos ángulos de 45° y uno de 90°.

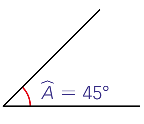
El cartabón tiene tres ángulos diferentes de 90°, 60° y 30°.

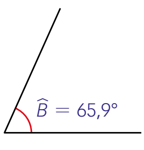
Los ángulos no dependen del tamaño, ya que se trata de triángulos semejantes (ángulos iguales y lados proporcionales).

52 ●●○ **INVENTA.** Dibuja dos ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$ tales que:

$$\operatorname{sen} \widehat{A} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \operatorname{tg} \widehat{B} = \sqrt{5}$$

Respuesta abierta. Por ejemplo:





53 ●●○ En un triángulo rectángulo sabemos que la hipotenusa mide 10 cm y $\operatorname{sen} \widehat{B} = 0{,}5$. Calcula los lados b y c.

$$\frac{b}{0{,}5} = 10 \rightarrow b = 5 \text{ cm}$$

$$c = \sqrt{10^2 - 5^2} = 8{,}66 \text{ cm}$$

54 ●○○ Calcula todas las razones trigonométricas del ángulo agudo α, en cada caso.

a) $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{2}{3}$

b) $\cos \alpha = \dfrac{2}{3}$

c) $\operatorname{tg} \alpha = 2$

a) $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{2}{3} \rightarrow \operatorname{cosec} \alpha = \dfrac{3}{2}$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sec \alpha = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \rightarrow \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

b) $\cos \alpha = \dfrac{2}{3} \rightarrow \sec \alpha = \dfrac{3}{2}$

$$\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3} \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{cosec} \alpha = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \rightarrow \operatorname{cotg} \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

c) $\operatorname{tg} \alpha = 2 \rightarrow \operatorname{cotg} \alpha = \dfrac{1}{2}$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + 2^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sec \alpha = \sqrt{5}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{cosec} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

55 ●●○ Comprueba si son ciertas o no las siguientes igualdades, sin usar la calculadora.

a) $\operatorname{sen} 30° + \operatorname{sen} 60° = \operatorname{sen} 90°$

b) $\cos 90° - \cos 30° = \cos 60°$

c) $\operatorname{tg} 60° = 2 \operatorname{tg} 30°$

d) $\operatorname{sen} 60° = 2 \operatorname{sen} 30° \cos 30°$

e) $\cos 45° = \dfrac{\cos 90°}{2}$

f) $\cos 60° = \cos^2 30° - \operatorname{sen}^2 30°$

a) $\operatorname{sen} 30° + \operatorname{sen} 60° =$

$$= 2 \operatorname{sen}\left(\frac{30° + 60°}{2}\right) \cos\left(\frac{30° - 60°}{2}\right) =$$

$$= 2 \operatorname{sen} 45° \cos(-15°) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \neq$$

$\neq \operatorname{sen} 90°$

No es cierta.

b) $\cos 90° - \cos 30° =$

$= 2\,\text{sen}\left(\dfrac{90° + 30°}{2}\right)\text{sen}\left(\dfrac{90° - 30°}{2}\right) =$

$= 2\,\text{sen}\,60°\,\text{sen}\,30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \neq \cos 60°$

No es cierta.

c) $\text{tg}\,60° = \text{tg}(30° + 30°) =$

$= \dfrac{2\,\text{tg}\,30°}{1 - \text{tg}^2\,30°} \neq 2\,\text{tg}\,30°$

No es cierta.

d) $\text{sen}\,60° = \text{sen}(2 \cdot 30°) =$

$= 2\,\text{sen}\,30°\cos 30°$

Sí es cierta.

e) $\cos 90° = \cos(2 \cdot 45°) =$

$= \cos^2 45° - \text{sen}^2\,45°$

No es cierta.

f) $\cos 60° = \cos(2 \cdot 30°) =$

$= \cos^2 30° - \text{sen}^2\,30°$

Sí es cierta.

56 Halla la cosecante, la secante y la cotangente de:

a) 30°
b) 45°
c) 60°
d) 90°
e) 225°
f) 300°

a) $\text{cosec}\,30° = \dfrac{1}{\text{sen}\,30°} = 2$

$\sec 30° = \dfrac{1}{\cos 30°} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\text{cotg}\,30° = \dfrac{1}{\text{tg}\,30°} = \sqrt{3}$

b) $\text{cosec}\,45° = \dfrac{1}{\text{sen}\,45°} = \sqrt{2}$

$\sec 45° = \dfrac{1}{\cos 45°} = \sqrt{2}$

$\text{cotg}\,45° = \dfrac{1}{\text{tg}\,45°} = 1$

c) $\text{cosec}\,60° = \dfrac{1}{\text{sen}\,60°} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\sec 60° = \dfrac{1}{\cos 60°} = 2$

$\text{cotg}\,60° = \dfrac{1}{\text{tg}\,60°} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\text{cosec}\,90° = \dfrac{1}{\text{sen}\,90°} = 1$

No existen la secante ni la cotangente de 90° porque $\cos 90° = 0$.

e) $\text{cosec}\,225° = \dfrac{1}{\text{sen}\,225°} = -\sqrt{2}$

$\sec 225° = \dfrac{1}{\cos 225°} = -\sqrt{2}$

$\text{cotg}\,225° = \dfrac{1}{\text{tg}\,225°} = 1$

f) $\text{cosec}\,300° = \dfrac{1}{\text{sen}\,300°} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\sec 300° = \dfrac{1}{\cos 300°} = 2$

$\text{cotg}\,300° = \dfrac{1}{\text{tg}\,300°} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

57 Utiliza la calculadora para calcular estas razones.

a) $\text{sen}\,19°\,22'\,37''$
b) $\cos 44°\,52'$
c) $\text{tg}\,1{,}03°$
d) $\sec \dfrac{\pi}{5}$
e) $\text{cosec}\,\dfrac{\pi}{6}$
f) $\text{cotg}\,\pi$

a) 0,3318
b) 0,7088
c) 0,018
d) 1,236
e) 2
f) No existe.

58 Escribe, sin calcularlos, los cosenos de los ángulos siguientes ordenados de menor a mayor.

55° 110° 165° 220° 275° 330°

Los cosenos son negativos en el segundo y tercer cuadrantes.

$\cos 165° < \cos 220° < \cos 110° <$
$< \cos 275° < \cos 55° < \cos 330°$

ACTIVIDADES FLASH

59 Calcula, sin utilizar la calculadora, el valor del seno, el coseno y la tangente de los siguientes ángulos.

a) $-\pi$ rad

b) $-\dfrac{\pi}{2}$ rad

c) $-\dfrac{\pi}{6}$ rad

d) $\dfrac{\pi}{3}$ rad

e) $\dfrac{\pi}{2}$ rad

f) $-\dfrac{3\pi}{2}$ rad

g) $\dfrac{3\pi}{2}$ rad

h) 2π rad

i) $\dfrac{7\pi}{2}$ rad

a) $sen(-\pi) = 0$

$cos(-\pi) = -1$

$tg(-\pi) = 0$

b) $sen\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$

$cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

La tangente no existe.

c) $sen\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$

$cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$tg\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

d) $sen\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$

$tg\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

e) $sen\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

$cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

La tangente no existe.

f) $sen\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right) = 1$

$cos\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$

La tangente no existe.

g) $sen\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = -1$

$cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$

La tangente no existe.

h) $sen\ 2\pi = 0$

$cos\ 2\pi = 1$

$tg\ 2\pi = 0$

i) $sen\left(\dfrac{7\pi}{2}\right) = -1$

$cos\left(\dfrac{7\pi}{2}\right) = 0$

La tangente no existe.

60 Halla, sin utilizar la calculadora, el valor del seno, el coseno y la tangente de los siguientes ángulos.

a) $-60°$

b) $-45°$

c) $120°$

d) $135°$

e) $210°$

f) $225°$

a) $sen(-60°) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$cos(-60°) = \dfrac{1}{2}$

$tg(-60°) = -\sqrt{3}$

b) $sen(-45°) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$cos(-45°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$tg(-45°) = -1$

c) $sen\ 120° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$cos\ 120° = -\dfrac{1}{2}$

$tg\ 120° = -\sqrt{3}$

d) $sen\ 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$cos\ 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$tg\ 135° = -1$

e) $sen\ 210° = -\frac{1}{2}$

$cos\ 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$tg\ 210° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

f) $sen\ 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$cos\ 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$tg\ 225° = 1$

61 Calcula las razones trigonométricas que faltan, sin calcular el ángulo al que corresponden.

Cuadrante	*sen*	*cos*	*tg*
Segundo	0,670	−0,742	−0,903
Tercero	0,891	−0,453	−1,963
Cuarto	−0,597	0,801	−0,745
Tercero	−0,782	−0,623	1,255
Segundo	0,885	−0,465	−1,902
Cuarto	−0,715	0,698	−1,025

62 Sabiendo que un ángulo α del segundo cuadrante cumple que *cosec* $\alpha = 3$, determina las demás razones trigonométricas.

$cosec\ \alpha = 3 \rightarrow sen\ \alpha = \frac{1}{3}$

$cos\ \alpha = -\sqrt{1 - \frac{1}{3^2}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \rightarrow$

$\rightarrow sec\ \alpha = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$

$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \rightarrow cotg\ \alpha = -2\sqrt{2}$

63 Sabiendo que *cotg* $\alpha = -2$. Determina todas las posibles razones trigonométricas de α.

$cotg\ \alpha = -2 \rightarrow tg\ \alpha = -\frac{1}{2}$

$cos^2\ \alpha = \frac{1}{1 + tg^2\ \alpha} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} = 0{,}8 \rightarrow$

$\rightarrow cos\ \alpha = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$sen\ \alpha = \pm\sqrt{1 - 0{,}8} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$

Para que la cotangente sea negativa, seno y coseno deben tener distinto signo:

$\begin{cases} sen\ \alpha = 0{,}4472 \\ cos\ \alpha = -0{,}8944 \end{cases}$ $\begin{cases} sen\ \alpha = -0{,}4472 \\ cos\ \alpha = 0{,}8944 \end{cases}$

64 Utiliza las razones trigonométricas de 30°, 45° y 60° para calcular las de estos ángulos.

120° 225° 240° 300°

a) $sen\ 120° = sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$cos\ 120° = -cos\ 60° = -\frac{1}{2}$

$tg\ 120° = -tg\ 60° = -\sqrt{3}$

b) $sen\ 225° = -sen\ 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$cos\ 225° = -cos\ 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$tg\ 225° = tg\ 45° = 1$

c) $sen\ 240° = -sen\ 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$cos\ 240° = -cos\ 60° = -\frac{1}{2}$

$tg\ 240° = tg\ 60° = \sqrt{3}$

d) $sen\ 300° = -sen\ 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$cos\ 300° = cos\ 60° = \frac{1}{2}$

$tg\ 300° = -tg\ 60° = -\sqrt{3}$

65 Obtén las razones trigonométricas de estos ángulos, sin utilizar la calculadora.

a) 210° c) −45°

b) 330° d) 510°

a) $sen\ 210° = -sen\ 30° = -\frac{1}{2}$

$cos\ 210° = -cos\ 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$tg\ 210° = tg\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $sen\ 330° = -sen\ 30° = -\frac{1}{2}$

$cos\ 330° = cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$tg\ 330° = -tg\ 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $sen(-45°) = -sen\ 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$cos(-45°) = cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$tg(-45°) = -tg\ 45° = -1$

d) $sen\ 510° = sen\ 30° = \frac{1}{2}$

$cos\ 510° = -cos\ 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$tg\ 510° = -tg\ 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

66 Sabiendo que $sen\ \alpha = 0,23$ y que α es un ángulo agudo, calcula las siguientes razones trigonométricas.

a) $cos\ \alpha$

b) $tg\ \alpha$

c) $cos\ (180° - \alpha)$

d) $sen\ (180° + \alpha)$

e) $tg\ (-\alpha)$

f) $sen\ (720° + \alpha)$

a) $\sqrt{1 - 0,23^2} = 0,9732$

b) $\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = 0,2363$

c) $-cos\ \alpha = -0,9732$

d) $-sen\ \alpha = -0,23$

e) $-tg\ \alpha = -0,2363$

f) $sen\ \alpha = 0,23$

67 **INVESTIGA.** Determina en qué intervalo puede tomar valores m para que esta igualdad sea cierta.

$$4m - \frac{1}{2} sen\ x = 0$$

$4m = \frac{1}{2} sen\ x \rightarrow m = \frac{1}{8} sen\ x$

$sen\ x \in [-1, 1] \rightarrow$

$\rightarrow \frac{1}{8} sen\ x \in \left[-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right] \rightarrow$

$\rightarrow m \in \left[-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right]$

68 Utiliza la calculadora para calcular el ángulo α.

a) $cos\ \alpha = 0,4539$

b) $sen\ \alpha = 0,9284$

c) $tg\ \alpha = -2,1618$

d) $cos\ \alpha = -0,2926$

a) $\alpha = 63°$

b) $\alpha = 68,19°$

c) $\alpha = 294,82°$

d) $\alpha = 107,01$

69 Halla las razones trigonométricas de estos ángulos.

a) $\pi < \gamma < \frac{3\pi}{2}$, $cos\ \gamma = -0,54$

b) $\frac{3\pi}{2} < \delta < 2\pi$, $sen\ \delta = -0,64$

a) $sen^2\ \gamma + (-0,54)^2 = 1 \rightarrow$

$\rightarrow sen\ \gamma = -\sqrt{1 - (-0,54)^2} = -0,8417$

$tg\ \gamma = \frac{-0,8417}{-0,54} = 1,5587$

b) $(-0,64)^2 + cos^2\ \delta = 1 \rightarrow$

$\rightarrow cos\ \delta = \sqrt{1 - 0,4096} = 0,768$

$tg\ \delta = \frac{-0,64}{0,768} = 0,833$

70 De un ángulo de un triángulo se sabe que su seno vale 0,7. ¿Podrías determinar de qué ángulo se trata?

$$sen\ \alpha = 0{,}7 \rightarrow \begin{cases} \alpha = 44{,}43° \\ \alpha = 135{,}57° \end{cases}$$

Los dos ángulos pueden pertenecer a un triángulo, por lo que no podemos determinar de qué ángulo se trata.

71 De un ángulo de un triángulo se conoce su coseno, que vale 0,2. ¿Podrías determinar qué ángulo es?

$$cos\ \alpha = 0{,}2 \rightarrow \begin{cases} \alpha = 78{,}46° \\ \alpha = 281{,}54° \end{cases}$$

Solo puede pertenecer a un triángulo el ángulo $\alpha = 78{,}46°$.

72 Si la tangente de un ángulo es dos veces su seno, el signo de este es positivo y el del coseno negativo, determina a qué cuadrante pertenece el ángulo y calcula sus razones trigonométricas.

No existe un ángulo que verifique estas condiciones. No puede cumplirse que la tangente (negativa) sea el doble del seno (positivo).

73 De un ángulo α del 2.º cuadrante se sabe únicamente que su seno es 0,5. Determina las restantes razones trigonométricas de dicho ángulo.

$$cos\ \alpha = -\sqrt{1 - 0{,}5^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{0{,}5}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

74 Sabiendo que la tangente de un ángulo es dos veces su seno y que ambas razones son negativas, halla sus razones trigonométricas.

$$\left.\begin{array}{l} sen\ \alpha < 0 \\ tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} < 0 \end{array}\right\} \rightarrow cos\ \alpha > 0 \rightarrow$$

$\rightarrow \alpha$ pertenece al 4.º cuadrante.

$$tg\ \alpha = 2\ sen\ \alpha \rightarrow cos\ \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow$$
$$\rightarrow \alpha = 300°$$

$$sen\ 300° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\ 300° = -\sqrt{3}$$

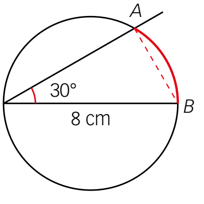
75 Sabiendo que $sen\ \alpha = 0{,}6$ y $cos\ \alpha = 0{,}8$, calcula:

a) $sen\ (180° - \alpha)$
b) $cos\ (90° + \alpha)$
c) $cos\ (180° + \alpha)$
d) $sen\ (-\alpha)$
e) $cos\ (90° - \alpha)$
f) $cos\ (360° - \alpha)$

Conociendo las razones trigonométricas de 90°, 180° y 360°, aplicamos las fórmulas trigonométricas.

a) 0,6
b) −0,6
c) −0,8
d) −0,6
e) 0,6
f) 0,8

76 **RETO.** En la siguiente circunferencia, calcula la medida del segmento *AB* y del arco de circunferencia $\overset{\frown}{AB}$.



$$\hat{A} = 90° \rightarrow \hat{B} = 90° - 30° = 60°$$

$$sen\ 30° = \frac{AB}{8} \rightarrow AB = 4\text{ cm}$$

Como el ángulo de 30° es inscrito, el ángulo central que abarca el arco $\overset{\frown}{AB}$ mide 60°.

