PREPARACIÓN PARA OLIMPIADA MATEMÁTICA **PROBLEMAS DE NÚMEROS**

NÚMEROS PARES: $2k$, $k \in \mathbb{N}$ $\{2\cdot0, 2\cdot1, 2\cdot2, 2\cdot3, \dots\}$

NÚMEROS IMPARES: $2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$ $\{2\cdot0 + 1, 2\cdot1+1, 2\cdot2+1, 2\cdot3+1, \dots\}$

Ejercicio 1) La suma de dos números pares es un número par:

$$2k + 2k' = 2(k + k'),\ \ k, k' \in \mathbb{N}$$

Ejercicio 2) La suma de dos números impares es un número par:

$$2k + 1 + 2k' + 1 = 2(k + k' + 1),\ \ k, k' \in \mathbb{N}$$

Ejercicio 3) La suma de un número impar y un número par es un número impar:

____

MÚLTIPLOS DE 3: $3k$, $k \in \mathbb{N}$ $\{3\cdot0, 3\cdot1, 3\cdot2, 3\cdot3, \dots\} = \{0, 3, 6, 9, \dots\}$

MÚLTIPLOS DE 3 + 1: $3k + 1$, $k \in \mathbb{N}$ $\{3\cdot0 + 1, 3\cdot1 + 1, 7, 10, 13, \dots\} = \{1, 4, 7, 10, 13, \dots\}$

MÚLTIPLOS DE 3 + 2: $3k + 2$, $k \in \mathbb{N}$ $\{3\cdot0 + 2, 3\cdot1 + 2, 8, 11, 14, \dots\} = \{2, 5, 8, 11, 14, \dots\}$

"TODOS LOS NÚMEROS PERTENECEN A UNA DE ESTAS CATEGORÍAS"

Ejemplo: 521 DIVIDIMOS ENTRE 3 $\begin{array}{r|l} 521 & 3 \\ \hline 2 & 173 \end{array}$ $521 = 3 \cdot 173 + 2 \rightarrow 3k + 2$

El resto de la división sólo puede ser 0, 1 o 2. El cálculo del resto se denomina módulo.

Ejemplo: $521 \bmod 3 = 2$

Ejercicio 4) La suma de múltiplos de 3 es un múltiplo de 3

$$3k + 3k' = 3(k + k'),\ \ k, k' \in \mathbb{N}$$

Ejercicio 5) El cuadrado de un número siempre es múltiplo de 3 o múltiplo de 3 más 1

Todo número se puede escribir cómo $3k$, $3k + 1$ o $3k + 2$, $k \in \mathbb{N}$

$n = 3k,\ k \in \mathbb{N} \rightarrow n^2 = (3k)^2 = 9k^2 \rightarrow n \bmod 3 = 0$ (es múltiplo de 3)

$n = 3k + 1,\ k \in \mathbb{N} \rightarrow n^2 = (3k+1)^2 =$

$n = 3k + 2,\ k \in \mathbb{N} \rightarrow n^2 = (3k+2)^2 =$

Ejercicio 6) Demuestra que $n^2 + 1$ no es divisible entre 3 para ningún entero n

DEMOSTRACIÓN POR REDUCCIÓN AL ABSURDO

Para demostrar que una proposición matemática es verdadera por reducción al absurdo, se considera que es falsa y se llega a una contradicción.

Ejemplo: «no existe un número racional mínimo mayor que cero».
En una *reducción al absurdo* se comenzaría por asumir lo contrario y nuestra tesis sería: <<existe un número racional mínimo mayor que cero: r_0>>.

Ahora tomemos $\boldsymbol{x = r_0/2}$. Por lo tanto $\boldsymbol{x}$ es un número racional mayor que cero, y $\boldsymbol{x<r_0}$. Eso es un absurdo, pues contradice la hipótesis de partida de que $\boldsymbol{r_0}$ era el número racional mínimo.

La contradicción viene de suponer que la proposición de partida es falsa y por tanto queda demostrado que es cierta.

Ejercicio 7) No existen números naturales a y b tales que $a^2 - 3b^2 = 8$.

DEMOSTRACIÓN POR INDUCCIÓN

Para demostrar que una proposición matemática se cumple para cualquier n número natural basta demostrar que **se cumple para n = 1, suponer que se cumple para n y demostrar que se cumple para n + 1**.

Ejemplo: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

n = 1 → $\sum_{i=1}^{1} i = \frac{1(1+1)}{2}$ = 1 Se cumple

Suponemos que se cumple para n, demostramos que se cumple para n + 1:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{n^2+n+2n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Ejercicio 8) $n! > 2^n$ para todo número natural n>3. Nota: n! = n·(n - 1)·(n - 2)·(n - 3)· …. 2·1

- **Demostración por inducción con caso base n_0:** La proposición matemática se cumple para $n \geq n_0$. Es igual que la anterior comenzando por demostrar $n = n_0$.

Ejercicio 9) Todo número mayor o igual que 7 es suma de un múltiplo de 3 más un múltiplo de 4.
n = 7 → 7 = 3 + 4 (múltiplo de 3 más múltiplo de 4)
Suponemos que se cumple para n: n = 3k + 4r y demostramos que se cumple para n + 1.
Continúa la demostración…….

- **Demostración por inducción fuerte:** Para demostrar por inducción, es equivalente suponer cierta la proposición para todo natural $m \leq n$ y demostrarlo para n + 1.

