

# Límite de una función

Para andar por casa: ¿Qué hacen las y cuando le pido a las x que..

## Operaciones con límites de funciones

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$$

L y M son números reales

a)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm g(x) = L \pm M$

d)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \quad M \neq 0$

b)  $\lim_{x \rightarrow a} t f(x) = tL$

e)  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L} \quad L > 0$

c)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M$

f)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)} = L^M$

Cuando los valores de los límites toman valores  $+\infty$  y  $-\infty$  y cero entonces empezamos a encontrar problemas

SUMA	L	$+\infty$	$-\infty$
M	L+M	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty + \infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty - \infty$	$-\infty$

RESTA	L	$+\infty$	$-\infty$
M	L-M	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty - \infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty + \infty$

PRODUCTO	L	0	$+\infty$	$-\infty$
M $\neq 0$	L·M	0	M > 0 $+\infty$ M < 0 $-\infty$	M > 0 $-\infty$ M < 0 $+\infty$
0	0	0	$+\infty \cdot 0$	$(-\infty) \cdot 0$
$+\infty$	L > 0 $+\infty$ L < 0 $-\infty$	$0 \cdot (+\infty)$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	L > 0 $-\infty$ L < 0 $+\infty$	$0 \cdot (-\infty)$	$-\infty$	$+\infty$

COCIENTE	L $\neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
M $\neq 0$	L/M	0	M > 0 $+\infty$ M < 0 $-\infty$	M > 0 $-\infty$ M < 0 $+\infty$
0	L/0	0/0	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	0	0	$+\infty / +\infty$	$-\infty / +\infty$
$-\infty$	0	0	$+\infty / -\infty$	$-\infty / -\infty$

Otras indeterminaciones	$1^\infty$	$\infty^0$	$0^0$
-------------------------	------------	------------	-------

**Podemos empezar estudiando que ocurre cuando la  $x$  tiende a  $+\infty$ :**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) =$$

**Término general un polinomio**

1.-  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 3x + 4) = \infty + \infty + 4 = \infty$

2.-  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 5x + 7) = \infty - \infty + 7$  **Indeterminación**

Para solucionar problemas de este tipo, sacamos factor común al  $x$  elevada al mayor exponente

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [x^2 \cdot (1 - \frac{5}{x} + \frac{7}{x^2})] = (+\infty)(1 - 0 - 0). \text{ Está claro que } 5/x \text{ y } 7/x^2 \text{ tienden a cero.}$$

3.-  $\lim_{x \rightarrow \infty} (-x^3 + 8x - 5) =$

CONCLUSIÓN: el límite es  $+\infty$  o  $-\infty$  según el signo del coeficiente director.

**Término general una fracción racional**

4.-  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 5}{3x + 1} = \frac{\infty + 5}{\infty + 1} = \frac{\infty}{\infty}$  **Indeterminación**

Este es otro problema diferente, dividimos toda la expresión por la  $x$  elevada a la máxima potencia del denominador.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x} + \frac{5}{x}}{\frac{3x}{x} + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{5}{x}}{3 + \frac{1}{x}} = \frac{2 + 0}{3 + 0} = \frac{2}{3}$$

5.-  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2} =$

6.-  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3 + 2x + 2}{x^3} =$

CONCLUSIÓN:

$$7.- \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x^3} - \frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{1} = \frac{0 - 0}{1} = 0$$

8.-  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 4x - 1}{5x^4 + x^2} =$

CONCLUSIÓN:

$$9.- \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - \frac{1}{x}}{1 + \frac{3}{x}} = \frac{\infty - 0}{1 + 0} = \infty$$

$$10.- \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3 + 2x + 2}{x^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-x + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = -\infty$$

CONCLUSIÓN:

**Término general fracción con radicales**

$$11.- \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 1}{\sqrt{4x^2 - 6x + 3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{\sqrt{4 - \frac{6}{x} + \frac{3}{x^2}}} = \frac{3}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$$

$$12.- \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5x^3 - 2x}}{2x + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5x + \frac{2}{x}}}{2 + \frac{5}{x}} = \infty$$

$$13.- \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 1}{x} - 2x \right) = \infty - \infty \quad \text{Indeterminación}$$

En este caso podemos hacer operaciones

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 1}{x} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{-x^2 - 1}{x} \right) = -\infty$$

$$14.- \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1 - 2x^2}{3x - 2} - \frac{-3x^2}{x - 4} \right) =$$

$$15.- \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2}) = \infty - \infty \quad \text{Indeterminación}$$

