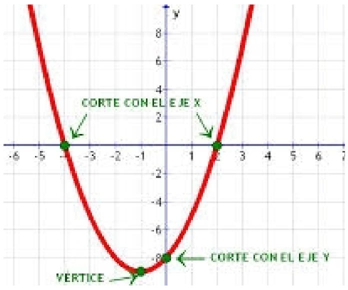
FUNCIONES POLINÓMICAS – FUNCIÓN CUADRÁTICA $y = ax^2 + bx + c$



1. a) Representa la parábola $y = x^2 – x – 2$ y analiza sus características:

1- Puntos de corte con el eje X: y = 0

$x^2 - x - 2 = 0$ $x_1 = 2$ (2, 0)

$x_2 = 1$ (-1, 0)

2- Punto de corte con el eje Y: x = 0

y = -2 → (0, -2)

3- Vértice: $x=\frac{-b}{2a}=\frac{1}{2}$ (también eje de simetría)

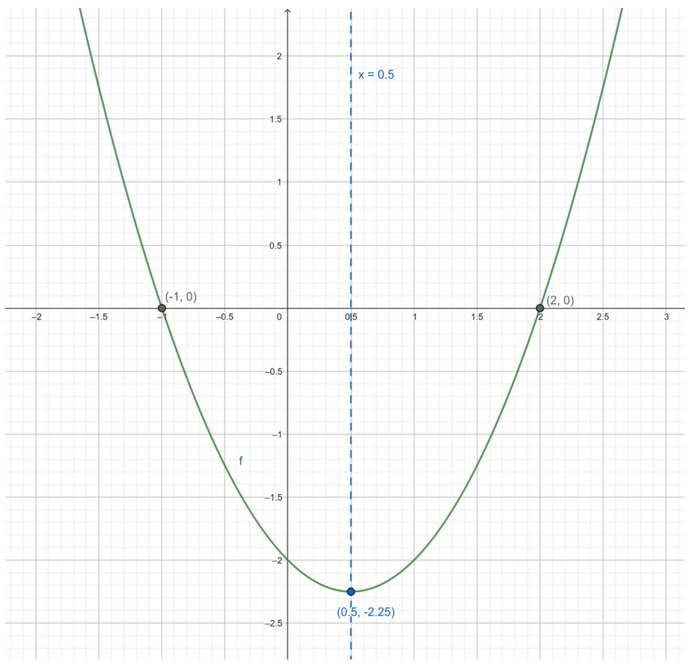
$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)-2=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-2=\frac{-9}{4}$$

El vértice de la parábola es el punto **(0,5; -2,25)**

4- Convexidad U a=1 > 0 → El vértice es un **mínimo**

El vértice es también el eje de simetría por lo tanto damos valores mayores y menores que 0,5 en la tabla de valores:

x	$y = x^2 - x - 2$
-3	10
-2	4
-1	0
0	-2
0,5	**-2,25**
1	-2
2	0
3	4
4	10



Dominio: $\mathbb{R}$

Recorrido: $[-2{,}25, +\infty)$

Decrecimiento: $(-\infty; 0{,}5]$

Crecimiento: $[0{,}5, +\infty)$

Mínimo: (0,5 , -2,25)

Convexidad: $\mathbb{R}$

b) $f(x) = -x^2 + 16$

1- Puntos de corte con el eje X: y = 0
$-x^2 + 16 = 0$ (-4, 0) y (4, 0)

2- Punto de corte con el eje Y: x
y = 16 → (0, 16)

3- Vértice: $x=\frac{-b}{2a}=\frac{0}{-2}$ (0, 16)

4- Concavidad ∩ **a=-1 < 0** →
El vértice es un **máximo**

Dominio: $\mathbb{R}$

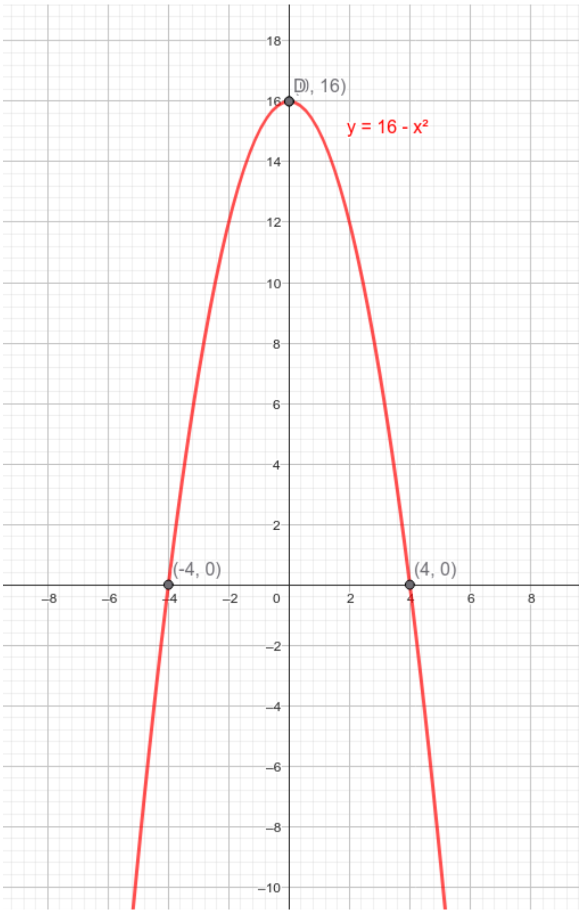
Recorrido: $(-\infty, 16]$

Decrecimiento: $(0, +\infty)$

Crecimiento: $(-\infty, 0)$

Máximo: (0, 16)

Concavidad: $\mathbb{R}$



c) $f(x) = 4x^2 + 5x$

1- Puntos de corte con el eje X: y = 0
$4x^2 + 5x = 0$ (0, 0) y (-5/4, 0)

2- Punto de corte con el eje Y: x = 0
y = 0 → (0, 0)

3- Vértice: $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-5}{8}=-0{,}625$ (-0,625; -1,5625)

4- Convexidad U a=4 > 0 → El vértice es un **mínimo**

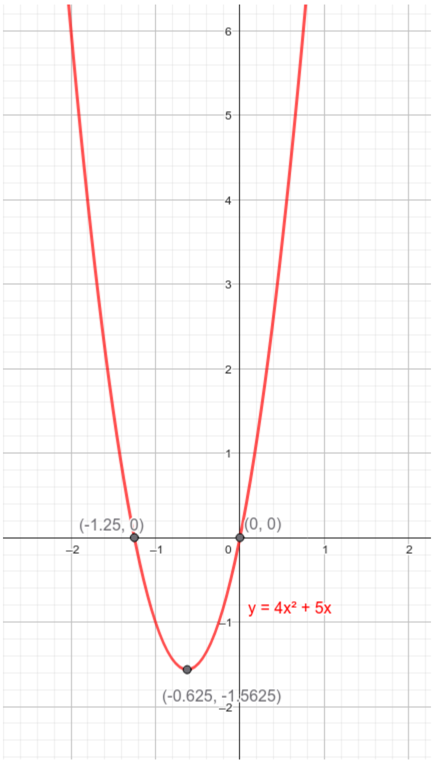
Dominio: $\mathbb{R}$ Recorrido: $[-1{,}5625, +\infty)$

