113 Opera y redondea el resultado a las décimas.

a) $43{,}295 + 4{,}57 - 7{,}367$

b) $5{,}32 + 4{,}05 \cdot 7{,}361$

c) $3{,}56 \cdot (7{,}4009 - 3{,}48)$

d) $7{,}37 - 5{,}3519 : 2{,}1$

a) $40{,}498 \rightarrow 40{,}5$

b) $35{,}31205 \rightarrow 35{,}3$

c) $13{,}958404 \rightarrow 14{,}0$

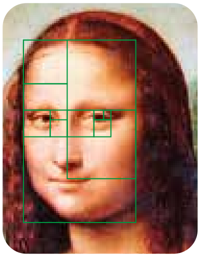
d) $4{,}8214\overparen{761904} \rightarrow 4{,}8$

114 **INVESTIGA.** ¿Para qué número sería 5 432,723 una aproximación a las milésimas por defecto? ¿Es la respuesta única? ¿Cuántas respuestas hay?

Un número posible es 5 432,7231. La respuesta no es única, ya que hay infinitos números.

INTERNET

115 **MATEMÁTICAS E… HISTORIA.** Desde la Antigüedad aparece con frecuencia el número de oro, Φ, en proporciones de la naturaleza, así como en las medidas de construcciones, o en obras de arte como la *Gioconda*.



$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803\ldots$$

a) Escribe la aproximación por redondeo hasta las centésimas del número de oro.

b) Halla los errores absoluto y relativo.

a) $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803$

$\xrightarrow{\text{aproximación}} \Phi = 1{,}62$

b) $E_a = |V_{\text{real}} - V_{\text{aproximado}}| = |-1{,}62| =$
$= 0{,}001966 \approx 0{,}002$

$$E_r = \left|\frac{E_a}{V_{\text{real}}}\right| = \left|\frac{0{,}002}{\Phi}\right| = 0{,}0012361$$

116 **INVESTIGA.** ¿Existe algún caso en que la aproximación por exceso y por defecto coincidan? Y si se considera el redondeo, ¿puede coincidir esta aproximación con la aproximación por exceso o por defecto?

Las aproximaciones por exceso y por defecto solo coinciden cuando no hay más cifras que el orden al que se aproxima. Por ejemplo, si se aproxima a las centésimas y no hay milésimas.

Las aproximaciones a las milésimas del número 4,23 por exceso y por defecto coinciden y son 4,230.

La aproximación por redondeo coincide con la aproximación por defecto si la cifra anterior al orden considerado es menor que 5, y coincide con la aproximación por exceso en el resto de casos.

117 **MATEMÁTICAS Y… FÍSICA.** Cuando se dice que la masa de la Tierra es $5{,}972 \cdot 10^{24}$ kg se está dando una medida redondeada. ¿Entre qué valores está comprendida?

La masa de la Tierra estaría comprendida entre $5{,}9715 \cdot 10^{24}$ y $5{,}7925 \cdot 10^{24}$ kg.

118 ¿Se puede escribir $\pi = \dfrac{355}{113}$? Justifica la respuesta y di cuál es el orden del error cometido.

Sí, es una aproximación de π, pues $\dfrac{355}{113} = 3{,}1415929204$, que es una aproximación por exceso, siendo el orden de error cometido 7, pues $E_a = 2{,}67 \cdot 10^{-7}$.

119 **RETO.** Obtén una aproximación de π con 4 cifras decimales mediante un número racional cuyo denominador sea 784.

Obtenemos el numerador: $\pi = \dfrac{x}{784}$; $x = 2\,463{,}0086\ldots$

Puesto que queremos que tenga solo 4 cifras decimales, el número racional es $\dfrac{2\,463}{784}$.

120 Obtén el error absoluto y el error relativo al redondear los siguientes números.

a) 4,3964 a las centésimas.

b) $\frac{3}{11}$ a las diezmilésimas.

a) 4,3964 a las centésimas → 4,40

$E_a = |4{,}3965 - 4{,}4| = 0{,}0035$

$E_r = \frac{0{,}0035}{4{,}3965} = 0{,}000796$

b) $\frac{3}{11}$ a las diezmilésimas → 0,2727

$E_a = |0{,}272727 - 0{,}2727| = 0{,}000027$

$E_r = \frac{E_a}{0{,}272727} = 0{,}000099$

121 **MATEMÁTICAS Y... FÍSICA.** Existen dos tipos de balanzas de cocina: las analógicas que marcan los pesos de 10 g en 10 g, y las digitales que los marcan de gramo en gramo. Si al pesar harina marca 250 g, ¿entre qué valores estará comprendido el peso exacto en cada balanza? ¿Cuáles son los errores relativos?

Al usar la balanza analógica se sabe que el peso exacto está entre 240 y 260 g.

Al usar la balanza digital se sabe que el peso exacto está entre 249 y 251 g.

$E_r = \left|\frac{10}{250}\right| = 0{,}04 = 4\,\%$ en la analógica.

$E_r = \left|\frac{1}{250}\right| = 0{,}004 = 0{,}4\,\%$ en la digital.

122 En la medida de 2 m se comete un error de 2 mm y en la de 400 km un error de 400 m. ¿Qué error relativo es mayor?

Medida de 2 m →

$\rightarrow E_r = \left|\frac{2}{2\,000}\right| = 0{,}001 = 0{,}1\,\%$

Medida de 400 km →

$\rightarrow E_r = \left|\frac{400}{400\,000}\right| = 0{,}001 = 0{,}1\,\%$

El error relativo cometido es el mismo en los dos casos.

123 Aproxima el número $\frac{1}{7}$ para que el error sea menor que una centésima.

Para que el error absoluto cometido sea menor que una centésima, hay que calcular el cociente con dos cifras decimales.
La aproximación pedida es 0,14.

124 Aproxima el número 12,3456 de forma que el error absoluto sea menor que 0,001.

Para que el error absoluto sea menor que una milésima, se escribe el número con tres cifras decimales. Por tanto, la aproximación pedida es 12,345.

125 Una aproximación por exceso de un número es 43,32. Si se cometió un error del 1 %, determina el número exacto con dos decimales.

$\left|\frac{x - 43{,}32}{x}\right| = 0{,}01 \rightarrow$

$\rightarrow |x - 43{,}32| = 0{,}01x \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} x - 43{,}32 = 0{,}01x \rightarrow x = 43{,}\widehat{75} \\ x - 43{,}32 = -0{,}01x \rightarrow x = 42{,}\widehat{8910} \end{cases}$

En este caso, puesto que es una aproximación por exceso, el valor real ha de ser menor que el aproximado, por tanto, la respuesta es 42,89.

5. Realiza operaciones con raíces

Radicales

ACTIVIDADES FLASH

126 Halla el valor numérico de estos radicales.

a) $\sqrt{81}$ d) $\sqrt[3]{125}$

b) $\sqrt[3]{-27}$ e) $-\sqrt[3]{-8}$

c) $\sqrt[4]{625}$ f) $-\sqrt{64}$

a) ± 9 c) ± 5 e) 2

b) -3 d) 5 f) -8

ACTIVIDADES FLASH

127 Resuelve las ecuaciones.

a) $x^2 = 16$
b) $x^3 + 8 = 0$
c) $x^2 + 9 = 0$
d) $x^4 - 32 = 0$
e) $x^3 - 8 = 0$
f) $x^5 = 32$
g) $x^5 = -32$
h) $x^2 + 1 = 0$

a) $x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$
b) $x = \sqrt[3]{-8} = -2$
c) $x = \sqrt{-9} \notin \mathbb{R}$
d) $x = \sqrt[4]{32} = \pm 2\sqrt[4]{2}$
e) $x = \sqrt[3]{8} = 2$
f) $x = \sqrt[5]{32} = 2$
g) $x = \sqrt[5]{-32} = -2$
h) $x = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$

128 Transforma en radicales las siguientes potencias de exponente fraccionario.

a) $2^{\frac{1}{2}}$
b) $7^{\frac{3}{5}}$
c) $9^{-\frac{1}{4}}$
d) $-8^{-\frac{2}{3}}$

a) $\sqrt{2}$
b) $\sqrt[5]{7^3}$
c) $\pm\dfrac{1}{\sqrt[4]{9}} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
d) $-\dfrac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = -\dfrac{1}{4}$