EJERCICIOS PROPUESTOS:

10) La suma de dos números naturales cualesquiera da el mismo resto cuando se divide entre 3 que la suma de sus restos.

11) Encuentra el resto que obtenemos si:

a) Dividimos el número entre $1989 \cdot 1990 \cdot 1991 + 1992^3$ entre 7.
b) Dividimos el número 9^{100} entre 8.

12) Prueba que el número $n^3 + 2n$ es divisible entre 3 para cualquier valor natural de n.

13) Prueba que $n^5 + 4n$ es divisible entre 5 para cualquier entero n.

14) Prueba que $n^3 + 2$ no es divisible entre 9 para ningún entero n.

15) Demuestra que $n^3 - n$ es divisible entre 24 para cualquier número impar n.

–Pista. Prueba que el número dado es múltiplo tanto de 3 como de 8.

16) a) Demuestra que, si p es un número primo mayor que 3, $p^2 - 1$ es divisible entre 24.

b) Prueba que, si p y q son números primos mayores que 3, $p^2 - q^2$ es divisible entre 24.

17) Los números naturales x, y, z satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$. Demuestra que al menos uno de ellos es divisible entre 3.

18) Dados dos números naturales, a y b, tales que $a^2 + b^2$ es divisible entre 21, prueba que esa misma suma de cuadrados también es divisible entre 441.

19) Dados los números naturales a, b y c, que cumplen que a+ b + c es divisible entre 6, prueba que es también divisible entre 6 el número $a^3 + b^3 + c^3$.

20) Tres números primos, p, q y r, todos mayores que 3, forman una progresión aritmética: p = p, q = p + d y r = p + 2d. Prueba que la diferencia d es divisible entre 6.

21) Prueba que si disminuimos en 7 unidades la suma de los cuadrados de tres números naturales cualesquiera, el resultado no puede ser divisible entre 8.

22) La suma de los cuadrados de tres números naturales es divisible entre 9. Demuestra que podemos elegir dos de esos números de manera que su diferencia sea divisible entre 9.

23) Averigua la última cifra del número 1989^{1989}.

24) Problema 29. Encuentra la última cifra del número 2^{50}.

–Solución. Como antes, escribimos las últimas cifras de las primeras potencias de dos: 2, 4, 8, 6, 2, … Podemos ver que 2^5 acaba en 2, igual que 2^1. Luego la última cifra de cualquier potencia está determinada por la de la anterior potencia de 2. Tenemos un ciclo: 2^6 acaba en 4 (como 2^2), 2^7 acaba en 8 (como 2^3), 2^8 acaba en 6, 2^9 acaba en 2, etc. Como la longitud del ciclo es cuatro, se puede encontrar la última cifra del número 2^{50} usando el resto de dividir el número 50 entre 4. Este resto es 2, y la última cifra de 2^{50} coincide con la de 2^2, que es 4.

25) ¿Cuál es la última cifra de 777^{777}?

26) Encuentra el resto de dividir 2^{100} entre 3.

–Pista. Escribe los restos que se obtienen al dividir las sucesivas potencias de 2 entre 3. Prueba que forman, de nuevo, un ciclo.

27) Encuentra el resto de dividir el número 3^{1989} entre 7.

28) Prueba que $2222^{5555} + 5555^{2222}$ es divisible entre 7.

–Pista. Demuestra que, si divides ese número entre 7, el resto es 0.

29) Encuentra la última cifra del número 7^{77}.

30) a) Halla p sabiendo que p, p + 10 y p + 14 son números primos.
b) Halla p sabiendo que p, 2p + 1 y 4p + 1 son números primos.

–Pista. Encuentra los restos de dividirlos entre 3.

31) Dado el par de números primos p y $8p^2 + 1$, encuentra p.

32) Dada la pareja de números primos p y $p^2 + 2$, demuestra que $p^3 + 2$ también es un número primo.

33) a) ¿Puede ser la suma de dos cuadrados perfectos impares otro cuadrado perfecto?

b) ¿Puede ser un cuadrado perfecto la suma de los cuadrados de tres números naturales impares?

34) Prueba que la suma de los cuadrados de cinco números naturales consecutivos no puede ser un cuadrado perfecto.

35) Encuentra p si p, $4p^2 + 1$ y $6p^2 + 1$ son números primos.

36) Prueba que, para cualesquiera números naturales a y b, $a^3 + b^3 + 4$ no puede ser un cubo perfecto.

37) Determinar todos los números de cuatro cifras n = abcd tales que al insertar un dígito 0 en cualquier posición se obtiene un múltiplo de 7. (Olimpiada Matemática 2021)

38) Dado un número natural n > 1, realizamos la siguiente operación: si n es par, lo dividimos entre dos; si n es impar, le sumamos 5. Si el número obtenido tras esta operación es 1, paramos el proceso; en caso contrario, volvemos a aplicar la misma operación, y así sucesivamente. Determinar todos los valores de n para los cuales este proceso es finito, es decir, se llega a 1 en algún momento. (Olimpiada Matemática 2020)

39) Para cada número de cuatro cifras abcd, denotamos por S al número S = abcd − dcba. Demuestra que S es múltiplo de 37 si y sólo si las dos cifras centrales del número abcd son iguales. (Olimpiada Matemática 2019)