Decrecimiento: $(-\infty; -0{,}625)$

Crecimiento: $(-0{,}625, +\infty)$

Mínimo: (-0,625; -1,5625)

Convexidad: $\mathbb{R}$

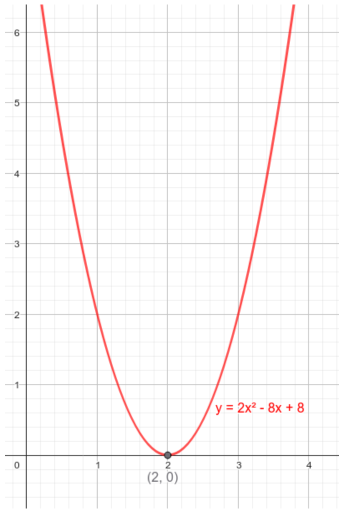


d) $f(x) = 2x^2 - 8x + 8$

1- Puntos de corte con el eje X: y = 0
$2x^2 - 8x + 8 = 0$ (2, 0)

2- Punto de corte con el eje Y: x = 0
y = 0 → (0, 8)

3- Vértice: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{8}{4} = 2$ (2; 0)



4- Convexidad U a=2 > 0 → El vértice es un **mínimo**

Dominio: $\mathbb{R}$ Recorrido: $[0, +\infty)$

Decrecimiento: $(-\infty; 2)$

Crecimiento: $(2, +\infty)$

Mínimo: (2; 0)

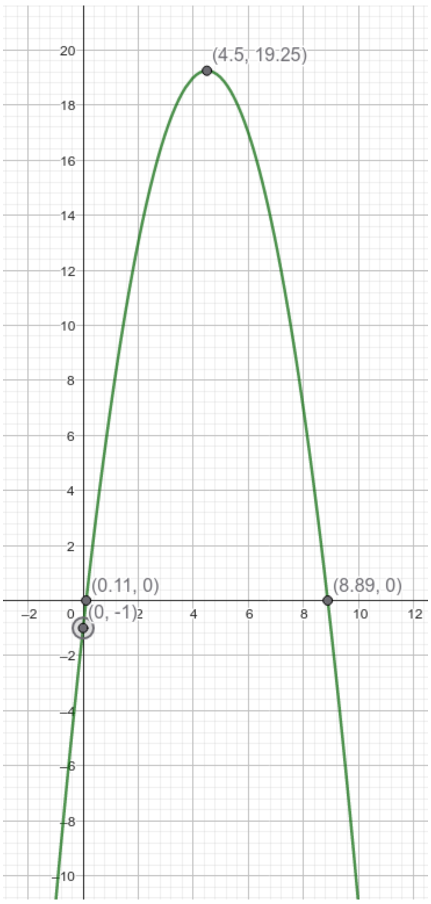
Convexidad: $\mathbb{R}$

e) $f(x) = -x^2 + 9x - 1$

1- Puntos de corte con el eje X: y = 0
$-x^2 + 9x - 1 = 0$ (0,11…; 0) y (8,88... ; 0)

2- Punto de corte con el eje Y: x = 0
y = 0 → (0, -1)

3- Vértice: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-9}{-2} = 4{,}5$ (4,5; 19,25)



4-Concavidad ∩ a=-1 < 0 → El vértice es un **máximo**

Dominio: $\mathbb{R}$ Recorrido: $(-\infty, 19{,}25]$

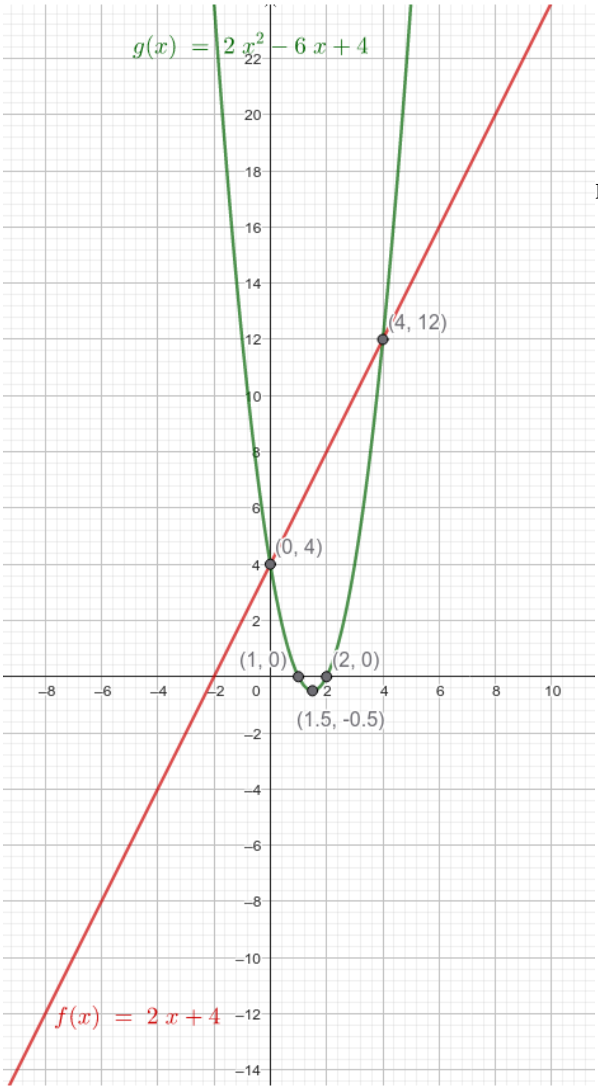
Crecimiento: $(-\infty; 4{,}5)$

Decrecimiento: $(4{,}5; +\infty)$

Máximo: (4,5; 19,25)

Concavidad: $\mathbb{R}$

2. Representa las dos funciones indicando los puntos de corte: $f(x) = 2x + 4$ y $g(x) = 2x^2 – 6x + 4$



Para hallar los puntos de corte resolvemos el sistema:

$y = 2x^2 - 6x + 4$

$y = 2x + 4$

Solución: $x_1 = 0$ $y_1 = 4$

$x_2 = 4$ $y_2 = 12$

3. Determina el polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ que pasa por el punto (1,2) y tiene un mínimo en el punto (-1,-6)

Pasa por el punto (1, 2) –> $a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 2$

Vértice en (-1, -6) –> $\frac{-b}{2a} = -1$

Pasa por el punto (-1, -6) –> $a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = -6$

Al ser un mínimo a debe ser un número positivo. Resolvemos el sistema:

$a + b + c = 2$
$2a – b = 0$
$a – b + c = -6$

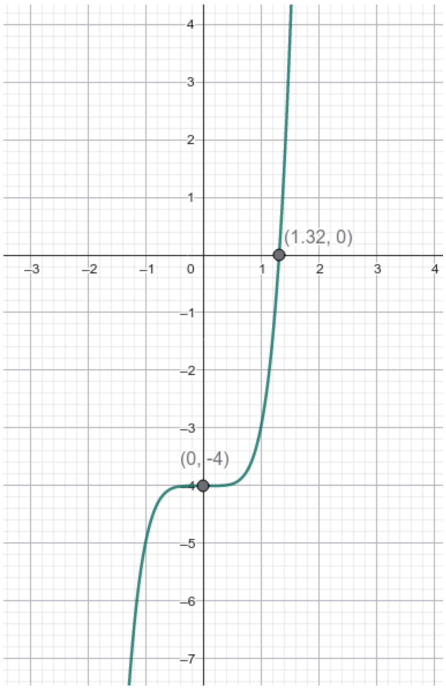
$a = 2$, $b = 4$, $c = -4$

La parábola buscada es $2x^2 + 4x – 4 = 0$

FUNCIONES POLINÓMICAS

4. A partir de la gráfica de $y = x^3$ representa y analiza las características de las funciones:

a) $y= x^5 - 4$



1- Punto de corte eje X: $y = 0$ $x^5 – 4 = 0$ $x^5 = 4 \rightarrow (\sqrt[5]{4}, 0)$

2- Punto de corte eje Y: $x = 0$ $y = 0^5 – 4 = -4$

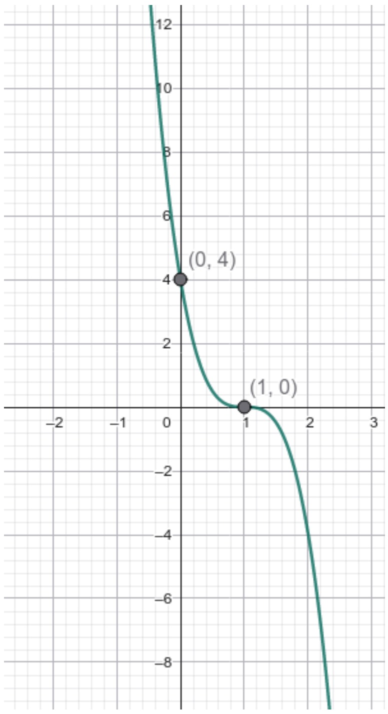
3- Tabla de valores:

x	$y= x^5 - 4$
-4	-1028
-3	-247
-2	-32
-1	-5
0	-4
1	-3
2	28
3	239
4	1020

Dominio: $\mathbb{R}$ Recorrido: $\mathbb{R}$ Crecimiento: $\mathbb{R}$ Máximos e mínimos: No hay

Concavidad: $(-\infty, 0)$ Convexidad: $(0, +\infty)$ Punto de inflexión: (0, -4)

b) $y= -4(x - 1)^3$



1- Punto de corte eje X: $y = 0$ $-4(x - 1)^3 = 0$ $x = 1 \rightarrow (1, 0)$

2- Punto de corte eje Y: $x = 0$ $y = -4\cdot(0 - 1)^3 = 4$ –> (0, 4)

3- Tabla de valores:

x	$y= -4(x - 1)^3$
-4	$- 4(- 4 – 1)^3 =$ 500
-3	256
-2	108
-1	32
0	4
1	0
2	-4
3	-32
4	-108

Dominio: $\mathbb{R}$ Recorrido: $\mathbb{R}$ Decrecimiento: $\mathbb{R}$

Máximos e mínimos: No hay

Convexidad: $(-\infty, 1)$ Concavidad: $(1, +\infty)$ Punto de inflexión: (1, 0)

FUNCIONES RACIONALES:

5. Representa por traslación las funciones:

a) $y=\dfrac{5}{x+3}$ f(x) = **5**/x –> Modelo de hipérbola decreciente.

Dominio de la función: $\mathbb{R}-\{-3\}$ Asíntota vertical: x = -3

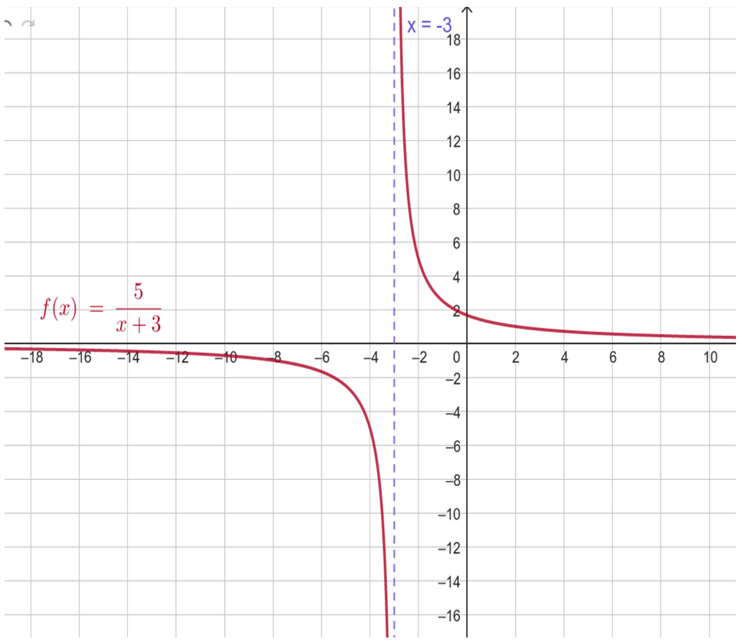
Imagen de la función: $\mathbb{R}-\{0\}$ Asíntota horizontal: y = 0

Puntos de corte: Eje X: y = 0 --> 5 = 0 No tiene puntos de corte con el eje X

Eje Y: x = 0 --> y = 5/3 --> (0, 5/3)

Tabla de valores:

x	$y=\dfrac{5}{x+3}$
-100 000	−0,000050002
-1000	−0,005015045
-10	5/-7= -0,714285714
-3,1	-50
-3,001	-5000
-2,999	5000
-2,9	50
0	5/3 = 1,666...
1	5/4 = 1,25
2	1
3	5/6 =0,8333...
7	0,5
100	0,04854
1000	0,004985
100 000	0,000004999985



Dominio: $\mathbb{R}-$ {-3} Recorrido: $\mathbb{R}-$ {0} Decrecimiento: $\mathbb{R}-$ {-3}

Máximos e mínimos: No hay

Convexidad: $(-3,+\infty)$ Concavidad: $(-\infty,-3)$ Punto de inflexión: No hay

Asíntota vertical: x = -3 Asíntota horizontal: y = 0

b) $y=\frac{-2}{x}-1$

Podemos representar la función como traslación de 1 unidades en vertical. Modelo de hipérbola creciente: f(x) = -2/x.