129 Expresa como potencias de exponente fraccionario estos radicales.

a) $\sqrt[5]{9^4}$
b) $\sqrt[4]{7^3}$
c) $\sqrt{7^{-3}}$
d) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{3^2}}$
e) $\sqrt[3]{-9^{-2}}$
f) $\dfrac{1}{\sqrt{8^{-5}}}$

a) $\sqrt[5]{9^4} = 9^{\frac{4}{5}}$
b) $\sqrt[4]{7^3} = 7^{\frac{3}{4}}$
c) $\sqrt{7^{-3}} = 7^{-\frac{3}{2}}$
d) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{3^2}} = 3^{-\frac{2}{5}}$
e) $\sqrt[3]{-9^{-2}} = -9^{-\frac{2}{3}}$
f) $\dfrac{1}{\sqrt{8^{-5}}} = 8^{\frac{5}{2}}$

ACTIVIDADES FLASH

130 Escribe dos radicales equivalentes a cada uno de los siguientes.

a) $\sqrt[3]{2^5}$
b) $\sqrt[12]{7^4}$
c) $\sqrt[6]{5^3}$
d) $\sqrt{2^3}$
e) $\sqrt[8]{2^6}$
f) $\sqrt[20]{3^{15}}$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\sqrt[6]{2^{10}} = \sqrt[9]{2^{15}}$
b) $\sqrt[6]{7^2} = \sqrt[120]{7^{40}}$
c) $\sqrt{5} = \sqrt[4]{5^2}$
d) $\sqrt[4]{2^6} = \sqrt[6]{2^9}$
e) $\sqrt[4]{2^3} = \sqrt[12]{2^9}$
f) $\sqrt[4]{3^3} = \sqrt[8]{3^6}$

131 Simplifica los radicales que aparecen a continuación.

a) $\sqrt[3]{16}$
b) $\sqrt[3]{54}$
c) $\sqrt[4]{32}$
d) $\sqrt{27}$
e) $\sqrt{75}$
f) $\sqrt[5]{128}$
g) $\sqrt[6]{27}$
h) $\sqrt[8]{625}$
i) $\sqrt[3]{343}$

a) $\sqrt[3]{2^4} = 2^{\frac{4}{3}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2\sqrt[3]{2}$
b) $\sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = 3^{\frac{3}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 3\sqrt[3]{2}$
c) $\sqrt[4]{2^5} = 2^{\frac{5}{4}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 2\sqrt[4]{2}$
d) $\sqrt{3^3} = 3^{\frac{3}{2}} = 3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{3}$
e) $\sqrt{3 \cdot 5^2} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 5 = 5\sqrt{3}$
f) $\sqrt[5]{2^7} = 2^{\frac{7}{5}} = 2 \cdot 2^{\frac{2}{5}} = 2\sqrt[5]{2^2}$
g) $\sqrt[6]{3^3} = 3^{\frac{3}{6}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$
h) $\sqrt[8]{5^4} = 5^{\frac{4}{8}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$
i) $\sqrt[3]{7^3} = 7$

132 Escribe en cada caso si el desarrollo de la igualdad es verdadero o falso. Si es falso, corrígelo.

a) $\sqrt{8} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt[3]{8^3}$
b) $\sqrt[3]{3^4} = \sqrt[6]{9^4} = \sqrt{3^8}$
c) $\sqrt[5]{25^{10}} = \sqrt{5^{10}} = \sqrt[3]{5^{12}}$
d) $\sqrt[8]{3^6} = \sqrt[4]{27} = \sqrt[12]{3^9}$

a) Falso, porque $\sqrt{8} = \sqrt[4]{2^6} = 2\sqrt{2}$

b) Falso, porque $\sqrt[3]{3^4} = \sqrt[6]{9^4} = 3\sqrt[3]{3}$

c) Falso, porque $\sqrt[5]{25^{10}} = 5^4 = \sqrt{5^8}$

d) Verdadero

133 Calcula.

a) $\dfrac{5^{-3} \cdot 5^{-1} \cdot 5^2}{5^0 + 5^6}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}\right)^3\left(\sqrt{5}\right)^3}{\left(5\sqrt{2}\right)^2}$

b) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^4$ d) $\dfrac{9^{1/2} \cdot 3^{-1} \cdot 2^{3/2}}{\sqrt{2}}$

a) $\dfrac{5^{-2}}{1 + 5^6} = \dfrac{1}{5^2 + 5^8} = \dfrac{1}{390\,650}$

b) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^6$

c) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

d) $\sqrt[6]{2}$

134 Expresa como potencias de base 3.

a) $9^{-\frac{5}{2}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{27}}$

b) $81^{-\frac{3}{4}}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{243}}$

a) 3^{-5} c) $3^{-\frac{3}{5}}$

b) 3^{-3} d) $3^{-\frac{3}{5}}$

135 **RETO.** Demuestra, sin resolver las raíces, que $\sqrt[6]{6} < \sqrt[3]{3}$.

$\sqrt[6]{6} < \sqrt[6]{9} = \sqrt[3]{3}$

Puesto que $6 < 9$, sus raíces sextas también cumplen la desigualdad.

136 Escribe como potencias de exponente fraccionario estos radicales.

a) $\sqrt{a\sqrt{a}}$ d) $\sqrt[4]{a^{-5}}$ g) $\left(\sqrt{a}\right)^3$

b) $\sqrt[3]{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$ e) $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ h) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}}$

c) $\sqrt{\dfrac{a}{\sqrt{a}}}$ f) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}$ i) $\sqrt[4]{\sqrt{\dfrac{1}{a}}}$

a) $\left(a \cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{4}}$

b) $\left(a\left(a \cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(a \cdot a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{7}{12}}$

c) $\left(\dfrac{a}{a^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{4}}$

d) $a^{-\frac{5}{4}}$

e) $\dfrac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{-\frac{1}{2}}$

f) $\dfrac{1}{a^{\frac{1}{4}}} = a^{-\frac{1}{4}}$

g) $a^{\frac{3}{2}}$

h) $a^{-\frac{1}{3}}$

i) $\sqrt[8]{\dfrac{1}{a}} = a^{-\frac{1}{8}}$

137 Expresa mediante un solo radical.

a) $\sqrt[5]{3\sqrt{5}}$ d) $\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

b) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}}$ e) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}$

c) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}$ f) $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{5}}}$

a) $\left(3 \cdot 5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}} = 3^{\frac{1}{5}} \cdot 5^{\frac{1}{10}} = 3^{\frac{2}{10}} \cdot 5^{\frac{1}{10}} =$

$= \sqrt[10]{3^2 \cdot 5}$

b) $\left(\dfrac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{1}{6}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{2}$

c) $\left(\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{3}$

d) $\left(\dfrac{1}{2^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{-1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{-1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$

e) $\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{2}$

f) $\dfrac{1}{\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{5^{\frac{1}{4}}} = 5^{\frac{-1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{5}}$

138 **RETO.** Simplifica los siguientes radicales.

a) $\sqrt{a^2 + 4 - 4a}$

b) $\sqrt{\frac{1}{2} + 2a^2 + 2a}$

a) $\sqrt{(a-2)^2} = a - 2$

b) $\sqrt{\left(\sqrt{2}a + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{2}a + \frac{1}{\sqrt{2}} =$

$= \sqrt{2}a + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \cdot \left(a + \frac{1}{2}\right)$