Multiplicamos y dividimos por el conjugado

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2}) = \infty - \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2})(\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 2})}{(\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 2})} = 1$$

$$16.- \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 2}) = \infty \text{ Cuidado!!!}$$

TODO LO VISTO SIRVE PARA SUCESIONES , puesto que son un tipo particular de funciones

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$1 \dots \dots \dots 4$$

$$a_1 = 4$$

$$2 \dots \dots \dots 5$$

Empleamos la notación

$$a_2 = 5$$

$$3 \dots \dots \dots 6$$

$$a_3 = 6$$

$$n \dots \dots \dots n+3$$

$$a_n = n+3$$

Cuando trabajamos con sucesiones sólo tiene sentido calcular límites cuando n tiende a +∞

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{por lo que se trabaja exactamente igual que} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n + 3) = \infty$$

Ya quedan menos problemas por solucionar :

$+\infty \cdot 0$	$(-\infty) \cdot 0$
$L/0$	$0/0$

$1^\infty$	$\infty^0$	$0^0$
------------	------------	-------

### ***Cálculo de límite usando el número e.***

Dentro del cálculo de límites estudiamos de forma especial los casos en que la indeterminación es  $I^\infty$ . Estos se van a solucionar utilizando el número e.

Vamos a calcular los primeros términos de la siguiente sucesión:  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$$n=1 \quad a_1 = 2$$

$$n=2 \quad a_2 = 2,25$$

$$n=3 \quad a_3 = 2,370370$$

$$n=4 \quad a_4 = 2,441406$$

....

$$n=10 \quad a_{10} = 2,599374$$

....

$$n=100 \quad a_{100} = 2,704813$$

....

$$n=1000000 \quad a_{1000000} = 2,718280$$

Si cogemos la calculadora y pulsamos el número e, veremos que aparece la expresión : 2,718281828...

$$\text{Efectivamente } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Nota histórica: Se atribuye a John Napier el descubrimiento de este número, es un número irracional que tiene infinitas cifras decimales no periódicas y que por lo tanto no se puede expresar como una fracción.

El nombre e viene de exponencial, por que éste aparece en el cálculo de ecuaciones cuya incógnita aparece en el exponente. Hasta el siglo XVIII, Euler no lo bautiza como tal.

En realidad vamos a generalizar y lo que utilizaremos será:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$

$$16.- \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{x+1}{x-1} - 1 \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{x-1} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\frac{x-1}{2}} \right)^{x^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\frac{x-1}{2}} \right)^{\frac{x-1}{2} \cdot \frac{2}{x-1} \cdot x^2} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x-1} \cdot x^2} = e^\infty = \infty$$

$$17.- \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-1}{3x} \right)^{2x-3}$$

$$18.- \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 + x - 1} \right)^x$$

$$19.- \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+3}{x-5} \right)^{x^2+3x-2} = ¡CUIDADO!$$

**Veamos que ocurre cuando la  $x$  tiende a  $-\infty$ :**

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =}$$

$$20.- \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 5x + 3 = \infty$$

$$21.- \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-x^3 + 18} = \infty$$

**Veamos que ocurre cuando la  $x$  tiende a un número "a":**

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)}$$

$$22.- \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 5x = -4$$

$$23.- \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x-3} = -3$$

$$24.- \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x^3 - 5x + 1} =$$

$$25.- \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x-3} = \frac{4}{0} \quad \boxed{\text{Indeterminación}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{x-3} = \frac{4}{0} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+1}{x-3} = \frac{4}{0} = -\infty \end{array} \right.$$

26.-  $\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{x^2 - 3x}{x - 3} + \frac{3x - 9}{x^2 - 9} \right) = \frac{0}{0}$  Indeterminación Siempre se puede simplificar, hay

que factorizar ( y no siempre se puede hacer de forma directa , lo normal es que tengas que operar antes) O utilizar la REGLA DE L'HÔPITAL que sirve para solucionar las indeterminaciones  $0/0$  y  $\pm\infty/\pm\infty$

27.-  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} = \frac{0}{0}$

28.-  $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 2)^{\frac{x-1}{x-3}} = 1^\infty$

Ya quedan menos problemas por solucionar :

$+\infty \cdot 0$	$(-\infty) \cdot 0$
-------------------	---------------------

$\infty^0$	$0^0$
------------	-------

Para estos casos usaremos la REGLA DE L'HÔPITAL y LOGARÍTMOS