Dominio da función: $\mathbb{R}-\{0\}$ Asíntota vertical: x = 0

Asíntota horizontal: y = -1

Puntos de corte: Eje X: y = 0 --> -2/x - 1 = 0 --> x = -2 --> (-2, 0)
Eje Y: x = 0 --> No hay

Tabla de valores:

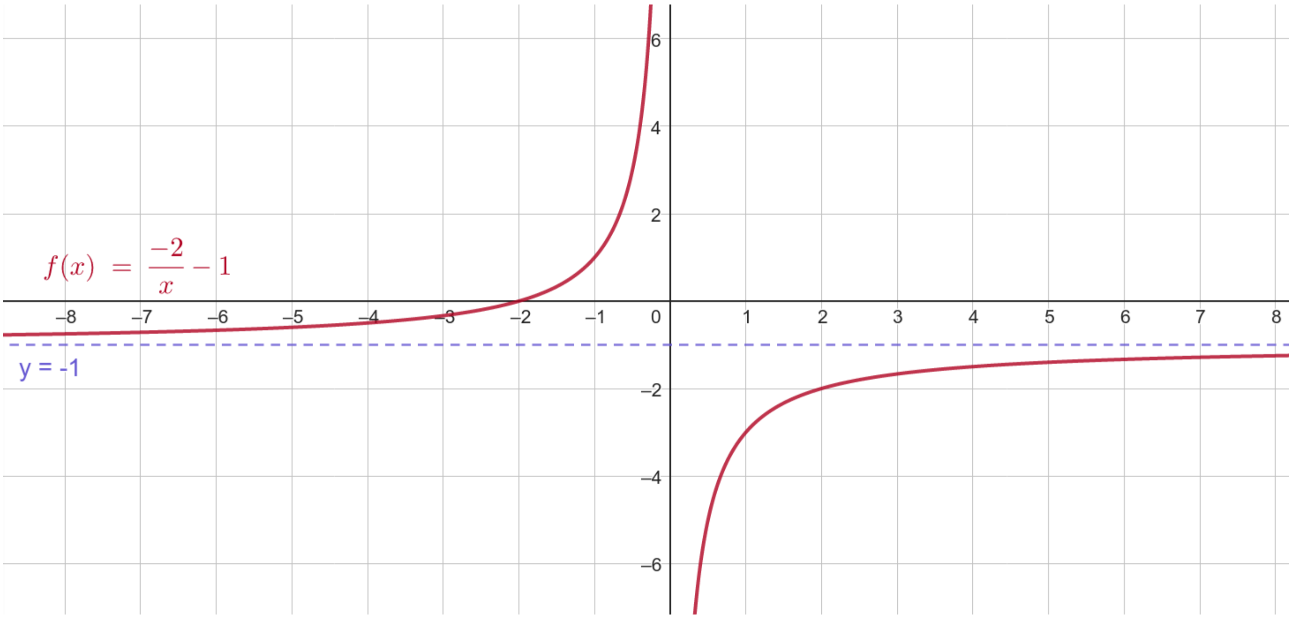
x	$y=\frac{-2}{x}-1$
-100 000	-0,99998
-8	-0,75
-6	-0,6666...
-5	-0,6
-4	-0,5
-0,5	3
-0,00001	19999
0,00001	-20001
0,5	-5
1	-3
2	-2
4	-1,5
5	-1,4
10	-1,2
100 000	-1,00002

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-2}{x}-1\right)=0-1=-1$$

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{-2}{x}-1\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{-2}{x}-1\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2}{x}-1\right)=0-1=-1$$



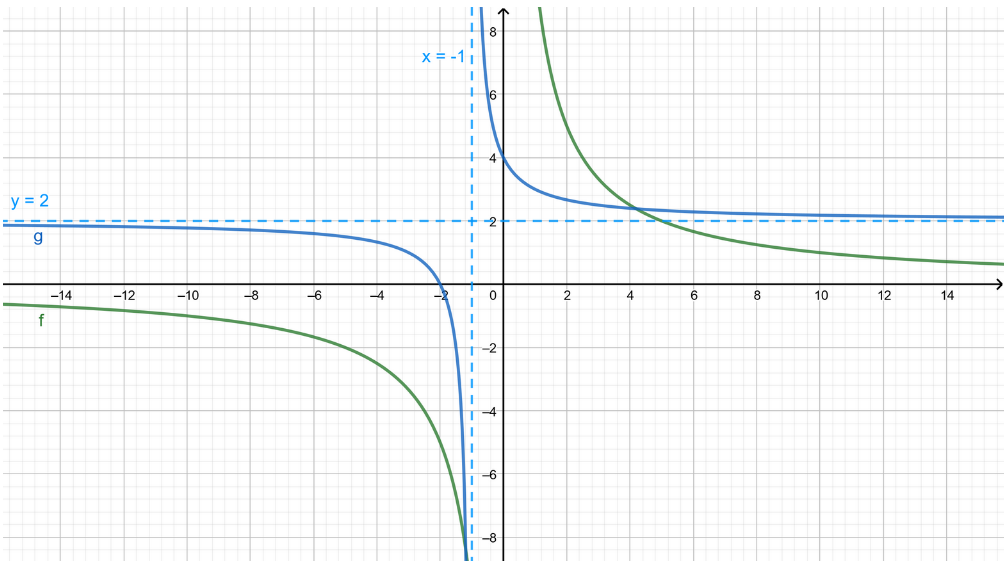
Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$ Recorrido: $\mathbb{R} - \{-1\}$ Crecimiento: $\mathbb{R} - \{0\}$

Máximos e mínimos: No hay

Concavidad: $(0, +\infty)$ Convexidad: $(-\infty, 0)$ Punto de inflexión: No hay

Asíntota vertical: x = 0 Asíntota horizontal: y = -1

6. Escribe la ecuación de las gráficas siguientes:



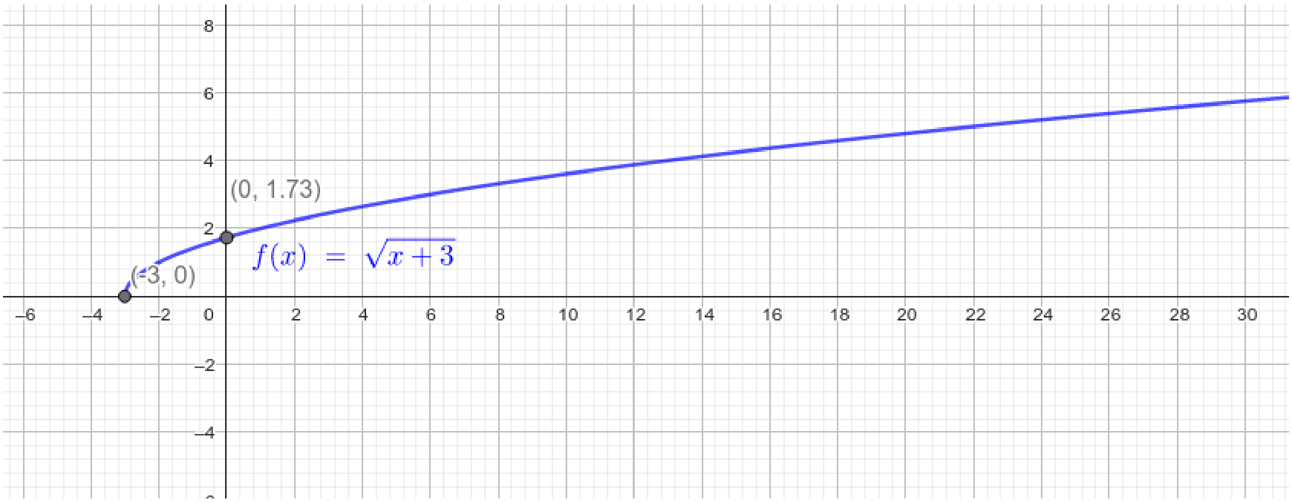
Azul: f(x) = 2 + k/(x + 1) pasa por el punto (0,4) –> f(0) = 2 + k = 4 –> k = 2