139 Extrae los factores que puedas de cada radical.

a) $\sqrt{125}$ d) $\sqrt[3]{250}$ g) $\sqrt[4]{224}$

b) $\sqrt{80}$ e) $\sqrt[3]{1080}$ h) $\sqrt[5]{-486}$

c) $\sqrt[3]{189}$ f) $\sqrt[4]{720}$ i) $\sqrt{3528}$

a) $5\sqrt{5}$ f) $2\sqrt[4]{45}$

b) $4\sqrt{5}$ g) $2\sqrt[4]{14}$

c) $3\sqrt[3]{7}$ h) $-3\sqrt[5]{2}$

d) $5\sqrt[3]{2}$ i) $42\sqrt{2}$

e) $6\sqrt[3]{5}$

140 Calcula descomponiendo el radicando en factores primos.

a) $\sqrt{729}$ c) $\sqrt[4]{50625}$

b) $\sqrt[3]{64000}$ d) $\sqrt[5]{59049}$

a) $\sqrt{3^6} = \pm 3^3 = \pm 27$

b) $\sqrt[3]{2^9 \cdot 5^3} = 2^3 \cdot 5 = 40$

c) $\sqrt[4]{3^4 \cdot 5^4} = \pm 3 \cdot 5 = \pm 15$

d) $\sqrt[5]{3^{10}} = 3^2 = 9$

141 Extrae factores de los radicales.

a) $\sqrt{32x^3y^2}$

b) $\sqrt[3]{5^5x^6}$

c) $\sqrt[3]{125x^7y^2}$

d) $\sqrt[4]{256x^3y^{15}}$

e) $\sqrt[4]{x^{12}y^9z^{19}}$

f) $\sqrt[5]{729x^4y^{22}z^{15}}$

a) $4xy\sqrt{2x}$

b) $5x^2\sqrt[3]{5^2}$

c) $5x^2\sqrt[3]{xy^2}$

d) $4y^3\sqrt[4]{x^3y^3}$

e) $x^3y^2z^4\sqrt[4]{yz^3}$

f) $3y^4z^3\sqrt[5]{3x^4y^2}$

142 Introduce los factores dentro del radical y simplifica la expresión todo lo que puedas.

a) $3\sqrt{6}$ c) $3\sqrt[3]{-9^2}$

b) $2\sqrt[5]{3}$ d) $2^3\sqrt[4]{8}$

a) $\sqrt{3^2 \cdot 6} = \sqrt{3^3 \cdot 2} = \sqrt{54}$

b) $\sqrt[5]{2^5 \cdot 3} = \sqrt[5]{96}$

c) $\sqrt[3]{-3^3 \cdot 3^4} = \sqrt[3]{-3^7}$

d) $\sqrt[4]{2^{12} \cdot 2^3} = \sqrt[4]{2^{15}}$

143 Introduce los factores dentro del radical.

a) $2\sqrt[3]{5}$ d) $\frac{3}{5}\sqrt{2}$

b) $4\sqrt[4]{20}$ e) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{6}$

c) $3\sqrt[5]{15}$ f) $2\sqrt[3]{7}$

a) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{40}$

b) $\sqrt[4]{4^4 \cdot 20} = \sqrt[4]{5120}$

c) $\sqrt[5]{3^5 \cdot 15} = \sqrt[5]{3645}$

d) $\sqrt{\frac{3^2 \cdot 2}{5^2}} = \sqrt{\frac{18}{25}}$

e) $\sqrt[4]{\frac{1 \cdot 6}{2^4}} = \sqrt[4]{\frac{6}{16}} = \sqrt[4]{\frac{3}{8}}$

f) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 7} = \sqrt[3]{56}$

144 Introduce los factores dentro del radical.

a) $5\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$ b) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ c) $\frac{1}{7} \cdot \frac{\sqrt[3]{3}}{4}$

a) $5\sqrt[3]{\frac{1}{5}} = \sqrt[3]{25}$

b) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{18}{125}}$

c) $\frac{1}{7} \cdot \frac{\sqrt[3]{3}}{4} = \sqrt[3]{\frac{3}{21952}}$

145 Copia y completa las potencias que faltan.

a) $2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^{\square}\cdot 5}$

b) $3^{\square}\sqrt{2} = \sqrt{3^6\cdot 2}$

c) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{\frac{5}{2^{\square}}}$

d) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{\frac{2^{\square}\cdot 7}{3^{\square}}}$

e) $3^{\square}\sqrt{\frac{2}{5}} = \sqrt{\frac{3^6\cdot 2}{5}}$

f) $\frac{\sqrt[3]{5}}{3^2} = \sqrt[3]{\frac{5}{3^{\square}}}$

a) 3 c) 4 e) 3

b) 3 d) 3 f) 6

146 Introduce los factores dentro del radical si es posible.

a) $a\sqrt{\frac{4a-1}{2a}}$

b) $\frac{4ab}{c}\sqrt[4]{\frac{c^2b}{8a}}$

c) $-2ab^2\sqrt[3]{ab}$

d) $\frac{2}{a}\sqrt{\frac{3a}{8}}$

e) $5+\sqrt{2}$

f) $-a^2\sqrt[3]{a}$

a) $a\cdot\sqrt{\frac{4a-1}{2a}} = \sqrt{\frac{a^2(4a-1)}{2a}} =$
$= \sqrt{\frac{4a^2-a}{2}}$

b) $\frac{4ab}{c}\cdot\sqrt[4]{\frac{c^2b}{8a}} = \sqrt[4]{\frac{4^4a^4b^4c^2b}{c^4 8a}} =$
$= \sqrt[4]{\frac{2^8a^4b^5c^2}{2^3ac^4}} = \sqrt[4]{\frac{2^5a^3b^5}{c^2}}$

c) $-2ab^2\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{-2^3a^3b^6ab} = \sqrt[3]{-2^3a^4b^7}$

d) $\frac{2}{a}\cdot\sqrt{\frac{3a}{8}} = \sqrt{\frac{2^2 3a}{2^3a^2}} = \sqrt{\frac{3}{2a}}$

e) No es posible introducir factores, puesto que 5 no es factor.

f) $-a^2\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{-a^6a} = \sqrt[3]{-a^7}$

147 Realiza las siguientes sumas y restas de radicales.

a) $\sqrt{32}-\sqrt{8}+\sqrt{98}$

b) $5\sqrt[3]{81}+4\sqrt[3]{108}$

c) $\sqrt{6}+7\sqrt{24}-\frac{2}{3}\sqrt{54}-\sqrt{18}$

d) $\sqrt{75}-2\sqrt{12}-\sqrt{363}+4\sqrt{3}$

a) $\sqrt{32}-\sqrt{8}+\sqrt{98} =$
$= 4\sqrt{2}-2\sqrt{2}+7\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$

b) $5\sqrt[3]{81}+4\sqrt[3]{108} = 15\sqrt[3]{3}+12\sqrt[3]{4}$

c) $\sqrt{6}+7\sqrt{24}-\frac{2}{3}\sqrt{54}-\sqrt{18} =$
$= \sqrt{6}+7\cdot 2\sqrt{6}-2\sqrt{6}-3\sqrt{2} =$
$= 13\sqrt{6}-3\sqrt{2}$

d) $\sqrt{75}-2\sqrt{12}-\sqrt{363}+4\sqrt{3} =$
$= 5\sqrt{3}-4\sqrt{3}-11\sqrt{3}+4\sqrt{3} = -6\sqrt{3}$

148 **RETO.** Demuestra la siguiente igualdad.

$$\sqrt{11+3\sqrt{8}} = 3+\sqrt{2}$$

$\sqrt{11+3\sqrt{8}} = \sqrt{11+6\sqrt{2}} =$
$= \sqrt{(3+\sqrt{2})^2} = 3+\sqrt{2}$

149 **INVESTIGA.** La expresión $\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ es un número entero. Averigua cuál es.

Al elevar al cuadrado la expresión se obtiene un cuadrado perfecto.

$\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^2 = 3+2\sqrt{2}+$
$+3-2\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{3+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3-2\sqrt{2}} =$
$= 6-2\cdot 1 = 4$

$\sqrt{\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{4} \rightarrow$
$\rightarrow \sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}} = 2$

150 Halla el número entero que es igual al valor de la siguiente expresión con radicales.

$$2\sqrt{10}\cdot\sqrt[4]{25}\cdot\sqrt[6]{8}$$

$2\sqrt{10}\cdot\sqrt[4]{25}\cdot\sqrt[6]{8} = 2(2\cdot 5)^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{2}{4}}\cdot 2^{\frac{3}{6}} =$
$= 2\cdot 2\cdot 5 = 20 \in \mathbb{Z}$

151 Realiza las siguientes operaciones y simplifica.

a) $\left(5\sqrt{2}+3\right)\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)$

b) $\left(1-2\sqrt{5}\right)\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)$

c) $\left(-\sqrt{3}+5\right)\cdot\left(5-2\sqrt{3}\right)$

d) $\left(\sqrt{2}+2\sqrt{2}\right)\cdot\left(3-\sqrt{2}\right)$

e) $\left(\sqrt{2}-5\right)\cdot\left(4\sqrt{2}-3\right)$

f) $\left(-2\sqrt{7}-5\right)\cdot\left(\sqrt{7}-3\sqrt{7}\right)$

a) $\left(5\sqrt{2}+3\right)\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)=16+13\sqrt{2}$

b) $(1-2\sqrt{5})\cdot(3+\sqrt{5})=$
$=3+\sqrt{5}-6\sqrt{5}-10=-7-5\sqrt{5}$

c) $\left(-\sqrt{3}+5\right)\cdot\left(5-2\sqrt{3}\right)=31-15\sqrt{3}$

d) $\left(\sqrt{2}+2\sqrt{2}\right)\cdot\left(3-\sqrt{2}\right)=$
$=3\sqrt{2}\cdot\left(3-\sqrt{2}\right)=-6+9\sqrt{2}$

e) $\left(\sqrt{2}-5\right)\cdot\left(4\sqrt{2}-3\right)=23\left(1-\sqrt{2}\right)$

f) $\left(-2\sqrt{7}-5\right)\cdot\left(\sqrt{7}-3\sqrt{7}\right)=$
$=\left(-2\sqrt{7}-5\right)\cdot\left(-2\sqrt{7}\right)=28+10\sqrt{7}$