Calculamos la longitud de un arco de 60° en una circunferencia de 4 cm de radio.

$$\overset{\frown}{AB} = \frac{2\pi \cdot 4 \cdot 60°}{360°} = \frac{4\pi}{3} = 4{,}19\text{ cm}$$

El arco $\overset{\frown}{AB}$ mide 4,19 cm.

2. Conoce las fórmulas trigonométricas

ACTIVIDADES FLASH

77 A partir de las razones de 30°, 45° y 60°, obtén, sin usar la calculadora, las razones trigonométricas de estos ángulos.

a) 75° b) 120° c) 7° 30′ d) 22° 30′

a) $sen\ 75° = sen\,(30° + 45°) =$
$= sen\ 30°\ cos\ 45° + cos\ 30°\ sen\ 45° =$
$= \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = 0{,}9659$

$cos\ 75° = cos\,(30° + 45°) =$
$= cos\ 30°\ cos\ 45° - sen\ 30°\ sen\ 45° =$
$= \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = 0{,}2588$

$tg\ 75° = tg\,(30° + 45°) =$
$= \dfrac{tg\ 30° + tg\ 45°}{1 - tg\ 30°\ tg\ 45°} = 2 + \sqrt{3}$

b) $sen\ 120° = sen\,(2 \cdot 60°) =$
$= 2\ sen\ 60°\ cos\ 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$cos\ 120° = cos\,(2 \cdot 60°) =$
$= cos^2\ 60° - sen^2\ 60° = -\dfrac{1}{2}$

$tg\ 120° = tg\,(2 \cdot 60°) = \dfrac{2\ tg\ 60°}{1 - tg^2\ 60} =$
$= -\sqrt{3}$

c) $cos\ 15° = cos\ \dfrac{30°}{2} =$
$= \sqrt{\dfrac{1 + cos\ 30°}{2}} = 0{,}9659$

$sen\ (7°\ 30') = sen\ \dfrac{15°}{2} =$
$= \sqrt{\dfrac{1 - cos\ 15°}{2}} = \sqrt{\dfrac{1 - 0{,}9659}{2}} =$
$= 0{,}1305$

$cos\ (7°\ 30') = cos\ \dfrac{15°}{2} =$
$= \sqrt{\dfrac{1 + cos\ 15°}{2}} = \sqrt{\dfrac{1 + 0{,}9659}{2}} =$
$= 0{,}9914$

$tg\ (7°\ 30') = tg\ \dfrac{15°}{2} =$
$= \sqrt{\dfrac{1 - cos\ 15°}{1 + cos\ 15°}} = \sqrt{\dfrac{1 - 0{,}9659}{1 + 0{,}9659}} =$
$= 0{,}1316$

d) $sen\,(22°\ 30') = sen\ \dfrac{45°}{2} =$
$= \sqrt{\dfrac{1 - cos\ 45°}{2}} =$
$= 0{,}383$

$cos\,(22°\ 30') = cos\ \dfrac{45°}{2} =$
$= \sqrt{\dfrac{1 + cos\ 45°}{2}} =$
$= 0{,}924$

$tg\ (22°\ 30') = tg\ \dfrac{45°}{2} =$
$= \sqrt{\dfrac{1 - cos\ 45°}{1 + cos\ 45°}} = 0{,}414$

78 Sabiendo que $cos\ \alpha = 0{,}8$ y que $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, calcula.

a) $cos\ 2\alpha$ c) $cos\ \dfrac{\alpha}{2}$

b) $sen\ 2\alpha$ d) $sen\ \dfrac{\alpha}{2}$

¿A qué cuadrante pertenece el ángulo 2α?

$sen\ \alpha = \sqrt{1 - 0{,}8^2} = 0{,}6$

a) $cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha = 0{,}8^2 - 0{,}6^2 = 0{,}28$

b) $2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha = 2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}96$

c) $\sqrt{\dfrac{1 + cos\ \alpha}{2}} = \sqrt{\dfrac{1 + 0{,}8}{2}} = 0{,}949$

d) $\sqrt{\dfrac{1 - cos\ \alpha}{2}} = \sqrt{\dfrac{1 - 0{,}8}{2}} = 0{,}316$

El ángulo 2α pertenece al primer cuadrante ya que tiene seno y coseno positivos.

79 Sabiendo que $tg\ \alpha = 4$ y que $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, calcula.

a) $tg\ 2\alpha$ b) $sen\ 2\alpha$ c) $cos\ \dfrac{\alpha}{2}$ d) $tg\ \dfrac{\alpha}{2}$

a) $\dfrac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\,\alpha}=\dfrac{2\cdot 4}{1-16}=$
$=-0{,}533$

b) $cos^2\,\alpha=\dfrac{1}{1+tg^2\,\alpha}=\dfrac{1}{1+16}=$
$=0{,}059\rightarrow cos\,\alpha=0{,}243$

$sen^2\,\alpha=\dfrac{1}{1+cotg^2\,\alpha}=\dfrac{1}{1+0{,}0625}=$
$=0{,}941\rightarrow sen\,\alpha=0{,}97$

$sen\,2\alpha=2\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha=$
$=2\cdot 0{,}97\cdot 0{,}243=0{,}471$

c) $\sqrt{\dfrac{1+cos\,\alpha}{2}}=\sqrt{\dfrac{1+0{,}243}{2}}=$
$=0{,}788$

d) $\sqrt{\dfrac{1-cos\,\alpha}{1+cos\,\alpha}}=\sqrt{\dfrac{1-0{,}243}{1+0{,}243}}=0{,}78$

80 Sabiendo que la tangente de α es 2,5 y que α pertenece al primer cuadrante, halla $tg(\alpha+45°)$. Determina también en qué cuadrante está el ángulo $\alpha+45°$.

$tg\,(\alpha+45°)=\dfrac{tg\,\alpha+tg\,45°}{1-tg\,\alpha\,tg\,45°}=$
$=\dfrac{2{,}5+1}{1-2{,}5\cdot 1}=-2{,}33$

El ángulo $\alpha+45°$ pertenece al 2.º cuadrante.

81 Sabiendo que $sen\,56°=0{,}829$ y $cos\,23°=0{,}92$:

a) Calcula el resto de razones de esos ángulos.

b) Halla las razones trigonométricas de 79°.

c) Determina las razones de 33°.

d) ¿Podrías hallar las razones de 28°?

e) ¿Y las de 46°?

a) $0{,}829^2+cos^2\,56°=1\rightarrow$
$\rightarrow cos\,56°=\sqrt{1-0{,}829^2}=0{,}56$

$tg\,56°=\dfrac{0{,}829}{0{,}56}=1{,}48$

$sen^2\,23°+0{,}92^2=1\rightarrow$
$\rightarrow sen\,23°=\sqrt{1-0{,}92^2}=0{,}39$

$tg\,23°=\dfrac{0{,}39}{0{,}92}=0{,}42$

b) $sen\,79°=sen\,(56°+23°)=$
$=sen\,56°\cdot cos\,23°+cos\,56°\cdot sen\,23°=$
$=0{,}829\cdot 0{,}92+0{,}56\cdot 0{,}39=0{,}98$

$cos\,79°=cos\,(56°+23°)=$
$=cos\,56°\cdot cos\,23°-sen\,56°\cdot sen\,23°=$
$=0{,}56\cdot 0{,}92-0{,}829\cdot 0{,}39=0{,}19$

$tg\,79°=tg\,(56°+23°)=$
$=\dfrac{tg\,56°+tg\,23°}{1-tg\,56°\cdot tg\,23°}=$
$=\dfrac{1{,}48+0{,}42}{1-1{,}48\cdot 0{,}42}=5{,}02$

c) $sen\,33°=sen\,(56°-23°)=$
$=sen\,56°\cdot cos\,23°-cos\,56°\cdot sen\,23°=$
$=0{,}829\cdot 0{,}92-0{,}56\cdot 0{,}39=0{,}55$

$cos\,33°=cos\,(56°-23°)=$
$=cos\,56°\cdot cos\,23°+sen\,56°\cdot sen\,23°=$
$=0{,}56\cdot 0{,}92+0{,}829\cdot 0{,}39=0{,}84$

$tg\,33°=tg\,(56°-23°)=$
$=\dfrac{tg\,56°-tg\,23°}{1+tg\,56°\cdot tg\,23°}=$
$=\dfrac{1{,}48-0{,}42}{1+1{,}48\cdot 0{,}42}=0{,}65$

d) $sen\,28°=sen\,\dfrac{56°}{2}=\sqrt{\dfrac{1-cos\,56°}{2}}=$
$=\sqrt{\dfrac{1-0{,}56}{2}}=0{,}47$

$cos\,28°=cos\,\dfrac{56°}{2}=\sqrt{\dfrac{1+cos\,56°}{2}}=$
$=\sqrt{\dfrac{1+0{,}56}{2}}=0{,}88$

$tg\,28°=tg\,\dfrac{56°}{2}=\sqrt{\dfrac{1-cos\,56°}{1+cos\,56°}}=$
$=\sqrt{\dfrac{1-0{,}56}{1+0{,}56}}=0{,}53$

e) $sen\,46°=sen\,(2\cdot 23°)=$
$=2\cdot sen\,23°\cdot cos\,23°=$
$=2\cdot 0{,}39\cdot 0{,}92=0{,}72$

$cos\,46°=cos\,(2\cdot 23°)=$
$=cos^2\,23°-sen^2\,23°=$
$=0{,}92^2-0{,}39^2=0{,}69$

$tg\,46°=tg\,(2\cdot 23°)=$
$=\dfrac{2\cdot tg\,23°}{1-tg^2\,23°}=\dfrac{2\cdot 0{,}42}{1-0{,}42^2}=1{,}02$

82 Calcula *sen* 285° y *cos* 285° expresándolo como:

a) Una suma de ángulos.

b) Una diferencia de ángulos.

a) $sen\ 285° = sen\,(270° + 15°) =$
$= sen\,270°\,cos\,15° + cos\,270°\,sen\,15° =$
$= (-1) \cdot 0{,}966 + 0 \cdot 0{,}259 = -0{,}966$

$cos\ 285° = cos\,(270° + 15°) =$
$= cos\ 270°\ cos\ 15° - sen\ 270°\ sen\ 15° =$
$= 0 \cdot 0{,}966 - (-1) \cdot 0{,}259 = 0{,}259$

b) $sen\ 285° = sen\,(360° - 75°) =$
$= sen\,360°\,cos\,75° - cos\,360°\,sen\,75° =$
$= 0 \cdot 0{,}259 - 1 \cdot 0{,}966 = -0{,}966$

$cos\ 285° = cos\,(360° - 75°) =$
$= cos\,360°\,cos\,75° + sen\,360°\,sen\,75° =$
$= 1 \cdot 0{,}259 + 0 \cdot 0{,}966 = 0{,}259$

83 Simplifica las siguientes expresiones.

a) $sen\ (\alpha - 120°) + sen\ \alpha + sen(\alpha + 120°)$

b) $tg\ (\alpha + \pi) - tg\ (\alpha - \pi)$

c) $cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + cos\,(-\alpha)$

a) $sen\ \alpha\ cos\ 120° - cos\ \alpha\ sen\ 120° +$
$+ sen\ \alpha + sen\ \alpha\ cos\ 120° +$
$+ cos\ \alpha\ sen\ 120° =$
$= 2\ sen\ \alpha\ cos\ 120° + sen\ \alpha = 0$

b) $tg\ \alpha - \dfrac{tg\ \alpha - tg\ \pi}{1 + tg\ \alpha\ tg\ \pi} = tg\ \alpha - tg\ \alpha = 0$

c) $cos\ \dfrac{\pi}{2}\ cos\ \alpha - sen\ \dfrac{\pi}{2}\ sen\ \alpha + cos\ \alpha =$
$= cos\ \alpha - sen\ \alpha$

84 Sabiendo que $sen\ \alpha = \dfrac{2}{5}$ y que $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, sin hallar previamente el valor de α, calcula.

$$sen\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \qquad tg\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$$

a) $cos\ \alpha = -\sqrt{1 - \left(\dfrac{2}{5}\right)^2} = -0{,}917$

$sen\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) =$

$= sen\ \alpha\ cos\ \dfrac{\pi}{4} + cos\ \alpha\ sen\ \dfrac{\pi}{4} =$

$= \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 0{,}917 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = -0{,}366$

b) $tg\ \alpha = \dfrac{\frac{2}{5}}{-0{,}917} = -0{,}436$

$tg\left(\alpha - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{tg\ \alpha - tg\ \frac{\pi}{3}}{1 + tg\ \alpha\ tg\ \frac{\pi}{3}} =$

$= \dfrac{-0{,}436 - \sqrt{3}}{1 - 0{,}436 \cdot \sqrt{3}} = -8{,}855$

85 Se sabe que $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ y $tg\ \alpha = \dfrac{3}{4}$.

a) Halla *sen* α y *cos* α.

b) Sin determinar el ángulo α, calcula.

$$cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \qquad tg\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$$

c) Sin determinar el ángulo α, decide razonadamente en qué cuadrante están estos ángulos.

$$\alpha - \frac{\pi}{4} \qquad \alpha + \frac{\pi}{6}$$

a) $cos^2\ \alpha = \dfrac{1}{1 + tg^2\ \alpha} = 0{,}64 \rightarrow$
$\rightarrow cos\ \alpha = -0{,}8$

$sen^2\ \alpha = \dfrac{1}{1 + cotg^2\ \alpha} = 0{,}36 \rightarrow$
$\rightarrow sen\ \alpha = -0{,}6$

b) $cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right) =$

$= cos\ \alpha\ cos\ \dfrac{\pi}{4} + sen\ \alpha\ sen\ \dfrac{\pi}{4} = -0{,}99$

$tg\left(\alpha + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{tg\alpha + tg\ \frac{\pi}{6}}{1 - tg\ \alpha\ tg\ \frac{\pi}{6}} = 2{,}341$

c) $sen\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right) =$

$= sen\ \alpha\ cos\ \dfrac{\pi}{4} - cos\ \alpha\ sen\ \dfrac{\pi}{4} = 0{,}141$

El ángulo $\alpha - \dfrac{\pi}{4}$ está en el 2.º cuadrante.

Los ángulos α y $\alpha + \dfrac{\pi}{6}$ están en el 3.er cuadrante.