$$f(x) = 2 + \frac{2}{x+1} = \frac{2(x+1)+2}{x+1} = \frac{2x+4}{x+1}$$

Verde: No están claras las asíntotas

7. Calcula el dominio de las funciones: $f(x)=\sqrt{x+3}$ y $g(x)=\sqrt[5]{x-1}$ y represéntalas.

$f(x)=\sqrt{x+3}$ Domf = $[-3,+\infty)$

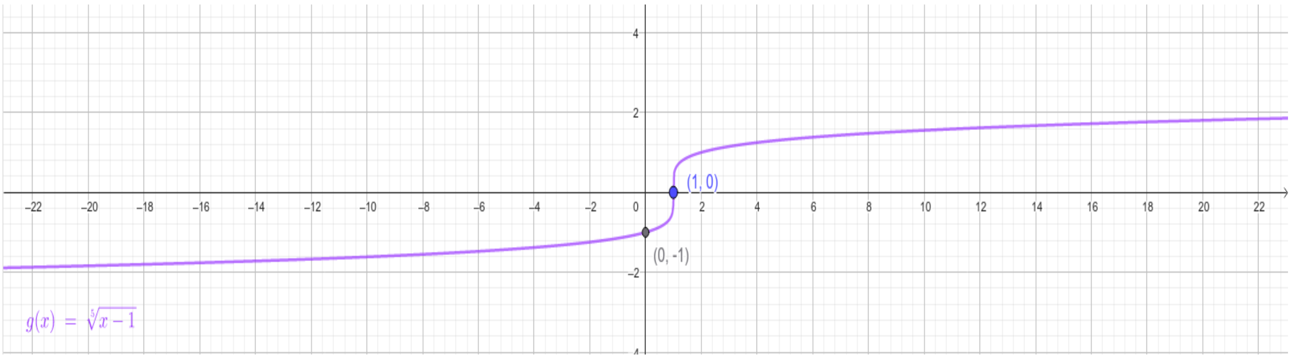


Recorrido: $[0,+\infty)$ Crecimiento: $(-3,+\infty)$ Máximos: No hay Mínimo: (-3, 0)

Concavidad: $(-3,+\infty)$ Convexidad: No hay Punto de inflexión: No hay

Asíntota vertical: No hay Asíntota horizontal: No hay

$g(x)=\sqrt[5]{x-1}$ Dominio: $\mathbb{R}$ Puntos de corte ejes: Eje X: (1, 0) Eje Y: (0, -1)



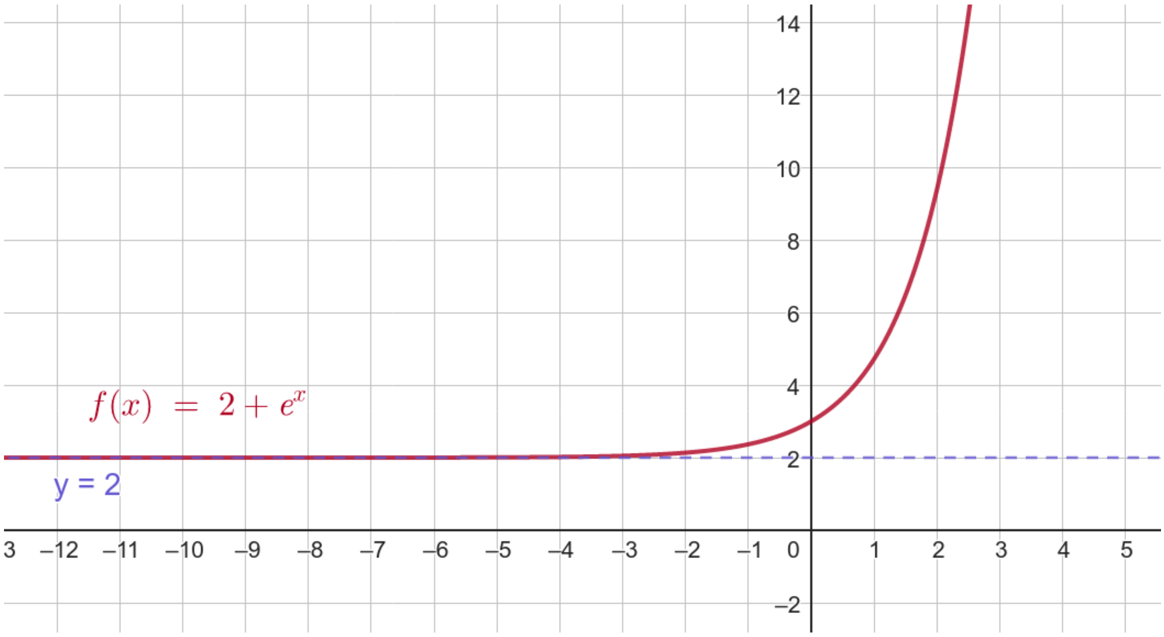
Recorrido: $\mathbb{R}$ Crecimiento: $\mathbb{R}$ Máximos y mínimos: No hay

Concavidad: $(1,+\infty)$ Convexidad: $(-\infty,1)$ Punto de inflexión: (1, 0)

Asíntota vertical: No hay Asíntota horizontal: No hay

8. a) Representa la función $g(x) = 2 + e^x$. Analiza sus características.

Puntos de corte: Eje X: y=0 no tiene solución Eje Y: x = 0 y = 3 –> (0, 3)



Asíntota horizontal: y = 2

Dominio: $\mathbb{R}$ Recorrido: $(2,+\infty)$ Crecimiento: $\mathbb{R}$

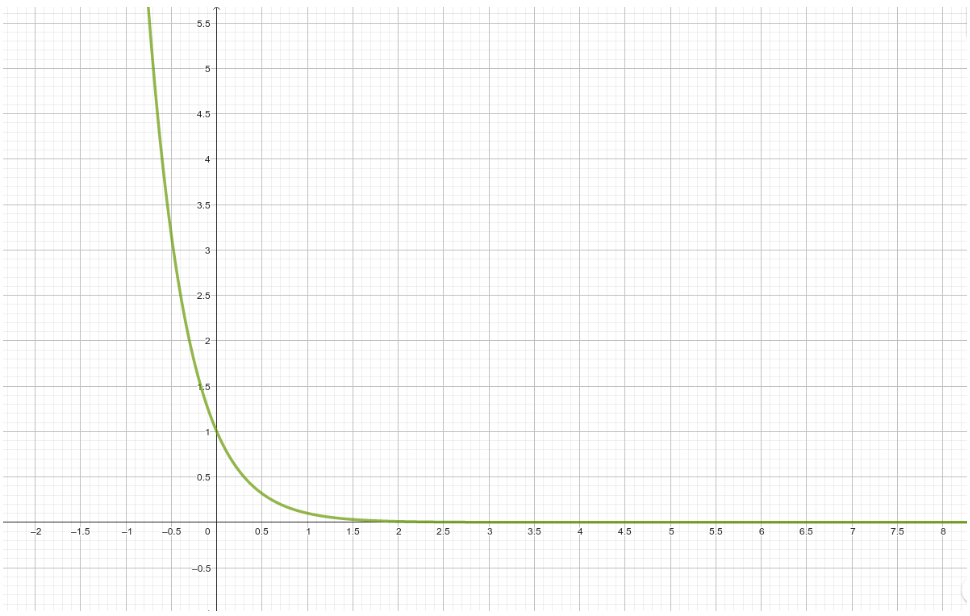
Máximos e mínimos: No hay

Concavidad: No hay Convexidad: $\mathbb{R}$ Punto de inflexión: No hay

Asíntota vertical: No hay Asíntota horizontal: y = 2

b) Representa la función $g(x) = 10^{-x}$. Analiza sus características.