152 Realiza las siguientes operaciones con radicales.

a) $\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[3]{a^5}\cdot\sqrt[6]{a^4}$

b) $\sqrt[3]{3a^2b}\cdot\sqrt{2ab^3}$

c) $\sqrt[5]{2a^3b^4}:\sqrt[3]{4ab^2}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{ab}}\cdot\sqrt{a\sqrt[3]{b}}$

a) $a^{\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{5}{3}}\cdot a^{\frac{4}{6}}=a^{\frac{9}{12}}\cdot a^{\frac{20}{12}}\cdot a^{\frac{8}{12}}=\sqrt[12]{a^{37}}=$
$=a^3\sqrt[12]{a}$

b) $(3a^2b)^{\frac{1}{3}}\cdot(2ab^3)^{\frac{1}{2}}=(3a^2b)^{\frac{2}{6}}\cdot(2ab^3)^{\frac{3}{6}}=$
$=\sqrt[6]{3^2a^4b^2 2^3a^3b^9}=\sqrt[6]{2^3 3^2a^7b^{11}}=$
$=ab\sqrt[6]{2^3 3^2ab^5}$

c) $(2a^3b^4)^{\frac{1}{5}}:(4ab^2)^{\frac{1}{3}}=(2a^3b^4)^{\frac{3}{15}}:(4ab^2)^{\frac{5}{15}}=$
$=\sqrt[15]{\dfrac{2^3a^9b^{12}}{4^5a^5b^{10}}}=\sqrt[15]{\dfrac{a^4b^2}{2^7}}$

d) $\left((ab)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(ab^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}}=$
$=a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a^2b}$

153 Halla el resultado de estos productos.

a) $\sqrt{7-2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{7+2\sqrt{6}}$

b) $\sqrt[3]{5\sqrt{3}-1}\cdot\sqrt[3]{5\sqrt{3}+1}$

c) $\sqrt[4]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

d) $\sqrt[3]{4\sqrt{2}+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{4\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

a) $\sqrt{7-2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{7+2\sqrt{6}}=$
$=\sqrt{\left(7-2\sqrt{6}\right)\left(7+2\sqrt{6}\right)}=$
$=\sqrt{49-24}=\sqrt{25}=5$

b) $\sqrt[3]{5\sqrt{3}-1}\cdot\sqrt[3]{5\sqrt{3}+1}=$
$=\sqrt[3]{\left(5\sqrt{3}-1\right)\left(5\sqrt{3}+1\right)}=$
$=\sqrt[3]{75-1}=\sqrt[3]{74}$

c) $\sqrt[4]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=$
$=\sqrt[4]{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=$
$=\sqrt[4]{3-2}=1$

d) $\sqrt[3]{4\sqrt{2}+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{4\sqrt{2}-2\sqrt{3}}=$
$=\sqrt[3]{\left(4\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)\cdot\left(4\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)}=$
$=\sqrt[3]{32-12}=\sqrt[3]{20}$

154 Demuestra que los números $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ y $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ son inversos.

Si son inversos su producto ha de ser 1, como demostramos a continuación:

$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=\dfrac{\left(\sqrt{5}+1\right)\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)}{2\cdot 2}=$
$=\dfrac{5-1}{4}=1$

155 **RETO.** ¿Cuánto tiene que valer a para que se cumpla que $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[5]{a^4}=1$? ¿Y para que $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[5]{a^4}=a$?

$\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[5]{a^4}=\sqrt[60]{a^{40}\cdot a^{45}\cdot a^{48}}=\sqrt[60]{a^{133}}$

Igualamos a 1 para despejar:
$\sqrt[60]{a^{133}}=1\rightarrow a=1$

$\sqrt[60]{a^{133}}=a\rightarrow a^{60}\cdot(a^{73}-1)=0$, por tanto, $a=0$ o bien $a=1$

156 Realiza las operaciones con radicales que aparecen a continuación.

a) $\left(\sqrt{\frac{a}{9}+\frac{a}{16}}\right)^{-2}$ c) $\left(\sqrt{\frac{a}{2}}-\sqrt{2a}\right)^{2}$

b) $\left(\sqrt{\frac{a}{2}+\frac{2a}{5}}\right)^{-4}$ d) $\left(\sqrt{6a}+\sqrt{\frac{2a}{3}}\right)^{2}$

a) $\left(\sqrt{\frac{16a+9a}{144}}\right)^{-2}=\left(\sqrt{\frac{25a}{144}}\right)^{-2}=$

$=\left(\frac{5}{12}\sqrt{a}\right)^{-2}=\frac{144}{25a}$

b) $\left(\sqrt{\frac{9a}{10}}\right)^{-4}=\left(\frac{9a}{10}\right)^{\frac{-4}{2}}=\left(\frac{10}{9a}\right)^{2}=\frac{100}{81a^2}$

c) $\frac{a}{2}+2a-2a=\frac{a}{2}$

d) $6a+\frac{2a}{3}+4a=10a+\frac{2a}{3}=\frac{32a}{3}$

157 Realiza las operaciones que aparecen a continuación y simplifica.

a) $\frac{\sqrt[4]{2^3}\cdot 2^{-4}\cdot\sqrt[3]{2}}{2^2\cdot\sqrt{2}\cdot 2^{-\frac{5}{2}}}$

b) $\left(81^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt[8]{3}}\right):\sqrt{3}$

c) $\left(\sqrt{14+\sqrt{7-\sqrt[4]{81}}}\right)^{-\frac{1}{2}}$

d) $\sqrt{6+\sqrt[3]{20+\sqrt{47+\sqrt[4]{16}}}}$

a) $\frac{2^{\frac{3}{4}}\cdot 2^{-4}\cdot 2^{\frac{1}{3}}}{2^2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{-\frac{5}{2}}}=\frac{2^{\frac{13}{12}}}{2^4}=$

$=\frac{2^{\frac{13}{12}}}{2^{\frac{48}{12}}}=\frac{1}{\sqrt[12]{2^{35}}}=\frac{\sqrt[12]{2}}{2^3}$

b) $\left(3\cdot 3^{-\frac{1}{4}}\cdot 3^{-\frac{1}{8}}\right):3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{5}{8}}:3^{\frac{1}{2}}=$

$=3^{\frac{1}{8}}=\sqrt[8]{3}$

c) $\left(\sqrt{14+\sqrt{7-3}}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\sqrt{14+2}\right)^{-\frac{1}{2}}=$

$=4^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$

d) $\sqrt{6+\sqrt[3]{20+7}}=\sqrt{6+3}=\sqrt{9}=3$

158 Expresa solo con raíces cuadradas.

a) $\sqrt[4]{15}$ b) $\sqrt[8]{15}$ c) $10^{\frac{1}{8}}$ d) $10^{\frac{1}{16}}$

a) $\sqrt{\sqrt{15}}$ c) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}$

b) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{15}}}$ d) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}}$

159 **RETO.** Averigua el valor de la siguiente expresión.