86 Calcula $\cos 285°$ a partir de las razones de los ángulos de 330° y de 45°.

$\cos 285° = \cos(330° - 45°) =$
$= \cos 330° \cos 45° + \sin 330° \sin 45° =$
$= 0{,}2588$

87 Sin utilizar la calculadora y sabiendo que:

$\sin 32° = 0{,}53 \qquad \cos 32° = 0{,}848$

a) Calcula las razones trigonométricas de 62°.

b) Halla las razones de 31°.

c) ¿Podrías calcular las razones trigonométricas de cualquier ángulo cuya medida en grados no tenga minutos ni segundos?

a) $\sin 62° = \sin(32° + 30°) =$
$= \sin 32° \cdot \cos 30° + \cos 32° \cdot \sin 30° =$
$= 0{,}53 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0{,}848 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}88$

$\cos 62° = \cos(32° + 30°) =$
$= \cos 32° \cdot \cos 30° - \sin 32° \cdot \sin 30° =$
$= 0{,}848 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 0{,}53 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}47$

$\operatorname{tg} 62° = \frac{0{,}88}{0{,}47} = 1{,}87$

b) $\sin 31° = \sin \frac{62°}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 62°}{2}} =$
$= \sqrt{\frac{1 - 0{,}46}{2}} = 0{,}52$

$\cos 31° = \cos \frac{62°}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos 62°}{2}} =$
$= \sqrt{\frac{1 + 0{,}46}{2}} = 0{,}85$

$\operatorname{tg} 31° = \frac{0{,}52}{0{,}85} = 0{,}61$

c) Sí podemos calcular las razones de cualquier ángulo, ya que a partir de las medidas de 32° y de 31° hallamos las razones trigonométricas de 1°, y a partir de ellas, las demás.

88 **RETO.** Demuestra que:

$\cos 140° + \cos 100° + \cos 20° = 0$

$\cos 140° + \cos 100° + \cos 20° =$
$= \cos 140° +$
$+ 2\cos\left(\frac{100° + 20°}{2}\right)\cos\left(\frac{100° - 20°}{2}\right) =$
$= \cos 140° + 2\cos 60° \cos 40° =$
$= \cos 140° + \cos 40° =$
$= 2\cos\left(\frac{140° + 40°}{2}\right)\cos\left(\frac{140° - 40°}{2}\right) =$
$= 2\cos 90° \cos 50° = 0$

89 **INVESTIGA.** Halla una fórmula para calcular $\sin 3x$ en función de $\sin x$. Aplícala para hallar $\sin 3x$ sabiendo que $\sin x = \frac{1}{3}$.

$\sin 3x = \sin(2x + x) =$
$= \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x =$
$= 2\sin x \cos^2 x + (\cos^2 x - \sin^2 x)\sin x =$
$= 3\sin x \cos^2 x - \sin^3 x =$
$= 3\sin x(1 - \sin^2 x) - \sin^3 x =$
$= 3\sin x - 4\sin^3 x$

$\sin 3x = 3 \cdot \frac{1}{3} - 4\left(\frac{1}{3}\right)^3 = 0{,}852$

90 Escribe las expresiones en forma de producto.

a) $\cos 2\alpha - \cos \alpha$

b) $\cos \alpha - \cos 4\alpha$

c) $\sin \alpha - \cos \alpha$

d) $\cos \alpha + \sin 3\alpha$

a) $\cos 2\alpha - \cos \alpha =$
$= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - \cos \alpha =$
$= \cos \alpha(\cos \alpha - 1) - (1 - \cos^2 \alpha) =$
$= \cos \alpha(\cos \alpha - 1) -$
$- (1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha) =$
$= (\cos \alpha - 1) \cdot (2\cos \alpha + 1)$

b) $\cos \alpha - \cos 4\alpha =$
$= \cos \alpha - \cos(3\alpha + \alpha) =$
$= \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sin 3\alpha -$
$- \cos \alpha \cdot \cos 3\alpha =$
$= \cos \alpha(1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin 3\alpha - \cos 3\alpha)$

O bien:

$\cos \alpha - \cos 4\alpha =$
$= -2\sin \frac{5\alpha}{2} \sin\left(-\frac{3\alpha}{2}\right) =$
$= 2\sin \frac{5\alpha}{2} \sin \frac{3\alpha}{2}$

c) $sen\ \alpha - cos\ \alpha = tg\ \alpha \cdot cos\ \alpha - cos\ \alpha =$
$= cos\ \alpha (tg\ \alpha - 1)$

d) $cos\ \alpha + sen\ 3\alpha =$
$= cos\ \alpha + sen(\alpha + 2\alpha) =$
$= cos\ \alpha + sen\ \alpha \cdot cos\ 2\alpha +$
$+ cos\ \alpha \cdot sen\ 2\alpha =$
$= cos\ \alpha + cos\ \alpha \cdot tg\ \alpha \cdot cos\ 2\alpha +$
$+ cos\ \alpha \cdot sen\ 2\alpha =$
$= cos\ \alpha (1 + tg\ \alpha \cdot cos\ 2\alpha + sen\ 2\alpha)$

91 **RETO.** Si $sen\ \alpha + sen\ \beta = \sqrt{\frac{5}{3}}$ y $cos\ \alpha + cos\ \beta = 1$, ¿cuánto vale $cos(\alpha - \beta)$?

$sen\ \alpha + sen\ \beta =$
$= 2\ sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{5}{3}}$

$cos\ \alpha + cos\ \beta =$
$= 2\ cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 1$

$tg\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{5}{3}} \rightarrow \frac{\alpha+\beta}{2} = 52{,}24°$

Sustituimos en la segunda expresión para hallar $cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

$2\ cos\ 52{,}24°\ cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 1 \rightarrow$
$\rightarrow cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 0{,}817$

Aplicamos la fórmula del coseno del ángulo mitad.

$cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + cos(\alpha-\beta)}{2}} \rightarrow$
$\rightarrow 0{,}817^2 = \frac{1 + cos(\alpha-\beta)}{2} \rightarrow$
$\rightarrow cos(\alpha - \beta) = 2 \cdot 0{,}817^2 - 1 = 0{,}335$

3. Resuelve ecuaciones trigonométricas

ACTIVIDADES FLASH

92 Utiliza la calculadora para resolver estas ecuaciones.

a) $5\ cos\ x = 2$
b) $7\ sen\ x = -1$
c) $cos\ 2x + 1 = \frac{1}{2}$
d) $3\ sen\ 2x = 1$
e) $5\ tg\ x = 10$
f) $\frac{tg\ 2x}{2} = 1$

a) $cos\ x = \frac{2}{5} \rightarrow x = 66{,}42°$

b) $sen\ x = -\frac{1}{7} \rightarrow x = -8{,}21°$

c) $cos\ 2x = -\frac{1}{2} \rightarrow 2x = 120° \rightarrow$
$\rightarrow x = 60°$

d) $sen\ 2x = \frac{1}{3} \rightarrow 2x = 19{,}47° \rightarrow$
$\rightarrow x = 9{,}74°$

e) $tg\ x = 2 \rightarrow x = 63{,}43°$

f) $tg\ 2x = 2 \rightarrow 2x = 63{,}43° \rightarrow$
$\rightarrow x = 31{,}72°$

93 Calcula el valor del ángulo x en estas ecuaciones.

a) $2\ sen\ 2x = 1$
b) $sec\ 2x = 2$
c) $sen\ (3x - 60°) = 0$
d) $cosec\ 3x = 1$
e) $2\ cos\ 2x = \sqrt{3}$
f) $tg\ 3x - 1 = 0$
g) $sen\ x = \sqrt{3}\ cos\ x$
h) $sen\ x - cos\ x = 0$

a) $sen\ 2x = \frac{1}{2} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} 2x = 30° + 360° \cdot k \\ 2x = 150° + 360° \cdot k \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 15° + 180° \cdot k \\ x_2 = 75° + 180° \cdot k \end{cases}$

con $k \in \mathbb{Z}$

b) $cos\ 2x = \frac{1}{2} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} 2x = 60° + 360° \cdot k \\ 2x = 300° + 360° \cdot k \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 30° + 180° \cdot k \\ x_2 = 150° + 180° \cdot k \end{cases}$, con $k \in \mathbb{Z}$

c) $3x - 60° = 180° \cdot k \rightarrow$
$\rightarrow 3x = 60° + 180° \cdot k \rightarrow$
$\rightarrow x = 20° + 60° \cdot k$, con $k \in \mathbb{Z}$

d) $sen\ 3x = 1 \rightarrow$
$\rightarrow 3x = 90° + 360° \cdot k \rightarrow$
$\rightarrow x = 30° + 120° \cdot k$, con $k \in \mathbb{Z}$

e) $\cos 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} 2x = 30° + 360° \cdot k \\ 2x = 330° + 360° \cdot k \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 15° + 180° \cdot k \\ x_2 = 165° + 180° \cdot k \end{cases}$, con $k \in \mathbb{Z}$

f) $tg\ 3x = 1 \rightarrow$
$\rightarrow 3x = 45° + 180° \cdot k \rightarrow$
$\rightarrow x = 15° + 60° \cdot k$, con $k \in \mathbb{Z}$

g) $tg\ x = \sqrt{3} \rightarrow$
$\rightarrow x = 60° + 180° \cdot k$, con $k \in \mathbb{Z}$

h) $sen\ x = \cos x \rightarrow$
$\rightarrow x = 45° + 180°k$, con $k \in \mathbb{Z}$

94 **INVENTA.** Escribe dos ecuaciones trigonométricas diferentes en las que una de sus soluciones sea $x = \pi + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$\cos x + 1 = 0$

$sen\ x = \cos x + 1$

95 Resuelve estas ecuaciones trigonométricas.

a) $1 + 2\ sen \dfrac{x}{2} = 3$

b) $5\ sen\ x = 3\ sen\ x - \sqrt{2}$

c) $2\cos^2 x - 3\cos x = -1$

d) $sen^2 x + 1 = 2\ sen\ x$

e) $sen\ x + \cos^2 x = \dfrac{5}{2}$

f) $3\ sen^2 x + 2\cos x = 2$

g) $9 - 13\cos x = \dfrac{-4}{1 + tg^2 x}$

h) $sen\ x + \cos x = 1$

a) $sen \dfrac{x}{2} = 1 \rightarrow \dfrac{x}{2} = 90° + 360° \cdot k \rightarrow$
$\rightarrow x = 180° + 360° \cdot k$, con $k \in \mathbb{Z}$

b) $2\ sen\ x = -\sqrt{2} \rightarrow sen\ x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 225° + 360° \cdot k \\ x_2 = 315° + 360° \cdot k \end{cases}$, con $k \in \mathbb{Z}$

c) $\cos x = \dfrac{3 \pm 1}{4} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \rightarrow x_1 = 360° \cdot k \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_2 = 60° + 360° \cdot k \\ x_3 = 300° + 360° \cdot k \end{cases} \end{cases}$

con $k \in \mathbb{Z}$

d) $sen\ x = \dfrac{2 \pm 0}{2} = 1 \rightarrow$
$\rightarrow x = 90° + 360° \cdot k$, con $k \in \mathbb{Z}$

e) $sen\ x + 1 - sen^2 x - \dfrac{5}{2} = 0 \rightarrow$

$\rightarrow -sen^2 x + sen\ x - \dfrac{3}{2} = 0 \rightarrow$

$\rightarrow sen\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-5}}{-2} \rightarrow$

$\rightarrow$ No tiene solución.

f) $3(1 - \cos^2 x) + 2\cos x - 2 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow -3\cos^2 x + 2\cos x + 1 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow \cos x = \dfrac{-2 \pm 4}{-6} \rightarrow$

$\begin{cases} \cos x = -\dfrac{1}{3} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 109{,}47° + 360° \cdot k \\ x_2 = 250{,}53° + 360° \cdot k \end{cases} \\ \cos x = 1 \rightarrow x_3 = 360° \cdot k \end{cases}$

con $k \in \mathbb{Z}$

g) $9 - 13\cos x + \dfrac{4}{1 + tg^2 x} = 0 \rightarrow$
$\rightarrow 9 - 13\cos x + 4\cos^2 x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \cos x = \dfrac{13 \pm 5}{8} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{9}{4} \\ \cos x = 1 \rightarrow x = 360° \cdot k \end{cases}$, con $k \in \mathbb{Z}$

h) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} sen\ x + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow$

$$\rightarrow \cos 45° \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 45° \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{sen}(x + 45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + 45° = 45° + 360° \cdot k \\ x + 45° = 135° + 360° \cdot k \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 360° \cdot k \\ x_2 = 90° + 360° \cdot k' \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{Z}$

96 Calcula el valor de x en cada caso.

a) $\dfrac{\operatorname{sen}(60° - x)}{\cos x} = 1$

b) $tg\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) + tg\ x - 1 = 0$

c) $\operatorname{sen}(x + 30°) + \cos(x + 60°) =$
$= 1 + \cos 2x$

a) $\dfrac{\sqrt{3}\cos x - \operatorname{sen} x}{2 \cos x} = 1 \rightarrow$

$\rightarrow \sqrt{3} - tg\, x = 2$

$\rightarrow tg\, x = -0{,}2679 \rightarrow$

$\rightarrow x = 165° + 180° \cdot k$, con $k \in \mathbb{Z}$

b) $\dfrac{1 - tg\ x}{1 + tg\ x} + tg\, x - 1 = 0$

$\rightarrow tg^2\, x - tg\, x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow tg\, x(tg\, x - 1) = 0$

$$tg\, x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0° + 360° \cdot k \\ x_2 = 180° + 360° \cdot k \end{cases}$$

$tg\, x - 1 = 0 \rightarrow tg\, x = 1 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} x_3 = 45° + 360° \cdot k \\ x_4 = 225° + 360° \cdot k \end{cases}$$

Las soluciones válidas son $x = 180° \cdot k$, con $k \in \mathbb{Z}$.

c) $\dfrac{\sqrt{3}\operatorname{sen} x}{2} + \dfrac{\cos x}{2} + \dfrac{\cos x}{2} -$
$- \dfrac{\sqrt{3}\operatorname{sen} x}{2} =$

$= \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \rightarrow$

$\rightarrow \cos x = 2\cos^2 x \rightarrow$

$\rightarrow \cos x\,(2 \cos x - 1) = 0$

$$\cos x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 90° + 360° \cdot k \\ x_2 = 270° + 360° \cdot k \end{cases}$$

$2 \cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} x_3 = 60° + 360° \cdot k \\ x_4 = 300° + 360° \cdot k \end{cases}$$

Las soluciones válidas son:
$x_1 = 90° + 180° \cdot k$,
$x_2 = 60° + 360° \cdot k$
y $x_3 = 300° + 360° \cdot k$, con $k \in \mathbb{Z}$

97 Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas.

a) $tg(x + 45°) + tg(x - 45°) = 2\, cotg\, x$

b) $tg\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) - 1 = 0$

c) $\operatorname{sen}(x + 30°) - \cos x = 0$

a) $\dfrac{tg\ x + tg\ 45°}{1 - tg\ x\ tg\ 45°} + \dfrac{tg\ x - tg\ 45°}{1 + tg\ x\ tg\ 45°} =$

$= \dfrac{2}{tg\ x} \rightarrow$

$\rightarrow (tg\ x + 1)^2\, tg\ x +$

$+ (tg\ x - 1)(1 - tg\ x)tg\ x =$

$= 2(1 - tg^2 x) \rightarrow$

$\rightarrow 6\, tg^2 x = 2 \rightarrow$

$\rightarrow tg\ x = \pm \dfrac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 30° + 180° \cdot k \\ x_2 = 150° + 180° \cdot k \end{cases}, \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

b) $tg\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = 1 \rightarrow \dfrac{\pi}{4} - x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k \rightarrow$

$\rightarrow x = -\pi k \rightarrow x = \pi k$, con $k \in \mathbb{Z}$

c) $\operatorname{sen}(x + 30°) - \operatorname{sen}(90° - x) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 2 \cos 60° \operatorname{sen}(x - 30°) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \operatorname{sen}(x - 30°) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x - 30° = 180° \cdot k \rightarrow$

$\rightarrow x = 30° + 180° \cdot k$, con $k \in \mathbb{Z}$

98 Comprueba que se cumple la siguiente relación trigonométrica.

$$\frac{1 - \cos^2 \alpha}{\operatorname{sen} 2\alpha} = \frac{tg\ \alpha}{2}$$

$$\frac{1 - \cos^2 \alpha}{\operatorname{sen} 2\alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{2 \cos \alpha} = \frac{tg\ \alpha}{2}$$

99 Demuestra que es cierta la igualdad.

$$\operatorname{sen} 2\alpha = \frac{2\, tg\ \alpha}{1 + tg^2\ \alpha}$$

$sen\ 2\alpha = 2\ sen\ \alpha \cdot cos\ \alpha =$

$= \dfrac{2\ sen\ \alpha\ cos^2\alpha}{cos\ \alpha} = \dfrac{2\ tg\ \alpha}{\dfrac{1}{cos^2\alpha}} = \dfrac{2\ tg\ \alpha}{1 + tg^2\alpha}$

100 **INVESTIGA.** ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $cos\,(sen\ 2x + \pi) = -1$?