Puntos de corte: Eje X: y = 0 no tiene solución Eje Y: x = 0 y = 1 –> (0, 1)



Asíntota horizontal: Eje X $y = 0$

Dominio: $\mathbb{R}$ Recorrido: $(0,+\infty)$ Crecimiento: No hay Decrecimiento: $\mathbb{R}$

Máximos e mínimos: No hay

Concavidad: No hay Convexidad: $\mathbb{R}$ Punto de inflexión: No hay

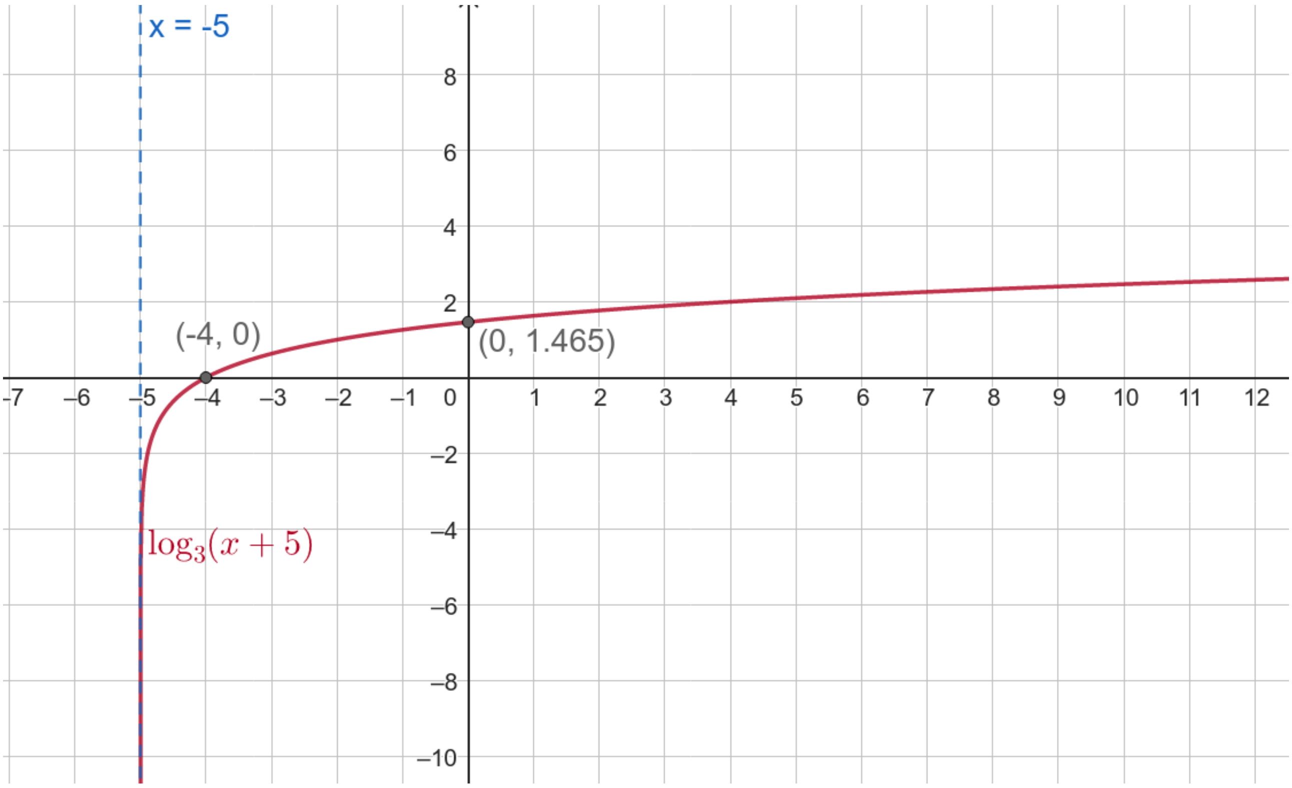
Asíntota vertical: No hay Asíntota horizontal: $y = 0$

9. Calcula el dominio de las funciones $f(x)=\log_3(x+5)$ y $g(x)=2+\log(x-10)$. Represéntalas y analiza sus características

a) $f(x)=\log_3(x+5)$ –> $x + 5 > 0$ –> $x > -5$ –> $Domf = (-5, +\infty)$ A.V.: $x = -5$

Puntos de corte: Eje X: $y = 0$ –> $x + 5 = 1$ –> $x = -4$ $(-4, 0)$

Eje Y: $x = 0$ $y = \log_3 5 = 1{,}465$ –> $(0, 1{,}465)$



Dominio: $(-5,+\infty)$ Recorrido: $\mathbb{R}$ Crecimiento: $\mathbb{R}$ Decrecimiento: No hay