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}$$

$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}=a\rightarrow$

$\rightarrow\sqrt{2+a}=a\rightarrow\begin{cases}a=-1\rightarrow\text{No válida}\\ a=2\end{cases}$

Por tanto, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}=2$

160 **INVESTIGA.** Comprueba si son verdaderas o falsas estas igualdades y pon un ejemplo para comprobarlo.

a) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[nm]{ab}$

b) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[n+m]{ab}$

c) $\sqrt[n]{a+b}=\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$

d) $a\sqrt[n]{b^m}=\sqrt[n]{(ab)^m}$

e) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=a\sqrt{ab}$

f) $a\sqrt{b+c}=\sqrt{ab+ac}$

g) $\sqrt[4]{a^8b^2}=a^2\sqrt{b}$

h) $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$

a) Falso. $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{b}=\sqrt[12]{a^4\cdot b^3}$

b) Falso. $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{b}=\sqrt[12]{a^4\cdot b^3}$

c) Falso. $\sqrt[3]{3+5}=\sqrt[3]{8}=2$. Mientras que: $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5}\neq 2$

d) Falso. $5\sqrt[3]{3^2}=\sqrt[3]{5^3\cdot 3^2}=\sqrt[3]{1\,125}\neq$ $\neq\sqrt[3]{(5\cdot 3)^2}=\sqrt[3]{225}$

e) Verdadero.

f) Falso. $2\sqrt{1+3}=4$, en cambio: $\sqrt{2(1+3)}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

g) Verdadero.

h) Falso. $\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}\neq 2+3=5$

Racionalización

161 Racionaliza las siguientes expresiones y simplifica el resultado.

a) $\dfrac{3}{4\sqrt{3}}$ d) $\dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt[4]{3^3}}$

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$ e) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{4}}$

c) $\dfrac{12}{\sqrt[3]{9}}$ f) $\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt[6]{3}}$

a) $\dfrac{3}{4\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[6]{2^7}}{2} = \sqrt[6]{2}$

c) $\dfrac{12}{\sqrt[3]{9}} = 4\sqrt[3]{3}$

d) $\dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt[4]{3^3}} = \dfrac{\sqrt[4]{3^3}}{9}$

e) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{4}} = 1$

f) $\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt[6]{3}} = 3\sqrt[3]{3}$

162 Racionaliza las siguientes expresiones y simplifica el resultado.

a) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$

b) $\dfrac{7\sqrt{7}-7}{\sqrt[3]{7}}$

c) $\dfrac{5\sqrt{3}-10}{\sqrt[4]{5^3}}$

d) $\dfrac{15\sqrt{5}+5}{\sqrt[3]{-5}}$

a) $\dfrac{(2+\sqrt{2})\cdot\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{2\sqrt[3]{4}+2\sqrt[6]{2}}{2} =$
$= \sqrt[3]{4}+\sqrt[6]{2}$

b) $\dfrac{(7\sqrt{7}-7)\cdot\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{7^2}} = \dfrac{49\sqrt[6]{7}-7\sqrt[3]{49}}{7} =$
$= 7\sqrt[6]{7}-\sqrt[3]{49}$

c) $\dfrac{(5\sqrt{3}-10)\cdot\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{5^3}\cdot\sqrt[4]{5}} = \dfrac{5\sqrt[4]{45}-10\sqrt[4]{5}}{5} =$
$= \sqrt[4]{45}-2\sqrt[4]{5}$

d) $\dfrac{(15\sqrt{5}+5)\cdot\sqrt[3]{(-5)^2}}{\sqrt[3]{-5}\cdot\sqrt[3]{(-5)^2}} =$
$= \dfrac{75\sqrt[6]{5}+5\sqrt[3]{25}}{-5} = -15\sqrt[6]{5}-\sqrt[3]{25}$

163 Elimina las raíces del denominador.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ d) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

b) $\dfrac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ e) $\dfrac{7}{\sqrt{11}-3}$

c) $\dfrac{-5}{\sqrt{3}-2}$ f) $\dfrac{-5}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}$

a) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} =$
$= \dfrac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2}-1$

b) $\dfrac{3(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})} =$
$= \dfrac{3(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2-3} = -3(\sqrt{2}-\sqrt{3})$

c) $\dfrac{-5(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)} =$
$= \dfrac{-5\sqrt{3}-10}{3-4} = 5\sqrt{3}+10$

d) $\dfrac{4\sqrt{2}(3\sqrt{2}+\sqrt{5})}{(3\sqrt{2}-\sqrt{5})(3\sqrt{2}+\sqrt{5})} =$
$= \dfrac{24+4\sqrt{10}}{18-5} = \dfrac{24+4\sqrt{10}}{13}$

e) $\dfrac{7(\sqrt{11}+3)}{(\sqrt{11}-3)(\sqrt{11}+3)} = \dfrac{7\sqrt{11}+21}{11-9} =$
$= \dfrac{7\sqrt{11}+21}{2}$

f) $\dfrac{-5(\sqrt{6}-\sqrt{7})}{(\sqrt{6}+\sqrt{7})(\sqrt{6}-\sqrt{7})} =$
$= \dfrac{-5\sqrt{6}+5\sqrt{7}}{6-7} = 5\sqrt{6}-5\sqrt{7}$

164 Racionaliza las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-2}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$

c) $\dfrac{-3}{\sqrt{2}-2}$

d) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-\sqrt{6}}$

e) $\dfrac{2\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+1}$

f) $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}$

g) $\dfrac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}$

h) $\dfrac{3\sqrt{5}}{-2\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-2}=-2\left(\sqrt{3}+2\right)$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}$

c) $\dfrac{-3}{\sqrt{2}-2}=3+\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$

d) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-\sqrt{6}}=\dfrac{6+2\sqrt{2}}{7}$

e) $\dfrac{2\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+1}=-\sqrt{3}\left(1+\sqrt{3}\right)$

f) $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}=-2-\sqrt{6}$

g) $\dfrac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}-2\sqrt{6}}{3}$

h) $\dfrac{3\sqrt{5}}{-2\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\dfrac{-30+3\sqrt{15}}{17}$

165 Elimina raíces del denominador de las expresiones que aparecen a continuación.

a) $\dfrac{\sqrt{5}}{2+2\sqrt{5}}$

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

c) $\dfrac{\sqrt{8}\left(5-\sqrt{18}\right)}{\sqrt{2}\left(\sqrt{8}-2\right)}$

d) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{27}\left(\sqrt{5}+2\right)}$

a) $\dfrac{\sqrt{5}\cdot\left(2-2\sqrt{5}\right)}{\left(2+2\sqrt{5}\right)\cdot\left(2-2\sqrt{5}\right)}=$

$=\dfrac{2\sqrt{5}-10}{4-20}=\dfrac{2\sqrt{5}-10}{-16}=\dfrac{\sqrt{5}-5}{-8}$

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}-\sqrt{2}}=$

$=\dfrac{\sqrt{2}\cdot\left(3\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(3\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(3\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=$

$=\dfrac{3\sqrt{6}+2}{27-2}=\dfrac{3\sqrt{6}+2}{25}$

c) $\dfrac{10\sqrt{2}-12}{4-2\sqrt{2}}=\dfrac{5\sqrt{2}-6}{2-\sqrt{2}}=$

$=\dfrac{\left(5\sqrt{2}-6\right)\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)}{\left(2-\sqrt{2}\right)\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)}=2\sqrt{2}-1$

d) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+2\right)}=$

$=\dfrac{2\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{5}-2\right)}{3\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+2\right)\cdot\left(\sqrt{5}-2\right)}=$

$=\dfrac{2\sqrt{5}-4}{3}$

166 Racionaliza estas expresiones.

a) $\dfrac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}+\dfrac{5\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{6}}$

b) $\dfrac{12\sqrt{6}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$

a) $\dfrac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}+\dfrac{5\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{6}}=$

$=\dfrac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}-3\sqrt{6}-\sqrt{30}}{-3}+$

$+\dfrac{5\sqrt{15}+5\sqrt{30}}{-3}=$

$=\dfrac{3\sqrt{3}+6\sqrt{15}-3\sqrt{6}+4\sqrt{30}}{-3}$

b) $\dfrac{12\sqrt{6}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}=$

$=\dfrac{12\sqrt{6}\cdot\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)}{\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)\cdot\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)}=$

$=\dfrac{12\sqrt{6}\cdot\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)}{-6}=$

$=-2\sqrt{6}\cdot\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)=$

$=-12\sqrt{3}-12\sqrt{2}$

167 Halla $\dfrac{2}{2+\sqrt{2}} - \dfrac{3}{3+\sqrt{3}} - \dfrac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

$$\frac{2}{2+\sqrt{2}} - \frac{3}{3+\sqrt{3}} - \frac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} =$$
$$= \frac{4-2\sqrt{2}}{2} - \frac{9-3\sqrt{3}}{6} - \frac{6\sqrt{2}-6\sqrt{3}}{-1} =$$
$$= 2-\sqrt{2} - \frac{3-\sqrt{3}}{2} + 6\sqrt{2} - 6\sqrt{3} =$$
$$= \frac{1}{2} + 5\sqrt{2} - \frac{11}{2}\sqrt{3}$$