$cos\,(sen\ 2x + \pi) = -1 \rightarrow$
$\rightarrow sen\ 2x + \pi = \pi + 2\pi k \rightarrow$
$\rightarrow sen\ 2x = 2\pi k$

La única solución posible es que $k = 0$, ya que en otro caso tendríamos seno con valor absoluto mayor que 1. Por tanto, si $k = 0$:

$sen\ 2x = 0 \rightarrow 2x = 0 + \pi k \rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}k$, con $k \in \mathbb{Z}$

Por lo tanto, tiene infinitas soluciones.

101 Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas.

a) $sen\ x - 2\ sen\ x\ cos\ x = 0$
b) $cos\ x = 2\ sen\ x\ cos\ x$
c) $4\ sen^2\ 2x = 1$
d) $cos\ 2x - sen^2\ x = 1$

a) $sen\ x(1 - 2\ cos\ x) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} sen\ x = 0 \rightarrow x_1 = 180° \cdot k \\ 1 - 2\ cos\ x = 0 \rightarrow cos\ x = \dfrac{1}{2} \rightarrow \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} x_2 = 60° + 360° \cdot k \\ x_3 = 300° + 360° \cdot k \end{cases}$, con $k \in \mathbb{Z}$

b) $cos\ x(1 - 2\ sen\ x) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} cos\ x = 0 \rightarrow x_1 = 90° + 180° \cdot k \\ 1 - 2\ sen\ x = 0 \rightarrow sen\ x = \dfrac{1}{2} \rightarrow \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} x_2 = 30° + 360° \cdot k \\ x_3 = 150° + 360° \cdot k \end{cases}$

Estas soluciones pueden unificarse:
$x = 30° + 120° \cdot k$, con $k \in \mathbb{Z}$

c) $4\ sen^2\ 2x = 1 \rightarrow sen\ 2x = \pm\dfrac{1}{2} \rightarrow$

$sen\ 2x = \dfrac{1}{2} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} 2x = 30° + 360° \cdot k \\ 2x = 150° + 360° \cdot k \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 15° + 180° \cdot k \\ x_2 = 75° + 180° \cdot k \end{cases}$

$sen\ 2x = -\dfrac{1}{2} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} 2x = 210° + 360° \cdot k \\ 2x = 330° + 360° \cdot k \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} x_3 = 105° + 180° \cdot k \\ x_4 = 165° + 180° \cdot k \end{cases}$

Estas soluciones pueden unificarse:
$x_1 = 15° + 90° \cdot k$ y $x_2 = 75° + 90° \cdot k$, con $k \in \mathbb{Z}$

d) $cos^2\ x - sen^2\ x - sen^2\ x - 1 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow -3\ sen^2\ x = 0 \rightarrow sen\ x = 0 \rightarrow$
$\rightarrow x = 180° \cdot k$, con $k \in \mathbb{Z}$

102 **INVENTA.** Escribe una ecuación trigonométrica cuyas soluciones sean $x_1 = \dfrac{\pi}{2}$ y $x_2 = \pi$ en el intervalo $[0, \pi]$.

Respuesta abierta. Por ejemplo:
$sen\ x\ cos\ x = 0$

103 Encuentra la solución de las siguientes ecuaciones.

a) $cos\ x\ tg\ x = \dfrac{1}{2}$
b) $cos\ 2x + sen\ 2x = 1$
c) $cos\ 2x - sen\ 2x = 0$
d) $sen\ 2x + cos\ x = 0$
e) $sen\ x\ cotg\ x = -\dfrac{1}{4}$
f) $sen\ 2x + sen\ 2x = 0$
g) $tg\ x + sen\ x = 0$
h) $tg\ x - sen\ 2x = 0$

a) $sen\ x = \dfrac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 30° + 360° \cdot k \\ x_2 = 150° + 360° \cdot k \end{cases}$,
con $k \in \mathbb{Z}$

b) $cos^2\ x - sen^2\ x + 2\ sen\ x \cdot cos\ x =$
$= cos^2\ x + sen^2\ x$
$\rightarrow -2\ sen^2\ x + 2\ sen\ x \cdot cos\ x = 0 \rightarrow$
$\rightarrow 2\ sen\ x\,(-sen\ x + cos\ x) = 0$

$sen\ x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0° + 360° \cdot k \\ x_2 = 180° + 360° \cdot k \end{cases}$

$sen\ x = cos\ x \rightarrow \begin{cases} x_3 = 45° + 360° \cdot k \\ x_4 = 225° + 360° \cdot k \end{cases}$

Estas soluciones pueden unificarse:
$x_1 = 45° + 180° \cdot k$ y $x_2 = 180° \cdot k$, con $k \in \mathbb{Z}$

c) $\cos 2x - \sin 2x = 0 \rightarrow$
$\rightarrow \cos 2x = \sin 2x \rightarrow$
$\rightarrow 2x = 45° + 180° \cdot k \rightarrow$
$\rightarrow x = \dfrac{45°}{2} + 90° \cdot k$, con $k \in \mathbb{Z}$

d) $(2 \sin x + 1) \cos x = 0 \rightarrow$
$2 \sin x + 1 = 0$
$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 90° + 360° \cdot k \\ x_2 = 270° + 360° \cdot k \end{cases}$, con $k \in \mathbb{Z}$
$\cos x = 0$
$\rightarrow \begin{cases} x_3 = 210° + 360° \cdot k \\ x_4 = 330° + 360° \cdot k \end{cases}$, con $k \in \mathbb{Z}$

e) $\cos x = -\dfrac{1}{4} \rightarrow$
$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 104{,}48° + 360° \cdot k \\ x_2 = 255{,}52° + 360° \cdot k \end{cases}$
con $k \in \mathbb{Z}$

f) $2 \sin 2x = 0 \rightarrow$
$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 0° + 180° \cdot k \\ x_2 = 90° + 180° \cdot k \end{cases}$, con $k \in \mathbb{Z}$

g) $\sin x \left(\dfrac{1}{\cos x} + 1 \right) = 0$
$\sin x = 0 \rightarrow$
$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 0° + 360° \cdot k \\ x_2 = 180° + 360° \cdot k \end{cases}$, con $k \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\cos x} + 1 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow x_3 = 180° + 360° \cdot k$, con $k \in \mathbb{Z}$

h) $\dfrac{\sin x}{\cos x} - 2 \sin x \cdot \cos x = 0 \rightarrow$
$\rightarrow \sin x (1 - 2 \cos^2 x) = 0$
$\sin x = 0 \rightarrow$
$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 0° + 360° \cdot k \\ x_2 = 180° + 360° \cdot k \end{cases}$, con $k \in \mathbb{Z}$
$1 - 2 \cos^2 x = 0 \rightarrow$
$\rightarrow \cos x = \sqrt{\dfrac{1}{2}} \rightarrow$
$\rightarrow \begin{cases} x_3 = 45° + 360° \cdot k \\ x_4 = 315° + 360° \cdot k \end{cases}$, con $k \in \mathbb{Z}$

104 ●●○ **INVESTIGA.** Busca en cada caso un ángulo:

a) Agudo tal que el triple de su tangente es igual al doble de su coseno.

b) Obtuso tal que su seno sumado con el triple de su coseno da -1.

c) Agudo tal que su seno multiplicado por su coseno da 0,25.

a) $3 \operatorname{tg} x = 2 \cos x \rightarrow$
$\rightarrow 3 \dfrac{\sin x}{\cos x} - 2 \cos x = 0 \rightarrow$
$\rightarrow 3 \sin x - 2 \cos^2 x = 0 \rightarrow$
$\rightarrow 3 \sin x - 2(1 - \sin^2 x) = 0 \rightarrow$
$\rightarrow 2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow \sin x = \dfrac{-3 \pm 5}{4} \rightarrow$
$\rightarrow \begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{2} \rightarrow \\ \rightarrow x = 30° + 360° \cdot k, \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\ \sin x = -2 \rightarrow \text{No tiene solución.} \end{cases}$

b) $\sin x + 3 \cos x = -1 \rightarrow$
$\rightarrow \sqrt{1 - \cos^2 x} + 3 \cos x = -1 \rightarrow$
$\rightarrow 1 - \cos^2 x = 1 + 9 \cos^2 x + 6 \cos x \rightarrow$
$\rightarrow 10 \cos^2 x + 6 \cos x = 0 \rightarrow$
$\cos x (10 \cos x + 6) = 0$
$\begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x_1 = 270° + 360° \cdot k \\ \cos x = -\dfrac{3}{5} \rightarrow x_2 = 126{,}57° + 360° \cdot k \end{cases}$
con $k \in \mathbb{Z}$

c) $\sin x \cos x = \dfrac{1}{4} \rightarrow$
$\rightarrow \dfrac{\sin 2x}{2} = \dfrac{1}{4} \rightarrow$
$\rightarrow \sin 2x = \dfrac{1}{2} \rightarrow$
$\rightarrow 2x = 30° \rightarrow x = 15°$

105 ●○○ Resuelve estas ecuaciones trigonométricas.

a) $2 \sin x - \dfrac{1}{\cos x} = 0$

b) $\sin x + \cos 2x = 0$

c) $\sin x \operatorname{tg} x + \cos x = \dfrac{1}{2}$

d) $5 - 7 \sin x - 2 \cos^2 x = 0$

a) $2 \sin x \cos x - 1 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow \sin 2x = 1 \rightarrow$
$\rightarrow 2x = 90° + 360° \cdot k \rightarrow$
$\rightarrow x = 45° + 180° \cdot k$, con $k \in \mathbb{Z}$

b) $sen\, x + (1 - sen^2 x) - sen^2 x = 0 \rightarrow$
$\rightarrow -2\, sen^2 x + sen\, x + 1 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow sen\, x = \dfrac{-1 \pm 3}{-4} \rightarrow$
$\rightarrow \begin{cases} sen\, x = -\dfrac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 210° + 360° \cdot k \\ x_2 = 330° + 360° \cdot k \end{cases} \\ sen\, x = 1 \rightarrow x_3 = 90° + 360° \cdot k \end{cases}$
con $k \in \mathbb{Z}$

c) $\dfrac{sen^2 x}{cos\, x} + cos\, x = \dfrac{1}{2} \rightarrow$
$\rightarrow \dfrac{sen^2 x + cos^2 x}{cos\, x} = \dfrac{1}{2} \rightarrow$
$\rightarrow \dfrac{1}{cos\, x} = \dfrac{1}{2} \rightarrow$
$\rightarrow cos\, x = 2 \rightarrow$
$\rightarrow$ No tiene solución.

d) $5 - 7\, sen\, x - 2(1 - sen^2 x) = 0 \rightarrow$
$\rightarrow 2\, sen^2 x - 7\, sen\, x + 3 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow sen\, x = \dfrac{7 \pm 5}{4} \rightarrow$
$\rightarrow \begin{cases} sen\, x = 3 \rightarrow \text{No tiene solución.} \\ sen\, x = \dfrac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 30° + 360° \cdot k \\ x_2 = 150° + 360° \cdot k \end{cases} \end{cases}$
con $k \in \mathbb{Z}$

106 **INVESTIGA.** ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $2^{sen^2 x} + 2^{cos^2 x} = 2$ en el intervalo $0 \leq x < 2\pi$?

$2^{sen^2 x} + 2^{1 - sen^2 x} = 2 \rightarrow 2^{sen^2 x} + \dfrac{2}{2^{sen^2 x}} = 2 \rightarrow$
$\rightarrow (2^{sen^2 x})^2 + 2 - 2 \cdot 2^{sen^2 x} = 0 \rightarrow$
$\rightarrow 2^{sen^2 x} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} \rightarrow$
$\rightarrow$ No tiene solución.

107 **RETO.** Determina las soluciones de la ecuación $sen^4 x + cos^4 x = 1$.

$sen^4 x + (1 - sen^2 x)^2 = 1 \rightarrow$
$\rightarrow sen^4 x + 1 - 2\, sen^2 x + sen^4 x = 1 \rightarrow$
$\rightarrow 2\, sen^4 x - 2\, sen^2 x = 0 \rightarrow$
$\rightarrow sen^2 x (sen^2 x - 1) = 0 \rightarrow$
$\rightarrow \begin{cases} sen^2 x = 0 \rightarrow x = 180° \cdot k \\ sen^2 x = 1 \rightarrow x = 90° + 180° \cdot k \end{cases} \rightarrow$
$\rightarrow x = 90° \cdot k$, con $k \in \mathbb{Z}$

108 Utiliza las fórmulas del ángulo doble y simplifica.

a) $\dfrac{1 - cos\, 2\alpha}{cos^2 \alpha}$

b) $\dfrac{1 - cos\, 2\alpha}{sen^2 \alpha}$

c) $\dfrac{1 + cos\, 2\alpha}{cos^2 \alpha}$

a) $\dfrac{1 - cos^2 \alpha + sen^2 \alpha}{cos^2 \alpha} = \dfrac{2\, sen^2 \alpha}{cos^2 \alpha} =$
$= 2\, tg^2 \alpha$

b) $\dfrac{1 - cos^2 \alpha + sen^2 \alpha}{sen^2 \alpha} = \dfrac{2 sen^2 \alpha}{sen^2 \alpha} = 2$

c) $\dfrac{1 + cos^2 \alpha - sen^2 \alpha}{cos^2 \alpha} = \dfrac{2\, cos^2 \alpha}{cos^2 \alpha} = 2$

109 **RETO.** Expresa $\dfrac{1 + cos\, \alpha}{sen\, \alpha}$ en función de una sola razón del ángulo $\dfrac{\alpha}{2}$.

$$\dfrac{1 + cos\, \alpha}{sen\, \alpha} = \dfrac{1 + cos\left(2 \cdot \dfrac{\alpha}{2}\right)}{sen\left(2 \cdot \dfrac{\alpha}{2}\right)} =$$
$$= \dfrac{1 + cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) - sen^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}{2\, sen\dfrac{\alpha}{2}\, cos\dfrac{\alpha}{2}} =$$
$$= \dfrac{2\, cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}{2\, sen\dfrac{\alpha}{2}\, cos\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{cos\dfrac{\alpha}{2}}{sen\dfrac{\alpha}{2}} = cotg\, \dfrac{\alpha}{2}$$

110 Demuestra que se verifican estas igualdades.

a) $1 + sen\, 2\alpha =$
$= 2\, sen\, (\alpha + 45°)\, cos\, (\alpha - 45°)$

b) $cos\, 2\alpha = 2\, sen\, (\alpha + 45°)\, cos\, (\alpha + 45°)$

Demuestra que se cumple para cualquier ángulo α.

a) $2\, sen\, (\alpha + 45°)\, cos\, (\alpha - 45°) =$
$= 2\, (sen\, \alpha\, cos\, 45° + cos\, \alpha\, sen\, 45°) \cdot$
$\cdot (cos\, \alpha\, cos\, 45° + sen\, \alpha\, sen\, 45°) =$
$= 2\left(\dfrac{\sqrt{2}\, sen\, \alpha}{2} + \dfrac{\sqrt{2}\, cos\, \alpha}{2}\right)$

$$\left(\frac{\sqrt{2}\cos\alpha}{2}+\frac{\sqrt{2}\,sen\,\alpha}{2}\right)=$$
$$=2\left(\frac{2\cos^2\alpha}{4}+\frac{4\,sen\,\alpha\cos\alpha}{4}+\right.$$
$$\left.+\frac{2\,sen^2\alpha}{4}\right)=$$
$$=\cos^2\alpha+sen^2\alpha+2\,sen\,\alpha\cos\alpha=$$
$$=1+sen\,2\alpha$$

b) $2\,sen\,(\alpha+45°)\cos(\alpha+45°)=$
$$=2\,(sen\,\alpha\cos 45°+\cos\alpha\,sen\,45°)$$
$$(\cos\alpha\cos 45°-sen\,\alpha\,sen\,45°)=$$
$$=2\left(\frac{\sqrt{2}\,sen\,\alpha}{2}+\frac{\sqrt{2}\cos\alpha}{2}\right)$$
$$\left(\frac{\sqrt{2}\cos\alpha}{2}-\frac{\sqrt{2}\,sen\,\alpha}{2}\right)=$$
$$=2\left(\frac{2\cos^2\alpha}{4}-\frac{2\,sen^2\alpha}{4}\right)=$$
$$=\cos^2\alpha-sen^2\alpha=\cos 2\alpha$$