Máximos e mínimos: No hay

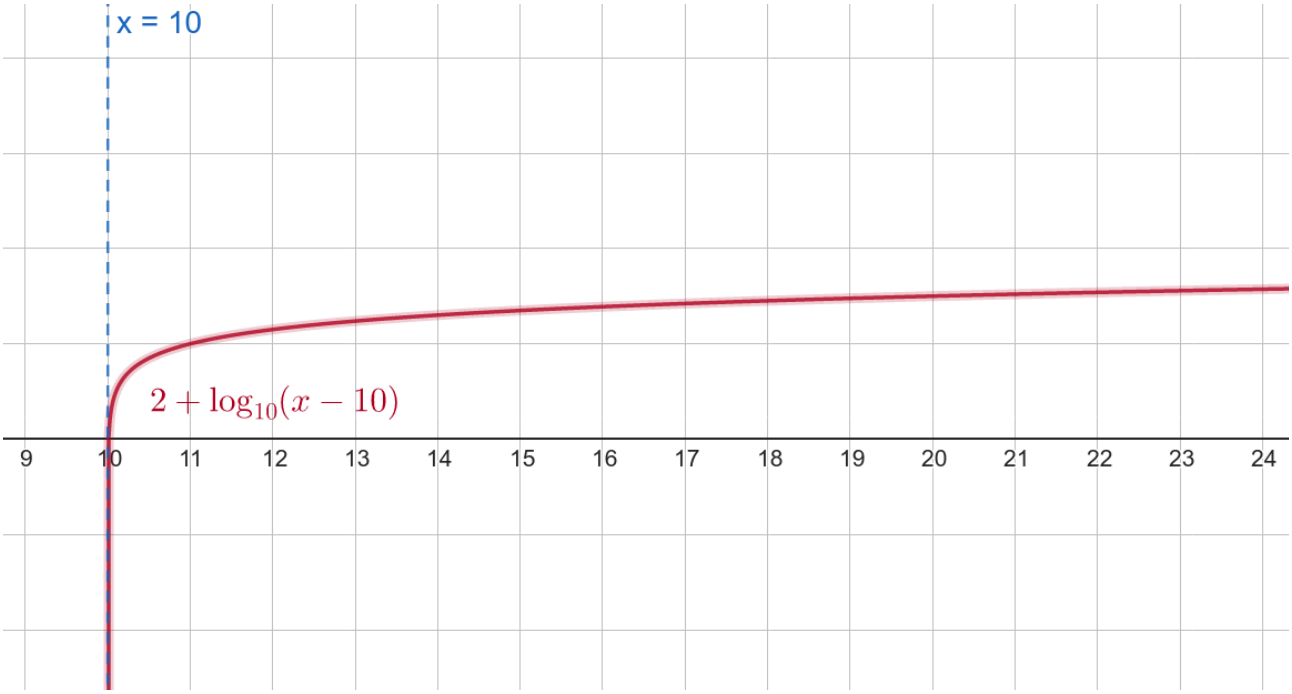
Concavidad: $\mathbb{R}$ Convexidad: No hay Punto de inflexión: No hay

Asíntota vertical: $x = -5$ Asíntota horizontal: No hay

b) $g(x)=2+\log(x-10)$ –> x - 10 > 0 –> x > 10 –> Domf = $(10, +\infty)$ A.V.: x = 10

Puntos de corte: Eje X: y = 0 –> $2 + \log(x - 10) = 0$ –> $x - 10 = 10^{-2}$ (10,01, 0)

Eje Y: x = 0 no está en el dominio



Dominio: $(10,+\infty)$ Recorrido: $\mathbb{R}$ Crecimiento: $\mathbb{R}$ Decrecimiento: No hay

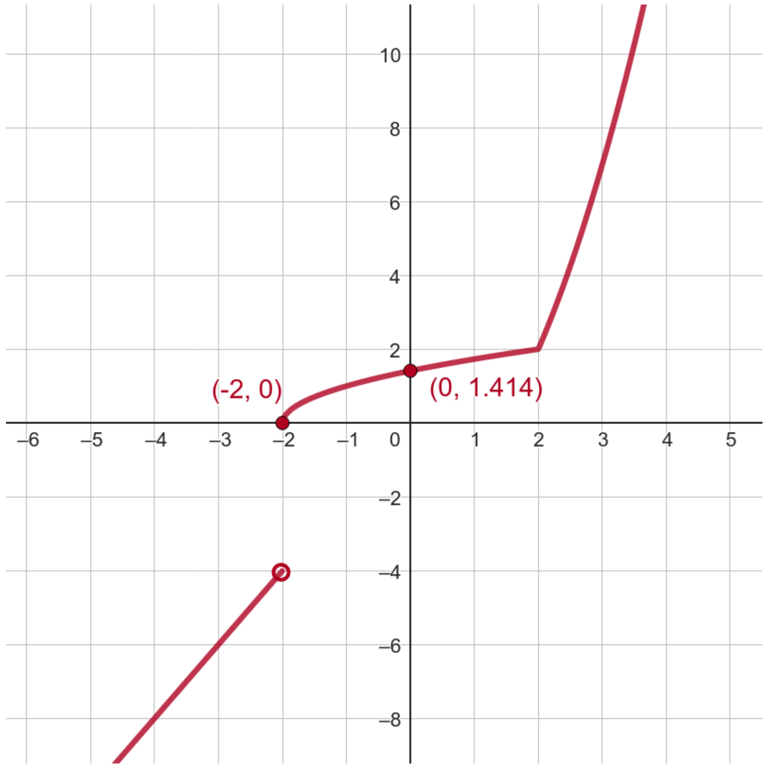
Máximos e mínimos: No hay

Concavidad: $\mathbb{R}$ Convexidad: No hay Punto de inflexión: No hay

Asíntota vertical: x = 10 Asíntota horizontal: No hay

10. Representa gráficamente las siguientes funciones definidas a trozos y analiza sus características:

a) $f(x)=\begin{cases} 2x & x<-2 \\ \sqrt{x+2} & -2\leq x<2 \\ x^2-2 & x\geq 2 \end{cases}$ Puntos de corte: Eje X: (-2, 0) Eje Y: (0, $\sqrt{2}$)



Dominio: $\mathbb{R}$

Recorrido: $(-\infty,-4)$ U $[0,+\infty)$

Crecimiento: $\mathbb{R}$

Decrecimiento: No hay

Máximos e mínimos: No hay

Concavidad: (-2, 2)

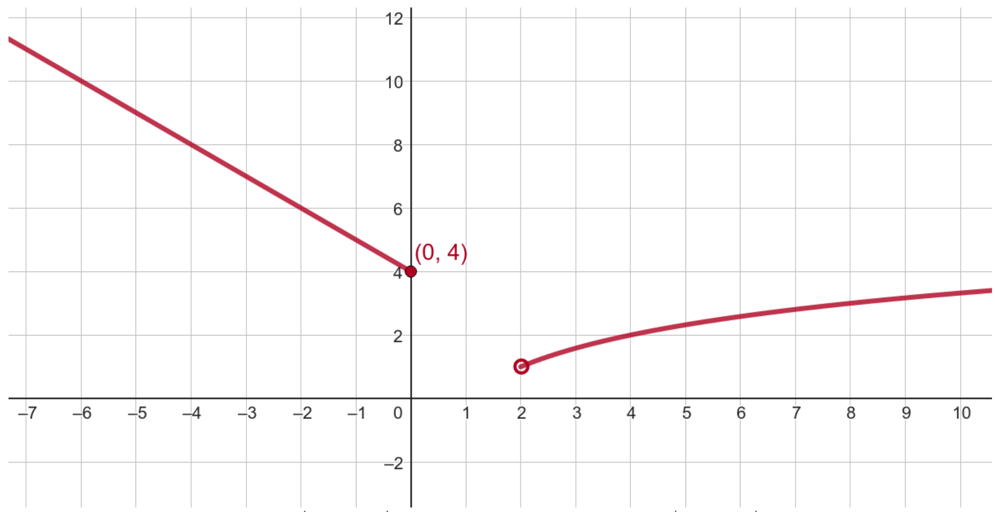
Convexidad: $(2,+\infty)$

Punto de inflexión: (2, 2)

Asíntota vertical: No hay

Asíntota horizontal: No hay

b) $f(x)=\begin{cases} 4-x & x\leq 0 \\ \log_2 x & x>2 \end{cases}$ Puntos de corte: Eje X: No hay Eje Y: (0, 4)