168 Realiza estas operaciones.

a) $\dfrac{2}{3-2\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

b) $\dfrac{2}{1+\sqrt{3}} - \dfrac{1}{2\sqrt{3}-7}$

c) $\dfrac{\sqrt[6]{5}}{\sqrt{5}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$

d) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{10}} + \dfrac{4}{\sqrt{2}-5} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

a) $\dfrac{2}{3-2\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}} = -\dfrac{30+9\sqrt{5}}{55}$

b) $\dfrac{2}{1+\sqrt{3}} - \dfrac{1}{2\sqrt{3}-7} =$
$$= \frac{3}{37}\left(13\sqrt{3}-10\right)$$

c) $\dfrac{\sqrt[6]{5}}{\sqrt{5}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}} = \dfrac{\sqrt[3]{5^2}}{5} - \dfrac{\sqrt[3]{5^2}}{5} = 0$

d) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{10}} + \dfrac{4}{\sqrt{2}-5} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} =$
$$= \frac{15\sqrt{2}}{46} - \frac{43}{23}$$

169 Realiza estas operaciones.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt[9]{6}} + \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}}$

a) $\dfrac{\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}}{\sqrt[6]{2^5}}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[18]{6^{11}}}{\sqrt[9]{6\cdot 2^3}}$

170 Calcula la siguiente expresión.

$$\frac{\sqrt{128}+2\sqrt{8}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{32}} - 4\sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{128}+2\sqrt{8}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{32}} - 4\sqrt{2} =$$
$$= \frac{8\sqrt{2}+4\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} - 4\sqrt{2} =$$
$$= \frac{15}{8} - 4\sqrt{2}$$

171 **RETO.** Simplifica la siguiente expresión.

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} =$$
$$= \frac{a+b-2\sqrt{ab}+a+b+2\sqrt{ab}}{a-b} =$$
$$= \frac{2(a+b)}{a-b}$$

172 Calcula el valor de x en estas ecuaciones.

a) $\dfrac{\sqrt{8}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = x\left(\sqrt{6}+2\right)$

b) $\dfrac{x}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Despejamos x en cada caso.

a) $x = \dfrac{\sqrt{8}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{6}+2\right)} =$
$$= \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+2\sqrt{2}+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{3}+5\sqrt{2}} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}\cdot\left(4\sqrt{3}-5\sqrt{2}\right)}{\left(4\sqrt{3}+5\sqrt{2}\right)\cdot\left(4\sqrt{3}-5\sqrt{2}\right)} =$$
$$= \frac{4\sqrt{6}-10}{48-50} = 5-2\sqrt{6}$$

b) $\dfrac{x}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow$
$$\rightarrow \frac{x}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{6})\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2\sqrt{3}} =$$
$$= \frac{2\sqrt{3}-2+6-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{4}{2\sqrt{3}} =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

173 **RETO.** ¿Cuánto vale x en la ecuación?

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+x}}$$

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{5+2x}{2+x}} \rightarrow$$
$$\rightarrow \sqrt{2} = 1 + \frac{2+x}{5+2x} \rightarrow$$
$$\rightarrow \sqrt{2} = \frac{7+3x}{5+2x} \rightarrow$$
$$\rightarrow 5\sqrt{2} + 2x\sqrt{2} = 7 + 3x$$
$$x = \frac{7-5\sqrt{2}}{-3+2\sqrt{2}} =$$
$$= \frac{(7-5\sqrt{2})\cdot(-3-2\sqrt{2})}{(-3+2\sqrt{2})\cdot(-3-2\sqrt{2})} = \sqrt{2}-1$$

174 **INVESTIGA.** Razona cómo se racionalizan las fracciones del tipo:

$$\frac{1}{\sqrt[2^n]{a}-\sqrt[2^n]{b}}$$

Multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador.

$$\frac{\sqrt[2^n]{a}+\sqrt[2^n]{b}}{(\sqrt[2^n]{a}-\sqrt[2^n]{b})(\sqrt[2^n]{a}+\sqrt[2^n]{b})} = \frac{\sqrt[2^n]{a}+\sqrt[2^n]{b}}{\sqrt[2^{n-1}]{a}-\sqrt[2^{n-1}]{b}}$$

$$\frac{(\sqrt[2^n]{a}+\sqrt[2^n]{b})(\sqrt[2^{n-1}]{a}+\sqrt[2^{n-1}]{b})}{(\sqrt[2^{n-1}]{a}-\sqrt[2^{n-1}]{b})(\sqrt[2^{n-1}]{a}+\sqrt[2^{n-1}]{b})} =$$
$$= \frac{(\sqrt[2^n]{a}+\sqrt[2^n]{b})(\sqrt[2^{n-1}]{a}+\sqrt[2^{n-1}]{b})}{\sqrt[2^{n-2}]{a}-\sqrt[2^{n-2}]{b}}$$

Por tanto, multiplicando por el conjugado n veces:

$$\frac{(\sqrt[2^n]{a}+\sqrt[2^n]{b})(\sqrt[2^{n-1}]{a}+\sqrt[2^{n-1}]{b})\ldots(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$$

6. Opera con logaritmos y resuelve problemas

ACTIVIDADES FLASH

175 Recuerda las propiedades de los logaritmos y calcula.

a) $\log_9 81$
b) $\log_4 64$
c) $\ln e^2$
d) $\ln e^{-14}$
e) $\log 100\,000$
f) $\log \frac{1}{100}$
g) $\log_5 \sqrt{125}$
h) $\log \sqrt[3]{0,1}$
i) $\log_3 \frac{1}{27}$
j) $\log 0,00001$
k) $\log_{\frac{1}{2}} 2$
l) $\log_{\frac{1}{3}} 9$

a) $\log_9 81 = 2$
b) $\log_4 64 = 3$
c) $\ln e^2 = 2$
d) $\ln e^{-14} = -14$
e) $\log 100\,000 = 5$
f) $\log \frac{1}{100} = -2$
g) $\log_5 \sqrt{125} = 3/2$
h) $\log \sqrt[3]{0,1} = -1/3$
i) $\log_3 \frac{1}{27} = -3$
j) $\log 0,00001 = -5$
k) $\log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$
l) $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$

176 Determina cuáles de las siguientes igualdades son ciertas y corrige las que no lo sean.

a) $\log (a+b) = \log a + \log b$
b) $\log 0 = 1$
c) $\log (a : b) = \log a - \log b$
d) $\log (a^b) = \log b \cdot \log a$

a) Falsa: $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$
b) Falsa: $\log 0 \neq 1 \rightarrow \log 1 = 0$
c) Cierta: $\log(a : b) = \log a - \log b$
d) Falsa: $\log(a^b) = b \cdot \log a$

177 Halla el resultado de las expresiones mediante las propiedades de los logaritmos.

a) $2\log_4 16 + \log_2 32 - 3\log_7 49$

b) $\log_2 8 + \log_3 27 + \log_5 125$

c) $\log_5 625 - \log_9 81 + \log_8 64$

a) $2\log_4 16 + \log_2 32 - 3\log_7 49 =$
$= 2 \cdot 2 + 5 - 3 \cdot 2 = 3$

b) $\log_2 8 + \log_3 27 + \log_5 125 =$
$= 3 + 3 + 3 = 9$

c) $\log_5 625 - \log_9 81 + \log_8 64 =$
$= 4 - 2 + 2 = 4$

178 **RETO.** Calcula estos logaritmos.

a) $\log_9 243$

b) $\log_{25} 125$

c) $\log_{32} 4$

d) $\log_4 512$

a) $\frac{5}{2}$

b) $\frac{3}{2}$

c) $\frac{2}{5}$

d) $\frac{9}{2}$

179 **INVESTIGA.** ¿Existe algún valor de x que cumpla que $\log_5 x = \log_{25} x$?

$\log_5 x = \log_{25} x \rightarrow$

$\rightarrow \frac{\log x}{\log 5} = \frac{\log x}{\log 25} \rightarrow$

$\rightarrow \frac{\log x}{\log 5} = \frac{\log x}{2 \cdot \log 5} \rightarrow$

$\rightarrow 2 \cdot \log 5 \cdot \log x = \log 5 \cdot \log x \rightarrow$

$\rightarrow 2 \cdot \log 5 \cdot \log x - \log 5 \cdot \log x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \log 5 \cdot \log x = 0 \rightarrow \log x = 0 \rightarrow x = 1$

La igualdad solo se da para $x = 1$.