111 ●●○ Demuestra que son ciertas estas igualdades.

a) $\dfrac{1-\cos^2\alpha}{sen\,2\alpha}=\dfrac{tg\,\alpha}{2}$

b) $sen\,2\alpha=\dfrac{2\,tg\,\alpha}{1+tg^2\alpha}$

a) $$\frac{1-\cos^2\alpha}{sen\,2\alpha}=\frac{sen^2\alpha}{2\,sen\,\alpha\cos\alpha}=$$
$$=\frac{sen\,\alpha}{2\cos\alpha}=\frac{tg\,\alpha}{2}$$

b) $$\frac{2\,tg\,\alpha}{1+tg^2\alpha}=\frac{2\dfrac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}}{1+\dfrac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{2\dfrac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}=$$
$$=2\,sen\,\alpha\cos\alpha=sen\,2\alpha$$

112 ●●○ **INVENTA.** A partir de las relaciones y las fórmulas trigonométricas que conoces, escribe una igualdad que sea cierta.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$sen\,\alpha\,cotg\,\alpha=\cos\alpha$

113 ●●○ Indica si son ciertas o falsas estas igualdades.

a) $\cos^2\alpha\,(1+tg^2\alpha)=1$

b) $\dfrac{tg\,\alpha}{\cos^2\alpha}(1-sen^2\alpha)\,cosec^2\alpha=$
$$=\frac{1}{sen\,\alpha\cos\alpha}$$

a) $\cos^2\alpha\,(1+tg^2\alpha)=$
$=\cos^2\alpha+sen^2\alpha=1\rightarrow$ Es cierta.

b) $\dfrac{tg\,\alpha}{\cos^2\alpha}(1-sen^2\alpha)\,cosec^2\alpha=$
$$=\frac{tg\,\alpha}{sen^2\alpha}=\frac{1}{sen\,\alpha\cos\alpha}\rightarrow$$
$\rightarrow$ Es cierta.

114 ●●○ Demuestra las siguientes igualdades trigonométricas.

a) $\dfrac{sen\,2\alpha}{sen\,\alpha}-\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}=sec\,\alpha$

b) $tg\,\alpha+cotg\,\alpha=sec\,\alpha\,cosec\,\alpha$

c) $\dfrac{1}{1-sen\,\alpha}+\dfrac{1}{1+sen\,\alpha}=2\,sec^2\alpha$

d) $\cos\alpha+tg\,\alpha\,sen\,\alpha=sec\,\alpha$

a) $$\frac{2\,sen\,\alpha\cos\alpha}{sen\,\alpha}-\frac{\cos^2\alpha-sen^2\alpha}{\cos\alpha}=$$
$$=\frac{2\,sen\,\alpha\cos^2\alpha-sen\,\alpha\,(\cos^2\alpha-sen^2\alpha)}{sen\,\alpha\cdot\cos\alpha}=$$
$$=\frac{sen^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}=sec\,\alpha$$

b) $$\frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{sen\,\alpha}=\frac{sen^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\,sen\,\alpha}=$$
$$=\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{sen\,\alpha}=sec\,\alpha\,cosec\,\alpha$$

c) $$\frac{1+sen\,\alpha+1-sen\,\alpha}{1-sen^2\alpha}=\frac{2}{\cos^2\alpha}=$$
$$=2\,sec^2\alpha$$

d) $$\cos\alpha+\frac{sen^2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+sen^2\alpha}{\cos\alpha}=$$
$$=\frac{1}{\cos\alpha}=sec\,\alpha$$

115 ●●○ Demuestra que estas igualdades son ciertas.

a) $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

b) $\dfrac{2}{sen\,2\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{sen\,\alpha}=tg\,\alpha$

c) $\cos 2\alpha+sen\,2\alpha+2\,sen^2\alpha=$
$=(sen\,\alpha+\cos\alpha)^2$

d) $\dfrac{2\,sen\,\alpha}{tg\,2\alpha} = cos\,\alpha - \dfrac{sen^2\,\alpha}{cos\,\alpha}$

e) $sec^2\,\alpha + cosec^2\,\alpha = 4\,cosec^2\,2\alpha$

a) $cos\,2\alpha = cos^2\,\alpha - sen^2\,\alpha =$
$= cos^2\,\alpha - 1 + cos^2\,\alpha =$
$= 2\,cos^2\,\alpha - 1$

b) $\dfrac{2}{sen\,2\alpha} - \dfrac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha} =$
$= \dfrac{2}{2\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha} - \dfrac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha} =$
$= \dfrac{2 - 2\,cos^2\alpha}{2\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha} = \dfrac{sen^2\,\alpha}{sen\,\alpha\,cos\,\alpha} = tg\,\alpha$

c) $cos\,2\alpha + sen\,2\alpha + 2\,sen^2\,\alpha =$
$= cos^2\,\alpha - sen^2\,\alpha + 2\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha +$
$+ 2\,sen^2\,\alpha =$
$= cos^2\,\alpha + sen^2\,\alpha + 2\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha =$
$= (sen\,\alpha + cos\,\alpha)^2$

d) $\dfrac{2\,sen\,\alpha}{tg\,2\alpha} = \dfrac{2\,sen\,\alpha}{\dfrac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\,\alpha}} =$
$= \dfrac{2\,sen\,\alpha\,(1 - tg^2\,\alpha)}{2\,tg\,\alpha} =$
$= \dfrac{sen\,\alpha}{tg\,\alpha} - \dfrac{sen\,\alpha\,tg^2\,\alpha}{tg\,\alpha} =$
$= cos\,\alpha - \dfrac{sen^2\,\alpha}{cos\,\alpha}$

e) $sec^2\,\alpha + cosec^2\,\alpha =$
$= \dfrac{1}{cos^2\,\alpha} + \dfrac{1}{sen^2\,\alpha} =$
$= \dfrac{sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha}{cos^2\,\alpha\,sen^2\,\alpha} =$
$= \dfrac{1}{cos^2\,\alpha\,sen^2\,\alpha} =$
$= \dfrac{1}{(cos\,\alpha\,sen\,\alpha)^2} =$
$= \dfrac{4}{(2\,cos\,\alpha\,sen\,\alpha)^2} =$
$= \dfrac{4}{(sen\,2\alpha)^2} = 4\,cosec^2\,2\alpha$

116 **RETO.** Demuestra que es cierta la siguiente igualdad.

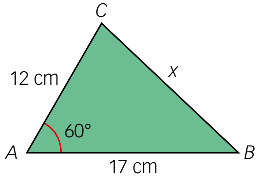
$$sen\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 + tg^2\,\alpha}$$

$sen\,2\alpha = 2\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha =$
$= \dfrac{2\,sen\,\alpha\,cos^2\,\alpha}{cos\,\alpha} = \dfrac{2\,tg\,\alpha}{\dfrac{1}{cos^2\,\alpha}} =$
$= \dfrac{2\,tg\,\alpha}{1 + tg^2\,\alpha}$

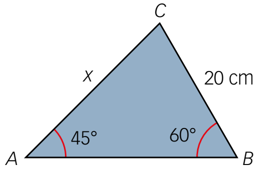
4. Maneja los teoremas del seno y del coseno

117 Calcula en cada caso el valor de x.

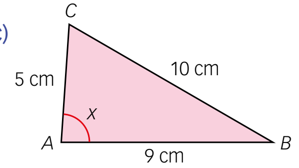
a)



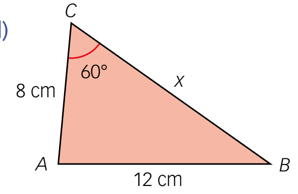
b)



c)



d)



a) $x = \sqrt{12^2 + 17^2 - 2 \cdot 12 \cdot 17 \cdot cos\,60°} =$
$= 15{,}13$ cm

b) $\dfrac{x}{sen\,60} = \dfrac{20}{sen\,45°} \rightarrow$
$\rightarrow x = \dfrac{20\,sen\,60°}{sen\,45°} = 24{,}5$ cm

c) $cos\,x = \dfrac{5^2 + 9^2 - 10^2}{2 \cdot 5 \cdot 9} = 0{,}0\widehat{6} \rightarrow$
$\rightarrow x = 86{,}18°$

d) $12^2 = 8^2 + x^2 - 2 \cdot 8 \cdot x \cdot cos\,60° \rightarrow$
$\rightarrow x^2 - 8x - 80 = 0 \rightarrow x = 13{,}8$ cm

O empleando el teorema del seno:

$$\frac{12}{sen\,60°} = \frac{8}{sen\,\widehat{B}} \rightarrow$$

$$\rightarrow sen\,\widehat{B} = \frac{8\,sen\,60°}{12} = 0{,}577 \rightarrow$$

$$\rightarrow \widehat{B} = 35{,}26°$$

$$\widehat{C} = 180° - 60° - 35{,}26° = 84{,}74°$$

$$\frac{x}{sen\,84{,}74°} = \frac{12}{sen\,60°} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{12 \cdot sen\,84{,}74°}{sen\,60°} = 13{,}8 \text{ cm}$$

118 En un triángulo isósceles, sus lados iguales miden 16 cm y el ángulo que forman, 64°. Halla el perímetro y el área.

$$x = \sqrt{16^2 + 16^2 - 2 \cdot 16 \cdot 16 \cdot cos\,64°} =$$
$$= 16{,}96 \text{ cm}$$

$$\alpha = \frac{180° - 64°}{2} = 58°$$

$$P = 16 + 16 + 16{,}96 = 48{,}96 \text{ cm}$$

$$cos\,32° = \frac{h}{16} \rightarrow h = 13{,}57 \text{ cm}$$

$$A = \frac{16{,}96 \cdot 13{,}57}{2} = 115{,}07 \text{ cm}^2$$

119 En un triángulo isósceles, el lado desigual mide 25 cm y su ángulo opuesto, 38°. Calcula el área y las alturas sobre los lados iguales.

Sea h la altura sobre el lado desigual.

$$tg\,19° = \frac{12{,}5}{h} \rightarrow h = 36{,}3 \text{ cm}$$

$$A = \frac{25 \cdot 36{,}3}{2} = 453{,}75 \text{ cm}^2$$

Sea x la medida de los lados iguales.

$$sen\,19° = \frac{12{,}5}{x} \rightarrow x = 38{,}39 \text{ cm}$$

Sea a la altura sobre uno de los lados iguales.

$$sen\,38° = \frac{a}{38{,}39} \rightarrow a = 23{,}64 \text{ cm}$$

120 **INVESTIGA.** Razona, en cada caso, si pueden ser ciertas las siguientes igualdades en un triángulo $\widehat{ABC}$.

a) $a = \dfrac{b}{sen\,\widehat{B}} = \dfrac{c}{sen\,\widehat{C}}$

b) $a = b = \dfrac{c}{sen\,\widehat{C}}$

c) $a = b = c$

a) Es posible si $sen\,\widehat{A} = 1$, es decir, si $\widehat{A} = 90°$.

b) No es posible, ya que entonces

$$a = \frac{c}{sen\,\widehat{C}} \rightarrow \widehat{A} = 90°$$

$$b = \frac{c}{sen\,\widehat{C}} \rightarrow \widehat{B} = 90°$$

No existe un triángulo con dos ángulos rectos.

c) Es posible si $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60°$.

121 **INVESTIGA.** Razona, en cada caso, si puede existir un triángulo en el que sean ciertas estas igualdades.

a) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc$

b) $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc$

c) $a^2 = b^2 + c^2 - bc$

d) $a^2 = b^2 + c^2 + bc$

e) $a^2 = b^2 + c^2$

f) $a^2 = b^2 - c^2$

Utilizamos el teorema del coseno.

a) No, ya que tendría que ser $\widehat{A} = 0°$

b) No, ya que tendría que ser $\widehat{A} = 180°$

c) Es posible si $\widehat{A} = 60° \rightarrow$

$$\rightarrow cos\,\widehat{A} = \frac{1}{2}$$

d) Es posible si $\widehat{A} = 120° \rightarrow$

$$\rightarrow cos\,\widehat{A} = -\frac{1}{2}$$

e) Es posible si el triángulo es rectángulo (teorema de Pitágoras) y a es la hipotenusa.

f) Es posible si el triángulo es rectángulo (teorema de Pitágoras) y b es la hipotenusa.

122 Determina el área de un pentágono regular de 15 cm de radio.

El ángulo central del pentágono es 72°.

Sea a la apotema del pentágono.

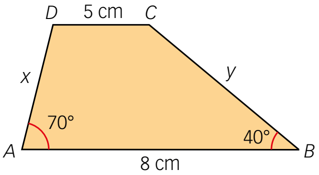
$$\cos 36° = \frac{a}{15} \rightarrow a = 12{,}14 \text{ cm}$$

Sea x la mitad del lado.

$$\operatorname{tg} 36° = \frac{x}{12{,}14} \rightarrow x = 8{,}82 \text{ cm}$$

$$A = \frac{17{,}64 \cdot 5 \cdot 12{,}14}{2} = 535{,}374 \text{ cm}^2$$

123 ●●● **RETO.** Halla la longitud de los lados desconocidos.

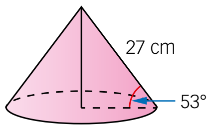


Trazamos una recta paralela al lado x, que pase por C y obtenemos un triángulo con ángulos de 40°, 70° y 70° y base 3 cm.

$$\frac{3}{\operatorname{sen} 70°} = \frac{y}{\operatorname{sen} 70°} = \frac{x}{\operatorname{sen} 40°} \rightarrow$$

$$\rightarrow y = 3 \text{ cm},\ x = 2{,}05 \text{ cm}$$

124 ●●○ Calcula el volumen de este cono.



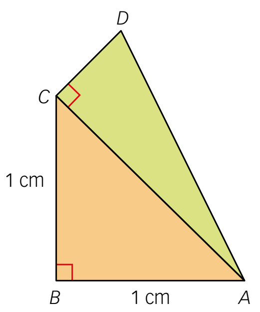
$$\operatorname{sen} 53° = \frac{h}{27} \rightarrow h = 21{,}56 \text{ cm}$$

$$\cos 53° = \frac{r}{27} \rightarrow r = 16{,}25 \text{ cm}$$

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot 16{,}25^2 \cdot 21{,}56}{3} =$$

$$= 5\,961{,}89 \text{ cm}^3$$

125 ●●● **RETO.** Si el triángulo $\widehat{ADC}$ y el triángulo $\widehat{ABC}$ tienen el mismo perímetro, ¿cuánto vale el ángulo $\widehat{BAD}$?



Sea x la longitud del lado CD e y la del lado AD, aplicando el teorema de Pitágoras obtenemos que el lado AC mide $\sqrt{2}$.

$$\left.\begin{array}{r} 2 + \sqrt{2} = x + y + \sqrt{2} \\ y^2 = x^2 + 2 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

El ángulo $\widehat{BAC}$ mide 45° por ser isósceles.

$$\operatorname{sen} \widehat{CAD} = \frac{1/2}{3/2} = \frac{1}{3} \rightarrow \widehat{CAD} = 19{,}47°$$

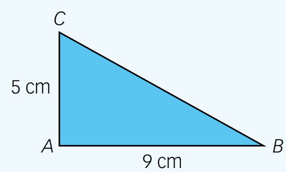
$$\widehat{BAD} = 45° + 19{,}47° = 64{,}47°$$

5. Resuelve triángulos

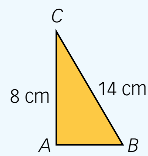
ACTIVIDADES FLASH

126 ●○○ Calcula los ángulos y los lados desconocidos.