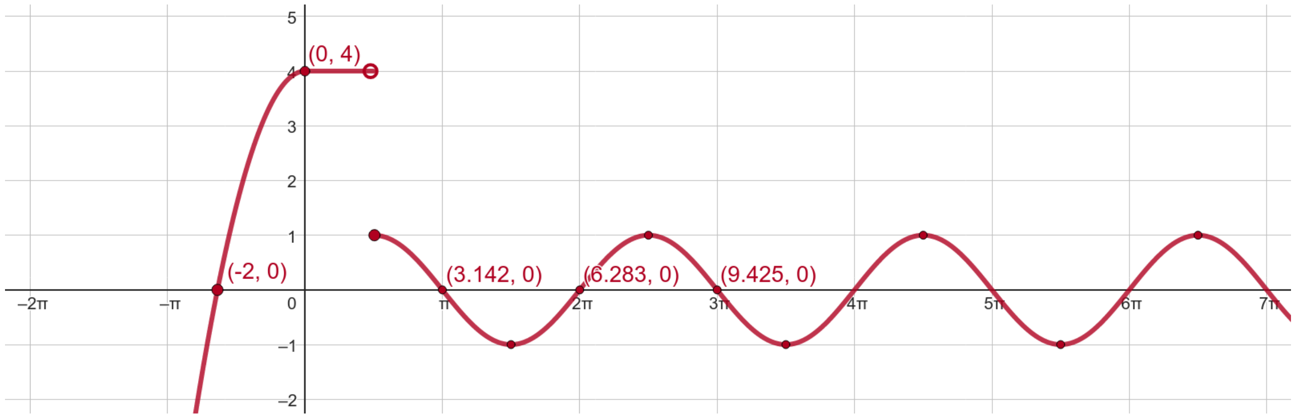
Dominio: $(-\infty,0]$ U $(2,+\infty)$ Recorrido: $(1,+\infty)$

Crecimiento: $(2,+\infty)$ Decrecimiento: $(-\infty,0)$ Máximos: No hay

Mínimo: (0, 4) Concavidad: $(2,+\infty)$ Convexidad: No hay

Punto de inflexión: No hay Asíntota vertical: No hay Asíntota horizontal: No hay

c) $f(x)=\begin{cases} 4-x^2 & x<0 \\ 4 & 0\leq x<\frac{\pi}{2} \\ senx & x\geq\frac{\pi}{2} \end{cases}$ Puntos de corte: Eje X: (-2, 0) U $\{(\pi n,\ 0),\ n\in\mathbb{N}\}$ Eje Y: (0, 4)



Dominio: $\mathbb{R}$ Recorrido: $(-\infty,4]$

Crecimiento: $(-\infty,0)$ U $\left(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{7\pi}{2},\frac{9\pi}{2}\right)\cup...$

Decrecimiento: $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{2},\frac{7\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{9\pi}{2},\frac{11\pi}{2}\right)\cup..$

Máximos: $\left(\frac{\pi}{2},1\right),\left(\frac{5\pi}{2},1\right),\left(\frac{9\pi}{2},1\right),...$ Mínimos: $\left(\frac{3\pi}{2},-1\right),\left(\frac{7\pi}{2},-1\right),\left(\frac{11\pi}{2},-1\right),...$

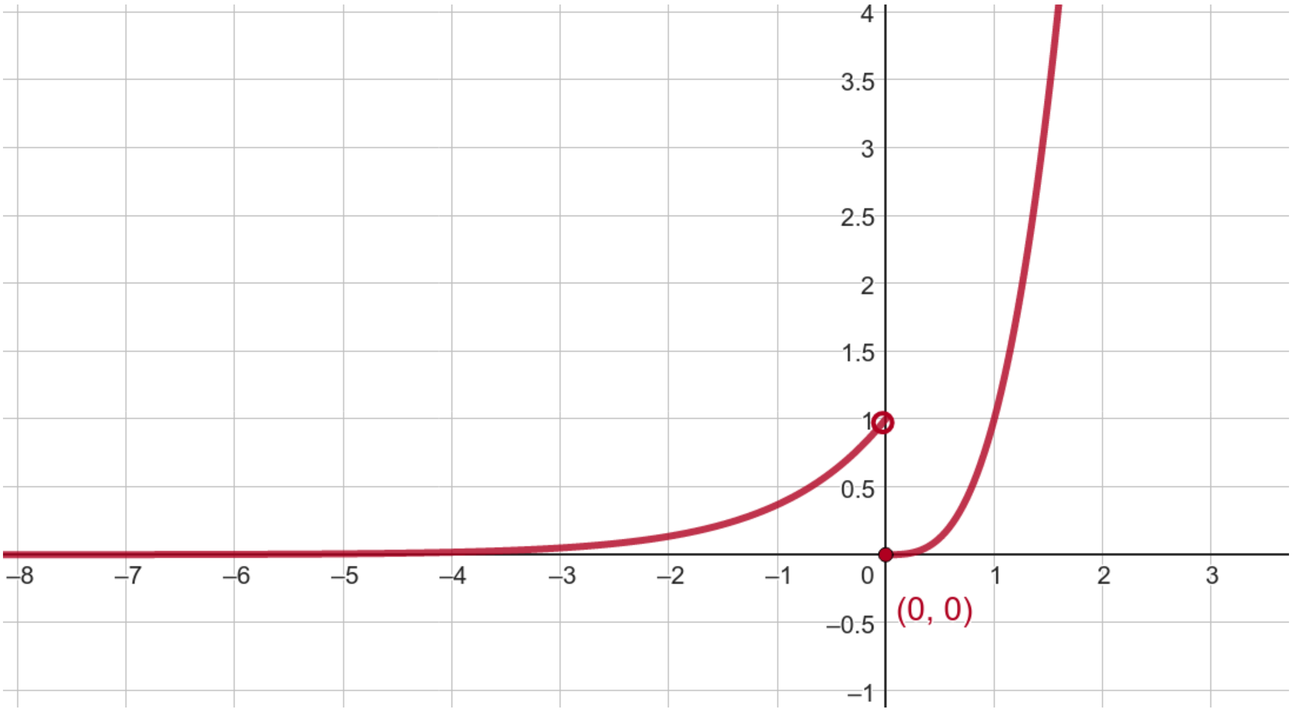
Concavidad: $(-\infty,0)$ U $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\cup(2\pi,3\pi)\cup(4\pi,5\pi)\cup...$

Convexidad: $(\pi,2\pi)\cup(3\pi,4\pi)\cup(5\pi,6\pi)\cup...$

Puntos de inflexión: $\{(\pi n,\ 0),\ n\in\mathbb{N}\}$

Asíntota vertical: No hay Asíntota horizontal: No hay

d) $f(x)=\begin{cases} e^x & x<0 \\ x^3 & x\geq 0 \end{cases}$ Puntos de corte: Eje X: (0, 0) Eje Y: (0, 0)



Dominio: $\mathbb{R}$ Recorrido: $[0,+\infty)$ Crecimiento: $\mathbb{R}$ Decrecimiento: No hay

Mínimos: (0, 0) Convexidad: $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ Punto de inflexión: No hay

Asíntota vertical: No hay Asíntota horizontal: y = 0