180 **INVESTIGA.** Si $\log e = 0{,}4343$; ¿cuánto vale $\ln 10$? ¿Y $\ln 0{,}1$?

$$\ln 10 = \frac{\log 10}{\log e} = \frac{1}{0{,}4343} = 2{,}3025$$

$$\ln 0{,}1 = \frac{\log 0{,}1}{\log e} = \frac{-1}{0{,}4343} = -2{,}3025$$

181 Si $\log_4 N = 3$, halla el valor de esta expresión.

$$\log_4 \frac{\sqrt{N}}{N^2}$$

$$\log_4 \frac{\sqrt{N}}{N^2} = \frac{1}{2}\log_4 N - 2\log_4 N =$$
$$= -\frac{3}{2}\log_4 N = -\frac{3}{2} \cdot 3 = -\frac{9}{2}$$

182 Sabiendo que $\log 4 = 0{,}6021$; calcula los siguientes logaritmos.

a) $\log 2$

b) $\log \frac{1}{4}$

c) $\log 0{,}2$

d) $\log 4\,000$

a) $\log 2 = \frac{\log 4}{2} = 0{,}30105$

b) $\log \frac{1}{4} = -\log 4 = -0{,}6021$

c) $\log 0{,}2 = \frac{\log 4}{2} - \log 10 =$
$= 0{,}30105 - 1 = -0{,}69895$

d) $\log 4\,000 = \log 4 + \log 1\,000 =$
$= 0{,}6021 + 3 = 3{,}6021$

183 Halla el valor de estos logaritmos decimales, teniendo en cuenta que $\log 2 = 0{,}3010$.

a) $\log 1\,250$

b) $\log 0{,}125$

c) $\log 5$

d) $\log 0{,}04$

e) $\log 1{,}6$

f) $\log 0{,}2$

a) $\log\left(\frac{10\,000}{8}\right) = \log 10\,000 - \log 8 =$
$= 4 - 3\log 2 = 4 - 3 \cdot 0{,}3010 =$
$= 3{,}097$

b) $\log\left(\frac{125}{1\,000}\right) = \log\left(\frac{5^3}{2^3 \cdot 5^3}\right) =$
$= \log \frac{1}{2^3} = \log 2^{-3} = -3\log 2 =$
$= -3 \cdot 0{,}301 = -0{,}903$

c) $\log\left(\frac{10}{2}\right) = \log 10 - \log 2 =$
$= 1 - 0{,}3010 = 0{,}699$

d) $\log\left(\frac{4}{100}\right) = 2\log 2 - 2\log 10 =$
$= 2 \cdot 0{,}301 - 2 = -1{,}398$

e) $\log\left(\frac{16}{10}\right) = 4\log 2 - \log 10 =$
$= 4 \cdot 0{,}301 - 1 = 0{,}204$

f) $\log\left(\frac{2}{10}\right) = \log 2 - \log 10 =$
$= 0{,}301 - 1 = -0{,}699$

184 Sabiendo que $\log 7 = 0{,}8451$ calcula aplicando las propiedades de los logaritmos.

$$\log 28 + \log 15 - \log 6$$

$\log 28 + \log 15 - \log 6 = \log\left(\frac{28 \cdot 15}{6}\right) =$
$= \log 70 = \log 7 + \log 10 =$
$= \log 7 + 1 = 1{,}8451$

185 Sabiendo que $\log 3 = 0{,}4771$, calcula estos logaritmos aplicando las propiedades.

a) $\log \frac{27\sqrt[3]{10}}{3^4\sqrt{30}}$ b) $\log \sqrt{\frac{27\sqrt{3}}{\frac{1}{3}}}$

Simplificamos y aplicamos las propiedades.

a) $\log \frac{27\sqrt[3]{10}}{3^4\sqrt{30}} = \log \frac{\sqrt[3]{10}}{3\sqrt{30}} =$

$= \log \frac{\sqrt[6]{3^3 \cdot 10^5}}{90} = \log \frac{3^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{\frac{5}{6}}}{3^2 \cdot 10} =$

$= \frac{1}{2}\log 3 + \frac{5}{6}\log 10 - 2\log 3 - \log 10 =$

$= -\frac{3}{2} \cdot 0{,}4771 - \frac{1}{6} = -0{,}8823$

b) $\log \sqrt{\frac{27\sqrt{3}}{\frac{1}{3}}} = \log \sqrt{81\sqrt{3}} = \log \sqrt[4]{3^9} =$

$= \frac{9}{4}\log 3 = \frac{9}{4} \cdot 0{,}4771 = 1{,}0735$

186 Sabiendo que $\ln a = 0{,}6$ y que $\ln b = 2{,}2$ calcula los siguientes logaritmos.

a) $\ln\sqrt{a}$ c) $\ln\sqrt[4]{\frac{ab}{e^2}}$

b) $\ln\sqrt[3]{b}$ d) $\ln\frac{\sqrt{a^{-5}}}{\sqrt[3]{b}}$

a) $\frac{1}{2}\ln a = 0{,}3$

b) $\frac{1}{3}\ln b = 0{,}7333$

c) $\frac{1}{4}(\ln a + \ln b - 2\ln e) = 0{,}2$

d) $-\frac{5}{2}\ln a - \frac{1}{3}\ln b = -2{,}23333$

187 **INVESTIGA.** El valor del logaritmo de 0,5 en una cierta base es $\frac{1}{5}$.

a) Halla dicha base.
b) Calcula el logaritmo de 0,25 en esa base.

a) $\log_x 0{,}5 = \frac{1}{5}; \frac{\log\frac{1}{2}}{\log x} = \frac{1}{5};$

$\log x = 5\log\frac{1}{2}; \log x = \log\left(\frac{1}{2}\right)^5;$

$x = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

b) $\log_{2^{-5}} 0{,}25 = \log_{2^{-5}} 2^{-2} =$

$= \frac{\log_2 2^{-2}}{\log_2 2^{-5}} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$

188 **RETO.** Si $\log_{10}\left(\sqrt{2\,020} + \sqrt{2\,010}\right) = n$, ¿cuánto vale $\log_{10}\left(\sqrt{2\,020} - \sqrt{2\,010}\right)$?

$\log_{10}\left(\sqrt{2\,020} - \sqrt{2\,010}\right) =$

$= \log_{10}\frac{\left(\sqrt{2\,020} - \sqrt{2\,010}\right)\cdot\left(\sqrt{2\,020} + \sqrt{2\,010}\right)}{\left(\sqrt{2\,020} + \sqrt{2\,010}\right)} =$

$= \log_{10}\frac{2\,020 - 2\,010}{\left(\sqrt{2\,020} + \sqrt{2\,010}\right)} =$

$= \log_{10}\frac{10}{\left(\sqrt{2\,020} + \sqrt{2\,010}\right)} =$

$= \log_{10} 10 - \log_{10}\left(\sqrt{2\,020} + \sqrt{2\,010}\right) =$
$= 1 - n$

189 **INVENTA.** Para escribir cualquier número natural con 3 doses se puede utilizar la siguiente fórmula:

$$n = -\log_2 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}_{n \text{ veces}}$$

a) Elige tres números naturales y verifica la fórmula.

b) Comprueba que la fórmula es correcta para cualquier n.

a) Respuesta abierta. Por ejemplo:
Elegimos los números 1, 2 y 3:

- Para $n = 1$:

$$-\log_2 \log_2 \sqrt{2} = -\log_2\left(\frac{1}{2}\log_2 2\right) =$$
$$= -\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = 0 + 1 = 1$$

- Para $n = 2$:

$$-\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{2}} = -\log_2\left(\frac{1}{4}\log_2 2\right) =$$
$$= -\log_2\left(\frac{1}{4}\right) = 0 + 2 = 2$$

- Para $n = 3$:

$$-\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = -\log_2\left(\frac{1}{8}\log_2 2\right) =$$
$$= -\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = 0 + 3 = 3$$

b) Queremos demostrar la igualdad:
$k = -\log_2 \log_2 \sqrt[2^k]{2}$

$$-\log_2 \log_2 \sqrt[2^k]{2} = -\log_2\left(\frac{1}{2^k}\log_2 2\right) =$$
$$= -\log_2\left(\frac{1}{2^k}\right) = 0 + \log_2 2^k = k$$

190 **MATEMÁTICAS Y... SISMOGRAFÍA.** La escala de Richter es una escala logarítmica con valores entre 1 y 9:

$$M = \log P$$

Donde M es la magnitud del terremoto y P indica cuántas veces es mayor la amplitud de la onda sísmica. Así, un temblor de magnitud 7 es 10 veces más fuerte que uno de magnitud 6, 100 veces más que uno de magnitud 5, 1 000 veces más que uno de magnitud 4, etc.

El terremoto más fuerte que ha habido en España fue el de Granada de 1884 con una magnitud de 6,7. El terremoto de San Francisco de 1906 tuvo una magnitud de 8,25. ¿Cuántas veces fue más fuerte el terremoto de San Francisco que el de Granada?