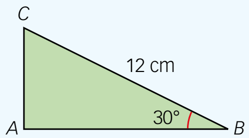
a)



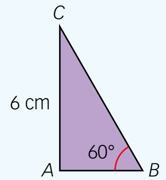
b)



c)



d)



a) $a = \sqrt{9^2 + 5^2} = 10{,}3$ cm

$$\frac{9}{\operatorname{sen} \widehat{C}} = 10{,}3 \rightarrow \operatorname{sen} \widehat{C} = 0{,}874 \rightarrow$$

$$\rightarrow \widehat{C} = 60{,}93°$$

$$\widehat{B} = 180° - 90° - 60{,}93° = 29{,}07°$$

b) $c = \sqrt{14^2 - 8^2} = 11{,}49$ cm

$$\frac{8}{sen\,\widehat{B}} = 14 \rightarrow sen\,\widehat{B} = 0{,}571$$
$$\rightarrow \widehat{B} = 34{,}82°$$

$$\widehat{C} = 180° - 90° - 34{,}82° = 55{,}18°$$

c) $sen\,30° = \dfrac{b}{12} \rightarrow b = 6$ cm

$$cos\,30° = \frac{c}{12} \rightarrow c = 10{,}39 \text{ cm}$$

$$\widehat{C} = 180° - 90° - 30° = 60°$$

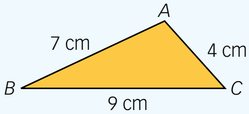
d) $sen\,60° = \dfrac{6}{a} \rightarrow a = 6{,}93$ cm

$$cos\,60° = \frac{c}{6{,}93} \rightarrow c = 3{,}47 \text{ cm}$$

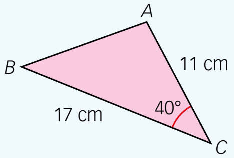
$$\widehat{C} = 180° - 90° - 60° = 30°$$

127 ●○○ Resuelve estos triángulos.

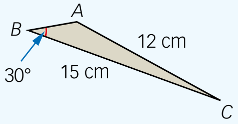
a)



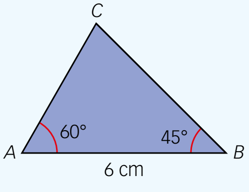
b)



c)



d)



a) $cos\,\widehat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} =$

$$= \frac{4^2 + 7^2 - 9^2}{2 \cdot 4 \cdot 7} = -0{,}29 \rightarrow$$
$$\rightarrow \widehat{A} = 106{,}6°$$

$$cos\,\widehat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} =$$
$$= \frac{9^2 + 7^2 - 4^2}{2 \cdot 9 \cdot 7} = 0{,}9 \rightarrow$$
$$\rightarrow \widehat{B} = 25{,}2°$$

$$\widehat{C} = 180° - 106{,}6° - 25{,}2° = 48{,}2°$$

b) $c = \sqrt{17^2 + 11^2 - 2 \cdot 17 \cdot 11 \cdot cos\,40°} =$
$= 11{,}11$ cm

$$\frac{11{,}11}{sen\,40°} = \frac{11}{sen\,\widehat{B}} \rightarrow$$
$$\rightarrow sen\,\widehat{B} = 0{,}636 \rightarrow \widehat{B} = 39{,}49°$$

$$\widehat{A} = 180° - 40° - 39{,}49° = 100{,}51°$$

c) $\dfrac{12}{sen\,30°} = \dfrac{15}{sen\,\widehat{A}} \rightarrow$

$$\rightarrow sen\,\widehat{A} = 0{,}63 \rightarrow \widehat{A} = 39{,}05°$$

$$\widehat{C} = 180° - 30° - 39{,}05° = 110{,}95°$$

$$\frac{c}{sen\,110{,}95°} = \frac{12}{sen\,30°} \rightarrow$$
$$\rightarrow c = 22{,}41 \text{ cm}$$

d) $\widehat{C} = 180° - 60° - 45° = 75°$

$$\frac{6}{sen\,75°} = \frac{b}{sen\,45°} \rightarrow b = 4{,}39 \text{ cm}$$

$$\frac{6}{sen\,75°} = \frac{a}{sen\,60°} \rightarrow a = 5{,}38 \text{ cm}$$

128 ●○○ Determina los ángulos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden 35 m.

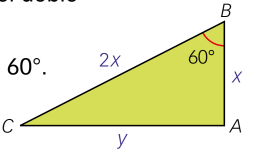
$$h = \sqrt{35^2 + 35^2} = 49{,}5 \text{ m}$$

$$\alpha = \frac{180° - 90°}{2} = 45°$$

129 ●●● **RETO.** En un triángulo $\widehat{ABC}$ se cumplen las siguientes condiciones.

- El lado *BC* mide el doble que el lado *AB*.
- El ángulo *B* mide 60°.

Halla los otros dos ángulos.



Aplicamos el teorema del coseno.

$y^2 = (2x)^2 + x^2 - 2 \cdot 2x \cdot x \cdot \cos 60° =$
$= 4x^2 + x^2 - 2x^2 = 3x^2$

$(2x)^2 = y^2 + x^2 - 2xy \cdot \cos \widehat{A} \rightarrow$
$\rightarrow -2y \cos \widehat{A} = 0 \rightarrow \cos \widehat{A} = 0 \rightarrow$
$\rightarrow \widehat{A} = 90°$

El triángulo ha de ser rectángulo.

Por tanto, $\widehat{C} = 30°$.

130 El área de un triángulo rectángulo es 28 cm² y uno de sus ángulos mide 60°.

a) ¿Cuánto mide cada uno de sus ángulos?

b) Calcula la longitud de sus lados y su perímetro.

a) El ángulo desconocido mide:
$90° - 60° = 30°$.

b) Tomamos como base y altura los catetos del triángulo rectángulo.

$$28 = \frac{b \cdot a}{2} \rightarrow b = \frac{56}{a}$$

$$tg\ 30° = \frac{\frac{56}{a}}{a} \rightarrow$$

$$\rightarrow a = \sqrt{\frac{56}{tg\ 30°}} = 9,85 \rightarrow$$

$$\rightarrow b = 5,68$$

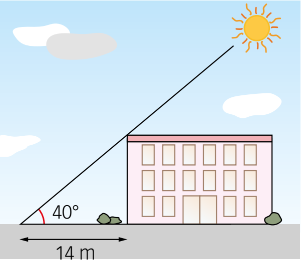
Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la hipotenusa.

$$c = \sqrt{9,85^2 + 5,68^2} = 11,37$$

Los lados miden 11,37; 5,68 y 9,85 cm.

El perímetro es 26,9 cm.

131 Halla la altura de este edificio.



Sea h la altura del edificio.

$$tg\ 40° = \frac{h}{14} \rightarrow h = 11,75 \text{ m}$$

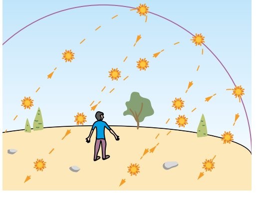
132 Antonio mide 1,70 m y observa que su sombra mide 50 cm a cierta hora del día. ¿Con qué inclinación llegan los rayos solares a esa hora?

$$tg\ \alpha = \frac{0,5}{1,7} = 0,294 \rightarrow \alpha = 16,38°$$

INTERNET

133 **MATEMÁTICAS Y… ASTRONOMÍA.** La altura del Sol y el ángulo de inclinación de sus rayos dependen de la hora, la estación del año y la latitud del lugar en que estamos.

- El Sol alcanza su máxima altura a las 12 de la mañana de cada día, hora solar.
- El Sol alcanza la máxima altura el 21 de junio, en el solsticio de verano, y la mínima el 21 de diciembre, en el solsticio de invierno.
- Para calcular el ángulo de inclinación del Sol a las 12 de la mañana, hora solar, del 21 de junio se utiliza esta fórmula: 90° − (latitud − 23°).



La latitud de A Coruña es 43°, la de Toledo 39° y la de Cádiz 36°.

El 21 de junio, a las 12 de la mañana, hora solar:

a) ¿Medirá lo mismo tu sombra en esas tres ciudades? ¿En qué ciudad medirá más?

b) Busca la latitud exacta del sitio en el que vives y calcula cuál será la longitud de tu sombra.

a) No medirá lo mismo, pues el ángulo de inclinación del Sol es diferente en cada lugar.

Ángulo de inclinación =
= 90° − (latitud − 23°)

En A Coruña el ángulo de inclinación será de 70°, en Toledo de 74° y en Cádiz de 77°.

La sombra será más larga en A Coruña, donde la inclinación es menor.

b) Respuesta abierta. Por ejemplo:

Ciudad: Oviedo

Latitud: 43°

Ángulo de inclinación: 70°

Altura de la persona: 160 cm

Longitud de la sombra:

$tg\ 70° = \dfrac{160}{x} \rightarrow x = 58{,}23$ cm

134 **INVESTIGA.** Mide la longitud de tu sombra en varios momentos del día y calcula el ángulo de inclinación de los rayos solares. ¿A qué hora del día crees que tu sombra será mayor?

La sombra será mayor a primera hora y a última hora del día, ya que es cuando los rayos solares llegan con menor inclinación.

135 A 16 m de distancia de una farola se ve su parte superior bajo un ángulo de 20°. ¿Bajo qué ángulo se verá situándose a la mitad de esa distancia?

$tg\ 20° = \dfrac{x}{16} \rightarrow x = 5{,}82$ m

$tg\ \alpha = \dfrac{5{,}82}{8} = 0{,}728 \rightarrow \alpha = 36{,}05°$

136 **MATEMÁTICAS Y... SEGURIDAD.** Para colocar una escalera de mano de forma segura, la base de la escalera debe quedar a 1 pie de la pared por cada 4 pies de altura.

a) ¿Qué ángulo debe formar la escalera con el suelo para que su posición sea segura?

b) Para subir 6 m de altura, ¿qué longitud debe tener la escalera para poderla colocar de forma segura?

a) $tg\ \alpha = \dfrac{4}{1} = 4 \rightarrow \alpha = 75{,}96°$

b) $sen\ 75{,}96° = \dfrac{6}{x} \rightarrow x = 6{,}18$

La escalera debe medir 6,18 m.

137 Entre las dos plantas de un edificio se tiene que instalar una escalera. La diferencia de altura entre las plantas es de 3,5 m y se dispone de 5 m en horizontal.

a) ¿Cuál será el ángulo de inclinación de la escalera?

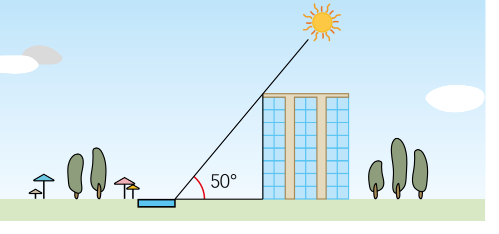
b) ¿Cuál será la longitud de la escalera?

a) $tg\ \alpha = \dfrac{3{,}5}{5} \rightarrow \alpha = 35°$

b) $sen\ 35° = \dfrac{3{,}5}{l} \rightarrow l = 6{,}10$

La longitud de la escalera será 6,10 m.

138 **MATEMÁTICAS Y... ARQUITECTURA.** Para construir una piscina junto a un edificio, se suele elegir la situación en la que, durante el verano, la sombra del edificio no tape la piscina en las horas centrales del día.

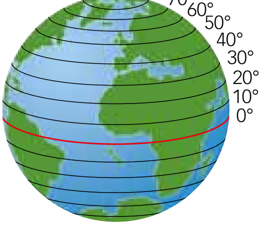


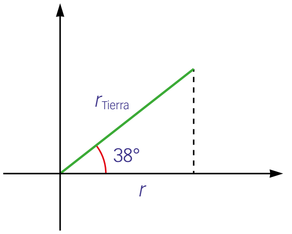
Para construir una piscina en un hotel de 30 m de altura, ¿a qué distancia del hotel se debe construir?

$tg\ 50° = \dfrac{30}{d} \rightarrow d = 25{,}17$

La piscina debe construirse a 25,17 m del hotel.

139 **MATEMÁTICAS Y... CARTOGRAFÍA.** Calcula la longitud del paralelo 38° norte considerando que el radio de la Tierra es de 6 370 km.



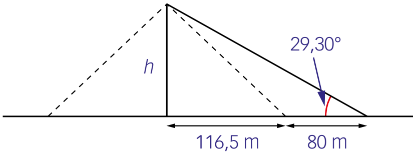


$r = 6\,370 \cdot \cos 38° = 5\,019{,}63$

$2\pi r = 31\,539{,}26$

El paralelo norte mide 31 539,26 km.

140 ●●○ **MATEMÁTICAS Y... ARQUITECTURA.** Las pirámides de Guiza (Egipto) son tres pirámides (Keops, Kefrén y Micerino) construidas por los antiguos egipcios como cámaras mortuorias para los faraones. Keops, la mayor de ellas, es una pirámide recta de base cuadrada de 233 m de lado. Calcula su altura si al separarse de ella 80 m se ve su vértice con un ángulo de 29° 30′ con la horizontal.



$\frac{233}{2} = 116{,}5$

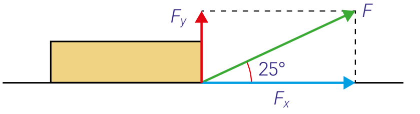
$tg\,(29°\,30') = \frac{h}{116{,}5 \text{ m} + 80 \text{ m}} \rightarrow$

$\rightarrow h = 111{,}17$

La pirámide de Keops mide 111,17 m de altura.

141 ●●○ **MATEMÁTICAS Y... FÍSICA.** Una persona tira de una cuerda atada a un trineo con una fuerza de 50 N. La cuerda forma un ángulo de 25° con el suelo.

Calcula la fuerza efectiva que mueve el trineo por el suelo y la que tiende a levantarlo. ¿Qué fuerza debe ejercer para arrastrar el trineo con una fuerza efectiva de 50 N?



Fuerza efectiva.

$\cos 25° = \frac{F_x}{50} \rightarrow F_x = 41{,}32$ N

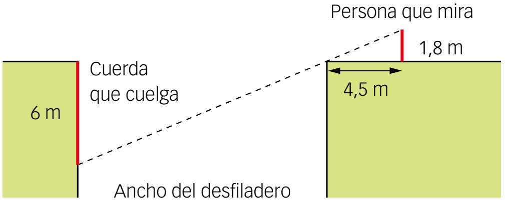
Fuerza que tiende a levantarlo.

$sen\ 25° = \frac{F_y}{50} \rightarrow F_y = 38{,}3$ N

Fuerza que debe ejercer para arrastrar el trineo con una fuerza efectiva de 50 N.

$\cos 25° = \frac{50}{F} \rightarrow F = 55{,}17$ N

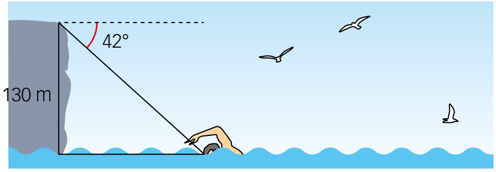
142 ●●○ **MATEMÁTICAS Y... GEOGRAFÍA.** Una forma de medir la anchura de un desfiladero es colgar una cuerda desde el borde de uno de los lados del precipicio, mientras que otra persona, desde el otro lado del desfiladero, se separa hasta ver el final de la cuerda alineado con el del borde del lado en el que se encuentra.



¿Cuánto mide de ancho este desfiladero?

$tg\ \alpha = \frac{1{,}8}{4{,}5} = \frac{6}{x} \rightarrow x = 15$ m

143 ●○○ Desde lo alto de un acantilado, de 130 m de altura sobre el nivel del mar, se ve a una persona nadar con un ángulo de depresión de 42°. ¿A qué distancia se encuentra del pie del acantilado?