El terremoto de Granada fue de:
$6{,}7 = \log P \rightarrow P = 10^{6{,}7}$

El terremoto de San Francisco fue de:
$8{,}25 = \log P \rightarrow P = 10^{8{,}25}$

Luego el terremoto de San Francisco fue $10^{8{,}25} = 10^{6{,}7} \cdot x$; $x = 10^{1{,}55} = 35{,}48$ veces mayor que el de Granada.

191 **MATEMÁTICAS Y... ACÚSTICA.** El decibelio mide la intensidad sonora. La fórmula para medir los decibelios es:

$$D = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

Donde D es el número de decibelios, I_0 los vatios por metro cuadrado del sonido umbral e I los vatios por metro cuadrado del sonido que se está tratando.
Por ejemplo, si un obrero utiliza un martillo mecánico.

	Intensidad aproximada (W/m²)
Umbral de audición	10^{-12}
Martillo mecánico	$3 \cdot 10^{-3}$

¿Cuántos decibelios soportará el obrero?

$$D = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0} = 10 \cdot \log \frac{3 \cdot 10^{-3}}{10^{-12}} =$$
$$= 10 \cdot \log(3 \cdot 10^9) = 90 + 10 \log 3 =$$
$$= 94{,}77 \text{ dB}$$

Esta actividad puede utilizarse para trabajar el ODS 8, trabajo decente y crecimiento económico.

FAKE NEWS

Los números no mienten

Aunque las declaraciones de las autoridades invitan al optimismo: «la mortalidad se reduce a la mitad, estamos ganando la batalla al virus», los fríos números indican lo contrario; del 10 de marzo, con 35 fallecidos, al 1 de abril, con 950, el número de muertes se ha multiplicado por 27.

10 de marzo de 2020
Infectados 1 590
Fallecidos 35

1 de abril de 2020
Infectados 73 490
Fallecidos 950

Y tú, ¿qué opinas?

Respuesta abierta. Por ejemplo:

La proporción del número de fallecidos entre el de los infectados el 10 de marzo es:

$$\frac{35}{1\,590} = 2{,}2\,\%$$

La proporción del número de fallecidos entre el de los infectados el 1 de abril es:

$$\frac{950}{73\,490} = 1{,}3\,\%$$

Aunque las muertes se han multiplicado por algo más de 27, la proporción del número de fallecidos con respecto al número de infectados es menor, poco más de la mitad, luego no es cierto que la mortalidad se haya reducido a la mitad.

PROBLEMAS APARENTEMENTE DISTINTOS

192 Realiza estas operaciones con números en notación científica.

a) $5{,}75 \cdot 10^4 \cdot 24$

b) $\dfrac{1{,}85 \cdot 10^{10}}{5{,}75 \cdot 10^4 \cdot 24 \cdot 365}$

a) $1{,}38 \cdot 10^6$

b) $\dfrac{1{,}85 \cdot 10^{10}}{5{,}037 \cdot 10^8} = 3{,}673 \cdot 10$

193 En 1977 se lanzó la sonda Voyager. Llevaba un disco de oro con saludos y música de todo el mundo. La sonda continúa viajando a $5{,}75 \cdot 10^4$ km/h por el espacio.

a) ¿Cuántos kilómetros recorre al día?

b) ¿Cuándo alcanzó el límite del sistema solar, que se encuentra a $1{,}85 \cdot 10^{10}$ km?

a) $5{,}75 \cdot 10^4 \cdot 24 = 1{,}38 \cdot 10^6$

La sonda Voyager recorre $1{,}38 \cdot 10^6$ km al día.

b) $\dfrac{1{,}85 \cdot 10^{10}}{1{,}38 \cdot 10^6} = 1{,}3406 \cdot 10^4$ días.

Alcanzó el límite del sistema solar a los 13 406 días de su lanzamiento, es decir, a los 36 años, 8 meses y 22,8 días.

194 Toma el valor de $\sqrt{2} = 1{,}414213562$ y calcula los errores relativo y absoluto de las siguientes aproximaciones.

a) $\sqrt{2} \approx 1 + \dfrac{24}{60} + \dfrac{51}{60^2} + \dfrac{10}{60^3}$

b) $\sqrt{2} \approx \dfrac{577}{408}$

a) Sea $x = \sqrt{2}$ y

$a = 1 + \dfrac{24}{60} + \dfrac{51}{60^2} + \dfrac{10}{60^3}$.

Sus errores son:

$$E_a = \left| \sqrt{2} - 1 - \frac{24}{60} - \frac{51}{60^2} - \frac{10}{60^3} \right| = $$
$$= 5{,}9903 \cdot 10^{-7}$$

$$E_r = \frac{E_a}{x}$$

$$E_r = \frac{5{,}9903 \cdot 10^{-7}}{\sqrt{2}} = 4{,}24 \cdot 10^{-7}$$

b) Sea $x = \sqrt{2}$ y $a = \dfrac{507}{408}$.

Sus errores son:

$$E_a = \left| \sqrt{2} - \frac{507}{408} \right| = 0{,}171567$$

$$E_r = \frac{E_a}{x}$$

$$E_r = \frac{0{,}171567}{\sqrt{2}} = 0{,}121316$$

195 Diferentes culturas tenían aproximaciones para $\sqrt{2}$.

En unas tablas babilónicas se puede encontrar lo siguiente:

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}.$$

Por otro lado, en ciertos libros indios aparece: $\sqrt{2} \approx \frac{577}{408}$.

¿Cuál de los dos pueblos tenía una mejor aproximación?

Atendiendo a los cálculos de la actividad anterior, las tablas babilónicas tenían una mejor aproximación.

196 Indica el valor de x que cumple:

$$12 \cdot 4^x = 98\,304$$

$$4^x = \frac{98\,304}{12}$$

$$4^x = 8\,192$$

$$x = \frac{\log 8\,192}{\log 4} = \frac{13}{2} = 6{,}5$$

197 La población de un cultivo de 12 bacterias se cuadriplica cada hora. ¿Tras cuánto tiempo habrá 98 304 bacterias?

$$12 \cdot 4^x = 98\,304$$

$$4^x = \frac{98\,304}{12}$$

$$4^x = 8\,192$$

$$x = \frac{\log 8\,192}{\log 4} = \frac{13}{2} = 6{,}5 \text{ horas}$$

¿PARA QUÉ SIRVE?

1 Responde.

a) ¿Por qué se hacen marcas en la carretera al frenar bruscamente un automóvil?

b) ¿Cuál es el valor de la gravedad g?

a) Porque dos o cuatro de las ruedas se bloquean y se produce una transferencia del peso del coche sobre ellas.

b) $g = 9{,}8$ m/s^2.

2 Consulta qué es el coeficiente de rozamiento de una superficie.

El coeficiente de rozamiento es una constante adimensional que expresa la oposición al deslizamiento que ofrecen las superficies de dos cuerpos en contacto. Es una característica de cada par de materiales en contacto.

3 ¿Qué magnitudes representan las variables μ, g y x en la expresión de la velocidad inicial con respecto a la distancia de frenado?

μ representa el coeficiente de rozamiento. Es una magnitud sin unidades.

g representa la aceleración de la gravedad. Es una constante fija, que vale 9,8 m/s^2.

x representa la longitud de las marcas de frenado expresadas en metros.

4 ¿Es correcta esta igualdad?

$$v = \sqrt{2\mu g x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\mu} \cdot \sqrt{g} \cdot \sqrt{x}$$

Sí, la igualdad es correcta, pues se ha aplicado una propiedad elemental de las raíces.

5 ¿Cuál es el índice de la expresión radical?

El índice de la expresión radical es 2 (raíz cuadrada).

6 Calcula la velocidad de un automóvil si se sabe que frenó bruscamente y dejó una marca de frenado de 30 m en una carretera de asfalto.

Se toma $\mu = 0{,}75$, por ser la carretera de asfalto. Entonces:

$$v = \sqrt{2 \cdot 0{,}75 \cdot 9{,}8 \cdot 30} = \sqrt{441} =$$
$$= 21 \text{ m/s} = 75{,}6 \text{ km/h}$$

7 Investiga sobre las campañas de tráfico de tu ciudad o comunidad para evitar accidentes.

Algunas campañas para evitar accidentes son:

- Campaña del uso del cinturón de seguridad y sistemas de retención infantil adecuados a la estatura y peso de los niños.
- Campaña contra las drogas y el alcohol.
- Campaña contra las distracciones al volante, como el uso del teléfono móvil.