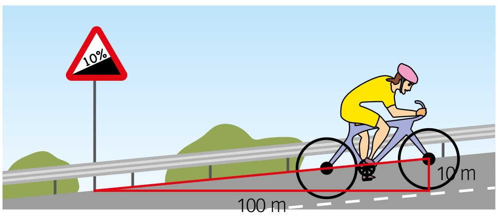


$tg\ 42° = \dfrac{130}{x} \rightarrow x = 144{,}38$ m

144 Desde lo alto de un faro de 30 m de altura se ve una barca que se encuentra a 70 m de distancia. Calcula bajo qué ángulo se ve la barca.

$tg\ \alpha = \dfrac{70}{30} \rightarrow \alpha = 66{,}8°$

145 **MATEMÁTICAS Y… TOPOGRAFÍA.** Una pendiente de un 10 % en una carretera significa que, por cada 100 m que avanzamos en horizontal, subimos 10 m.



Un coche recorre 270 m por una carretera con una pendiente del 12 %. ¿A qué altura se encuentra respecto al punto de partida?

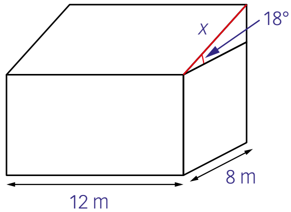
Al ser la pendiente del 12 %, quiere decir que el ángulo que forma la carretera con respecto a la horizontal es:

$tg\ \alpha = \dfrac{12}{100} = 0{,}12 \rightarrow \alpha = 6{,}84°$

$sen\ 6{,}84° = \dfrac{x}{270} \rightarrow x = 32{,}16$ m

Esta actividad puede utilizarse para trabajar el ODS 9, industria, innovación e infraestructura.

146 Una casa de planta rectangular mide 12 m de largo y 8 m de ancho. El tejado, con una inclinación de 18°, es una superficie plana inclinada cuya parte más elevada está situada sobre uno de los lados mayores del rectángulo. Calcula el área del tejado.

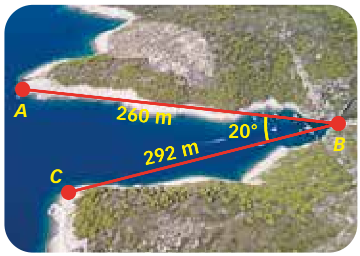


El tejado es un rectángulo de lados 12 m y x.

$cos\ 18° = \dfrac{8}{x} \rightarrow x = 8{,}41$

$A = 12 \cdot 8{,}41 = 100{,}94\ m^2$

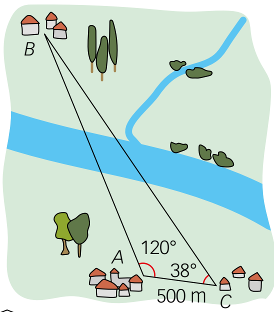
147 **MATEMÁTICAS Y… CARTOGRAFÍA.** Observa este golfo marino y halla la distancia entre los puntos A y C.



Sea x la distancia entre los puntos A y C.

$x = \sqrt{260^2 + 292^2 - 2 \cdot 260 \cdot 292 \cdot cos\ 20°} =$
$= 100{,}9$ m

148 Para hallar la distancia entre A y B, separados por un río, se ha utilizado otro punto C, que dista 500 m de A, y se han medido los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{C}$.



¿Cuál es la distancia entre A y B?

Sea x la distancia entre A y B.

$\dfrac{x}{sen\ 38°} = \dfrac{500}{sen\ (180° - 38° - 120°)} \rightarrow$
$\rightarrow x = 821{,}74$ m

149 Dos caracoles salen de un mismo punto con direcciones rectilíneas que forman un ángulo de 50°. Si el primero lleva una velocidad de 5 cm/min y el segundo de 7 cm/min, ¿qué distancia habrá entre los dos caracoles al cabo de 15 minutos?

Tras 15 minutos, el primer caracol habrá recorrido 75 cm y el segundo 105 cm.

$$d = \sqrt{75^2 + 105^2 - 2 \cdot 75 \cdot 105 \cdot \cos 50°} = $$
$$= 80{,}78 \text{ cm}$$

INTERNET

150 **MATEMÁTICAS Y... GEOGRAFÍA.** El Caminito del Rey es un paso peatonal construido entre las paredes de un desfiladero en la provincia de Málaga. Para cruzar de un lado al otro del desfiladero existe un puente colgante de 30 m de longitud.

¿A qué altura del río está el puente?

Sea y la altura del puente. Resolvemos el siguiente sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} tg\ 84° = \dfrac{y}{x} \\ tg\ 78° = \dfrac{y}{30 - x} \end{array}\right\} \xrightarrow{y = 9{,}51x}$$

$\rightarrow 141{,}14 - 4{,}7x = 9{,}51x \rightarrow$

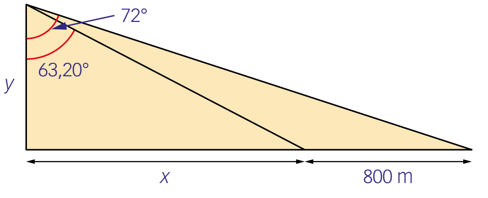
$\rightarrow x = 9{,}93 \rightarrow y = 9{,}51 \cdot 9{,}93 = 94{,}43$

El mirador se encuentra a 94,43 m de altura sobre el río.

151 Desde un mirador se ven dos pueblos situados en el mismo valle a 800 m uno del otro, con ángulos de depresión de 18° y 26° 40′, respectivamente.

a) ¿A qué altura está situado el mirador?

b) ¿A qué distancia se encuentra cada pueblo del mirador?



a) Sea y la altura del mirador.

$90° - 18° = 72°$

$90° - 26°\ 40' = 63°\ 20'$

$$\left.\begin{array}{l} tg\ 72° = \dfrac{x + 800}{y} \\ tg\ 63°\ 20' = \dfrac{x}{y} \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 1{,}99y}$$

$\rightarrow 3{,}08y = 1{,}99y + 800 \rightarrow$

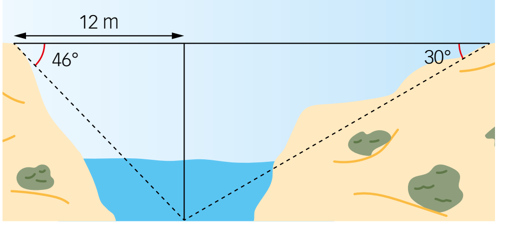
$\rightarrow y = 733{,}95$ m

b) $800 + x = 2260{,}54 \rightarrow x = 1460{,}54$ m

Calculamos la distancia desde el mirador a cada pueblo, mediante el teorema de Pitágoras.

Los pueblos están situados a 1634,6 m y 2376,7 m del mirador, respectivamente.

152 Para construir un viaducto se han tomado estas medidas.



a) ¿Cuál es la altura máxima de los pilares que lo sujetan?

b) ¿Qué longitud tendrá el viaducto?

a) Sea y la altura máxima de los pilares.

$tg\ 46° = \dfrac{h}{12} \rightarrow h = 12{,}43$ m

b) Sea x la distancia desde el pilar más alto hasta la otra orilla.

$tg\ 30° = \dfrac{12{,}43}{x} \rightarrow x = 21{,}53$ m

Por lo tanto, la longitud del viaducto será $12 + 21{,}53 = 33{,}53$ m.

153 Un perro corre 500 m en línea recta, gira y recorre 400 m, gira nuevamente y recorre 360 m, con lo que regresa al punto de partida. ¿Cuál es el área del triángulo recorrido?

Aplicando el teorema del coseno, calculamos, por ejemplo, el ángulo comprendido entre los lados que miden 500 y 360 m, respectivamente.

$$\cos \alpha = \frac{500^2 + 360^2 - 400^2}{2 \cdot 500 \cdot 360} = 0{,}61 \rightarrow$$
$$\rightarrow \alpha = 52{,}41°$$

Sea h la altura.

$$sen\ 52{,}41° = \frac{h}{360} \rightarrow h = 285{,}26 \text{ m}$$

$$A = \frac{500 \cdot 285{,}26}{2} = 71\,315 \text{ m}^2$$

154 Un niño corre 100 m en línea recta, gira 45° y recorre 60 m. ¿Qué ángulo debe girar para regresar nuevamente al punto de partida?

Sea d la distancia que le falta por recorrer para llegar a casa.

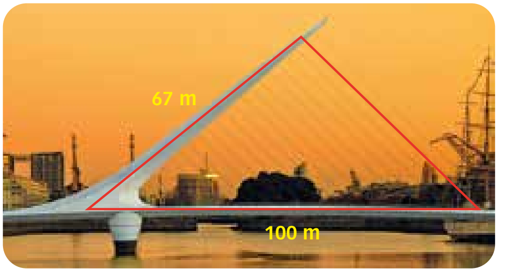
$$d = \sqrt{60^2 + 100^2 - 2 \cdot 60 \cdot 100 \cdot \cos 135°} =$$
$$= 148{,}61 \text{ m}$$

$$\frac{148{,}61}{sen\ 135°} = \frac{100}{sen\ \alpha} \rightarrow sen\ \alpha = 0{,}476 \rightarrow$$
$$\rightarrow \alpha = 28{,}42°$$

$180° - 28{,}42° = 151{,}58°$

Por lo tanto, debe girar 151,58°.

155 **MATEMÁTICAS Y... ARQUITECTURA.** El puente de la Mujer de Buenos Aires representa a una pareja bailando tango. Las piezas de hormigón forman un ángulo de 40°. ¿Cuánto mide la cuerda marcada?



Sea x la longitud de la cuerda marcada.

$$x = \sqrt{100^2 + 67^2 - 2 \cdot 100 \cdot 67 \cdot \cos 40°} =$$
$$= 64{,}99 \text{ m}$$

156 **INVESTIGA.** Estas son las distancias entre tres ciudades.

De Ápolis a Bépolis: 5 km
De Bépolis a Cépolis: 6 km
De Cépolis a Ápolis: 11 km

a) ¿Qué ángulos forman las ciudades entre sí?

b) Demuestra, con ayuda del teorema del coseno, que la suma de los lados menores de un triángulo debe ser mayor que el lado mayor de ese triángulo.

a) $\cos \widehat{A} = \dfrac{11^2 + 5^2 - 6^2}{2 \cdot 11 \cdot 5} = 1 \rightarrow \widehat{A} = 0°$

Si repetimos con las otras dos parejas de medidas, se obtiene de nuevo 0°. Eso quiere decir que los tres pueblos están alineados.

b) Sean a, b, c los lados de un triángulo cualquiera, y supongamos $a \geq b \geq c$, si $b + c \leq a \rightarrow$
$\rightarrow (b + c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc \leq a^2$

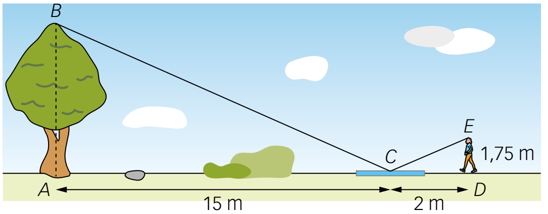
Sabemos por el teorema del coseno que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$

Juntamos ambas expresiones.

$b^2 + c^2 + 2bc \leq b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A} \rightarrow$
$\rightarrow 1 \leq -\cos \widehat{A} \rightarrow \cos \widehat{A} \leq -1$

Esto solo es posible si $\widehat{A} = 180°$, en cuyo caso no hay posibilidad de que exista un triángulo que cumpla esas condiciones.

157 **MATEMÁTICAS E... HISTORIA.** Euclides (siglo III a. C.) ideó un método para calcular alturas mediante el uso de un espejo. El observador *DE* coloca un espejo en el suelo y se desplaza hasta que ve reflejado el punto *B*. Conociendo *DE*, *DC* y *AC*, se puede calcular la altura *AB*.



a) En este gráfico, ¿cuál es la altura del árbol?

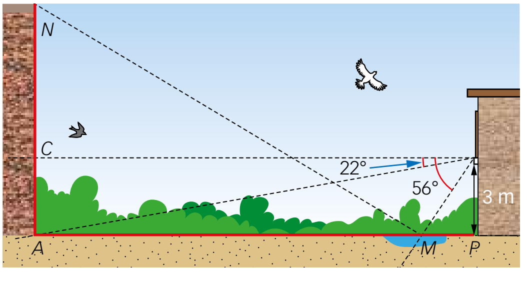
b) Un espejo está situado a 50 m de una torre de 100 m de altura, y a 1 m de una persona que ve reflejado el extremo superior de la torre sobre el espejo. ¿Cuál es la altura de la persona?

a) $tg\ \alpha = \frac{1{,}75}{2} = \frac{x}{15} \rightarrow x = 13{,}125$ m

b) $tg\ \alpha = \frac{100}{50} = \frac{x}{1} \rightarrow x = 2$ m

Esta actividad puede utilizarse para trabajar el ODS 4, educación de calidad.

158 **RETO.** Desde una ventana, situada a 3 m de altura, se ve la base de otro edificio con un ángulo de 22° por debajo de la horizontal. La parte superior de ese edificio no se puede ver, pero se observa su reflejo en un charco con un ángulo de 56° bajo la horizontal. Calcula la altura del edificio y la distancia entre ambos.



Sea *V* el punto que representa la ventana.

$90° - 56° = 34°$

$\overline{MP} = 3 \cdot tg\ 34° = 2$ m

$56° - 22° = 34°$

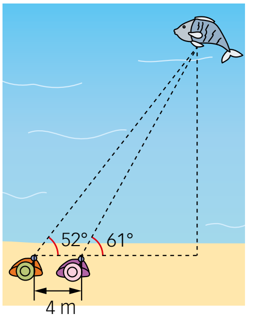
$\frac{3{,}6}{sen\ 22°} = \frac{\overline{AM}}{sen\ 34°} \rightarrow \overline{AM} = 5{,}4$ m

La distancia entre los dos edificios es $2 + 5{,}4 = 7{,}4$ m.

Como el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión, se utiliza la semejanza de triángulos para hallar la altura.

$\frac{3}{\overline{AN}} = \frac{2}{5{,}4} \rightarrow \overline{AN} = 8{,}1$ m

159 Dos pescadores están en la orilla del mar situados a 4 m. Ven saltar un pez y, por la distancia que los separa, cada uno lo ve con un ángulo distinto.



¿Qué cantidad de sedal necesitan para lanzar el anzuelo hasta el pez?

Sea *h* la distancia a la que se encuentra el pez de la orilla.

$$\left.\begin{array}{l} tg\ 61° = \frac{h}{x} \\ tg\ 52° = \frac{h}{4+x} \end{array}\right\} \xrightarrow{h = 1{,}8x}$$

$\rightarrow 5{,}12 + 1{,}28x = 1{,}8x \rightarrow x = 9{,}85$

$h = 17{,}73$ m

$sen\ 52° = \frac{17{,}73}{y} \rightarrow y = 22{,}5$

$sen\ 61° = \frac{17{,}73}{z} \rightarrow z = 20{,}27$

El pescador de la izquierda necesitará 22,5 m de sedal, y el de la derecha, 20,27 m.

160 Halla la altura de un poste sabiendo que si se mira desde un punto el ángulo de elevación es de 25°, y al acercarse 60 m a la base es de 35°.

Sea h la altura del poste y x la distancia desde el segundo punto de observación al poste.

$$\left.\begin{array}{l} tg\ 35° = \dfrac{h}{x} \\[2ex] tg\ 25° = \dfrac{h}{60 + x} \end{array}\right\} \xrightarrow{h = 0{,}7x}$$

$\rightarrow 27{,}98 + 0{,}466x = 0{,}7x \rightarrow$

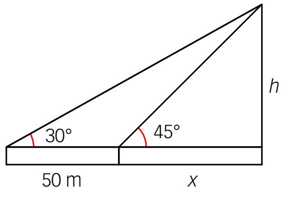
$\rightarrow x = 119{,}57 \rightarrow h = 83{,}67$

La altura del poste es 83,67 m.

161 ●●○ **MATEMÁTICAS Y... TOPOGRAFÍA.** Los especialistas en topografía se encargan de hacer mediciones sobre el terreno para calcular distancias, áreas, alturas… Para hacer esos cálculos utilizan la trigonometría y, para medir los ángulos, usan un aparato llamado teodolito.

Así, si una topógrafa quiere calcular la altura de un poste, colocará su teodolito, cuya altura es de 1,5 m, en un punto determinado y medirá el ángulo de elevación. Luego se acercará hasta otro punto más cercano al poste, que está alineado con el anterior, y volverá a medir el ángulo con el que ve la cima del poste.

¿Cuál es la altura del poste?



$$\left.\begin{array}{l} tg\ 45° = \dfrac{h}{x} \\[2ex] tg\ 30° = \dfrac{h}{50 + x} \end{array}\right\} \xrightarrow{h = x}$$

$\rightarrow 28{,}88 + 0{,}577x = x \rightarrow x = 68{,}27$

A esta altura hay que sumarle la altura del teodolito.

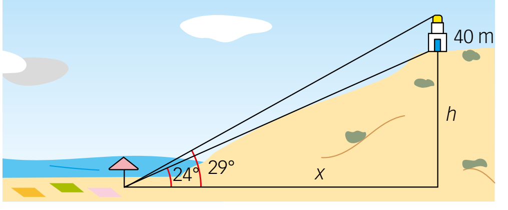
$68{,}27 + 1{,}5 = 69{,}77$

El poste mide 69,77 m.

162 ●●○ Desde un punto al nivel del mar se ve la cima de una montaña con un ángulo de 24°, y un faro de 40 m de altura situado sobre la cima de la montaña con un ángulo de 29°.

a) ¿Cuál es la altura de la montaña?

b) ¿A qué distancia del faro se encuentra el observador?



a)
$$\left.\begin{array}{l} tg\ 24° = \dfrac{h}{x} \\[2ex] tg\ 29° = \dfrac{h + 40}{x} \end{array}\right\} \xrightarrow{h = 0{,}445x}$$

$\rightarrow 0{,}544x = 0{,}445x + 40 \rightarrow$

$\rightarrow x = 404{,}04 \rightarrow h = 179{,}8$

La altura de la montaña es 179,8 m.

b) $sen\ 24° = \dfrac{179{,}8}{d} \rightarrow d = 442{,}06$

El observador se encuentra a 442,06 m de la base del faro.

163 ●●● Una persona se encuentra a 100 m de distancia de un edificio. Desde donde se encuentra, divisa la parte más alta del edificio bajo un ángulo de 50°. Empieza a alejarse de él y, a los 2 minutos, el ángulo se ha reducido a 35°.

a) ¿Cuál es la altura del edificio?

b) ¿Con qué velocidad se desplaza la persona?

a) Sea h la altura del edificio.

$tg\ 50° = \dfrac{h}{100} \rightarrow h = 119{,}18$ m

b) Sea x la distancia que ha recorrido la persona en 2 min.

$tg\ 35° = \dfrac{119{,}18}{100 + x} \rightarrow$

$\rightarrow 100 + x = 170{,}21 \rightarrow$

$\rightarrow x = 70{,}21$ m

Suponemos velocidad constante.

$$v = \frac{\text{espacio}}{\text{tiempo}}$$

$$v = \frac{70{,}21}{120} = 0{,}585$$

Por lo tanto, se desplazaba a 0,585 m/s.

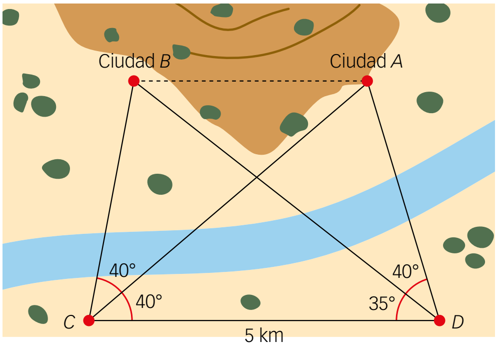
164 Dos barcos salen de un mismo punto con direcciones que forman entre sí un ángulo de 45°. Si uno va a 18 km/h y el otro a 20 km/h, ¿cuánto tiempo ha de transcurrir para que la distancia que los separe sea de 60 km?

$$60^2 = (20t)^2 + (18t)^2 - 2 \cdot 20t \cdot 18t \cdot \cos 45°$$

$$\rightarrow t = \pm 4{,}09$$

Deberán pasar 4,09 h.

165 **MATEMÁTICAS Y... CARTOGRAFÍA.** En ocasiones es necesario medir distancias entre dos puntos que son inaccesibles. Por ejemplo, para calcular la longitud de un túnel entre dos ciudades, *A* y *B*, separadas por una montaña. Para ello, se utilizan otros dos puntos entre los que se pueda medir su distancia, *C* y *D*.



¿Cuánto medirá el túnel entre las ciudades *A* y *B*?

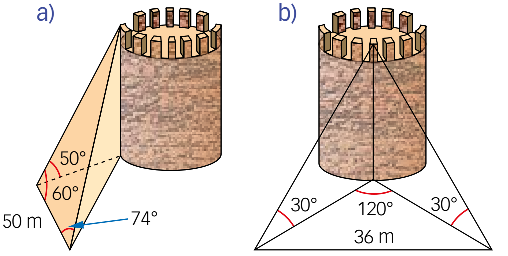
$$\frac{\overline{BD}}{\text{sen } 80°} = \frac{5}{\text{sen } 65°} \rightarrow \overline{BD} = 5{,}433 \text{ km}$$

$$\frac{\overline{AD}}{\text{sen } 40°} = \frac{5}{\text{sen } 65°} \rightarrow \overline{AD} = 3{,}546 \text{ km}$$

$$d = \sqrt{5{,}433^2 + 3{,}546^2 - 2 \cdot 5{,}433 \cdot 3{,}546 \cdot \cos 40°} = 3{,}546$$

Las ciudades *A* y *B* distan 3,546 km.

166 **RETO.** Observa las medidas de los lados y ángulos conocidos y calcula la altura de estas torres.



a) Sea *h* la altura de la torre y *x* la medida de uno de los lados desconocidos del triángulo.

$$\frac{50}{\text{sen } 46°} = \frac{x}{\text{sen } 74°} \rightarrow x = 66{,}82 \text{ m}$$

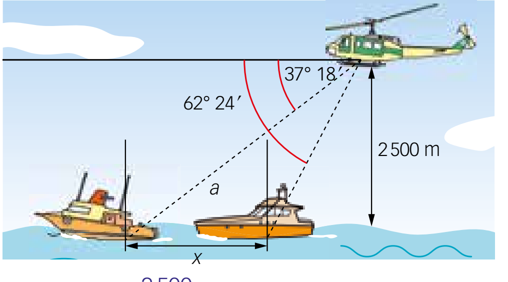
$$\text{sen } 50° = \frac{x}{66{,}82} \rightarrow h = 51{,}19 \text{ m}$$

b) Sea *h* la altura de la torre y *x* la medida de uno de los lados desconocidos del triángulo que está en el plano del suelo.

$$\frac{36}{\text{sen } 120°} = \frac{x}{\text{sen } 30°} \rightarrow x = 20{,}785 \text{ m}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{h}{20{,}785} \rightarrow h = 12 \text{ m}$$

167 Determina la distancia entre estas dos embarcaciones.



$$a = \frac{2\,500}{\text{sen } 37° \, 18'} = 4\,125{,}49 \text{ m}$$

Se calculan los ángulos del dibujo:

$62° \, 24' - 37° \, 18' = 25° \, 6'$

$180° - 25°6' - 37°18' = 117° \, 36'$

Por el teorema del seno:

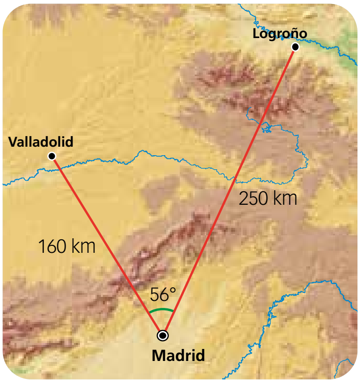
$$\frac{4\,125{,}49}{\text{sen } 117° \, 36'} = \frac{x}{\text{sen } 25° \, 6'} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 1\,974{,}52 \text{ m}$$

FAKE NEWS

Distancias engañosas

Ante las críticas del Gobierno de La Rioja por la ausencia de líneas de tren de alta velocidad en su comunidad, la ministra de Fomento aseguró que la nueva línea de AVE entre Valladolid y Madrid no solo ha servido para reducir el tiempo de viaje entre estas ciudades, sino que disminuye también la duración del viaje entre Madrid y Logroño, haciendo transbordo en Valladolid.



Tipo de tren	Velocidad media
AVE	170 km/h
Otros trenes	100 km/h

Y tú, ¿qué opinas?

$a^2 = 160^2 + 250^2 - 2 \cdot 160 \cdot 250 \cdot \cos 56° \rightarrow$
$\rightarrow a = 208{,}24$ km

Si tuviéramos en cuenta estas distancias, el tiempo que se tardaría en ir en tren normal de Madrid a Logroño sería $\frac{250}{100} = 2{,}5$ h.

Y el tiempo que se tardaría, haciendo el trasbordo en Valladolid y un tramo en AVE sería
$\frac{160}{170} + \frac{208}{100} = 3{,}02$ h.

Es posible que lo que dicen las autoridades sea cierto, ya que el trazado de las vías del tren no es en línea recta y no sabemos la distancia real que suponen. Teniendo en cuenta la orografía del terreno es posible que el trazado de Madrid a Valladolid sea más sencillo y pueda recorrerse en menos tiempo.

PROBLEMAS APARENTEMENTE DISTINTOS

168 Calcula las soluciones de esta ecuación.

$$\cos x + \sin 2x = 0$$

$\cos x + 2 \sin x \cos x = 0 \rightarrow$
$\rightarrow \cos x (1 + 2 \sin x) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x_1 = 90° + 180° \cdot k \\ \sin x = -\dfrac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_2 = 210° + 360° \cdot k \\ x_3 = 330° + 360° \cdot k \end{cases} \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{Z}$

169 Un objeto sigue una trayectoria definida por la función $x = \cos t + \sin 2t$, donde x indica la distancia a la que se encuentra del punto inicial y t el tiempo transcurrido. ¿Cuándo tiempo tarda en regresar al punto inicial?

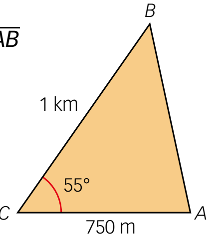
Cuando regresa al punto inicial, la distancia respecto al punto inicial es cero ($x = 0$).

$\cos t + \sin 2t = 0 \rightarrow$
$\rightarrow \cos t + 2 \sin t \cos t = 0 \rightarrow$
$\rightarrow \cos t (1 + 2 \sin t) = 0$

$$\begin{cases} \cos t = 0 \rightarrow t_1 = 90 \\ \sin t = -\dfrac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} t_2 = 210 \\ t_3 = 330 \end{cases} \end{cases}$$

Tarda 90 segundos.

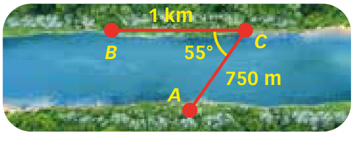
170 Calcula cuánto mide $\overline{AB}$ sabiendo que
$\overline{AC} = 750$ m,
$\overline{BC} = 1$ km
y $\widehat{C} = 55°$.



Sea $x = \overline{AB}$

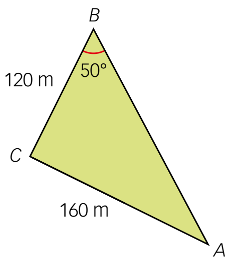
$x =$
$= \sqrt{750^2 + 1000^2 - 2 \cdot 750 \cdot 1000 \cdot \cos 55°} =$
$= 837{,}94$ m

171 En las orillas de un río hay tres embarcaderos. ¿Cuál es la distancia entre los embarcaderos A y B?



$\overline{AB} =$
$= \sqrt{750^2 + 1000^2 - 2 \cdot 750 \cdot 1000 \cdot \cos 55°} =$
$= 837{,}94$

172 Dados $\overline{BC} = 120$ m, $\overline{AC} = 160$ m y $\widehat{B} = 50°$:



a) Calcula la medida del lado $\overline{AB}$.

b) Halla el valor de $2 \cdot \overline{AB}$.

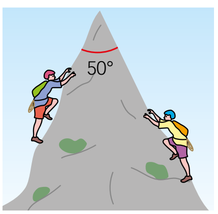
a) $\dfrac{160}{\operatorname{sen} 50°} = \dfrac{120}{\operatorname{sen} \widehat{A}} \rightarrow$
$\rightarrow \operatorname{sen} \widehat{A} = 0{,}575 \rightarrow \widehat{A} = 35{,}1°$

$\widehat{C} = 180° - 50° - 35{,}1° = 94{,}9°$

$\dfrac{x}{\operatorname{sen} 94{,}9°} = \dfrac{160}{\operatorname{sen} 50°} \rightarrow$
$\rightarrow x = 208{,}1$ m

b) $2 \cdot 208{,}1 = 416{,}2$ m

173 Dos escaladoras descienden de un pico, cada una por uno de los lados. Si tras media hora una de las escaladoras ha recorrido 120 m y la distancia en línea recta entre ambas es de 160 m, ¿a qué velocidad desciende la otra?



$\dfrac{160}{\operatorname{sen} 50°} = \dfrac{120}{\operatorname{sen} \widehat{A}} \rightarrow \operatorname{sen} \widehat{A} = 0{,}575 \rightarrow$
$\rightarrow \widehat{A} = 35{,}1°$

$\widehat{C} = 180° - 50° - 35{,}1° = 94{,}9°$

$\dfrac{x}{\operatorname{sen} 94{,}9°} = \dfrac{160}{\operatorname{sen} 50°} \rightarrow x = 208{,}1$ m

$v = \dfrac{208{,}1}{0{,}5} = 416{,}2$ m/h

La otra escaladora desciende a una velocidad de 416,2 m/h.

¿PARA QUÉ SIRVE…?

1 ¿Qué es la fibra óptica? ¿Qué condición cumple el rayo de luz para permanecer en el núcleo hasta el final de la fibra óptica?

La fibra óptica es un hilo muy fino de material transparente, vidrio o materiales plásticos, por el que se envían pulsos de luz que representan datos.

Un haz luminoso cuyo ángulo de incidencia es menor que el llamado ángulo límite o crítico, permanecerá en el núcleo hasta llegar al final de la fibra óptica.

2 La conclusión del texto anterior es que un haz luminoso cuyo ángulo de incidencia es menor que el ángulo de refracción permanecerá en el núcleo hasta llegar al final de la fibra óptica. ¿Cómo se deduce esta conclusión a partir de la ley de Snell?

$\operatorname{sen} 90° = 1 \rightarrow \operatorname{sen} \theta_1 = \dfrac{n_2}{n_1}$

Pero como $\operatorname{sen} \theta_1 \leq 1$, es necesario que $n_1 > n_2$ para que haya refracción y cambie de medio.

3 Investiga y enumera ventajas e inconvenientes de utilizar la fibra óptica en lugar del tradicional cable de cobre.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

- Ventajas: Es de menor coste que el cobre y permite la transmisión de una mayor cantidad de datos por unidad de tiempo.
- Inconvenientes: La fibra es más frágil que el cable de cobre, además su reparación es más difícil en caso de ruptura.

4 En determinadas condiciones el índice de refracción del aire es 1,0003 y el ángulo límite a la entrada de una fibra óptica es 41,8°. ¿Cuál será entonces el índice de refracción del material que forma la fibra óptica?

$n_2 = \dfrac{1{,}0003}{\operatorname{sen} 41{,}8°} = 1{,}5$

El índice de refracción del material que forma la fibra óptica en esas condiciones será 1,5.