

41

●○○ Determina el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los puntos A y B .

a) $A(-6, 0)$ y $B(-1, 0)$

b) $A(-2, -1)$ y $B(4, 1)$

c) $A(3, -5)$ y $B(7, 1)$

d) $A(0, -2)$ y $B(0, 7)$

a) Sea $P(x, y)$ un punto equidistante de A y B , entonces $d(A, P) = d(B, P)$.

a)

$$d(A, P) = \sqrt{(x - (-6))^2 + (y - 0)^2} = \\ = \sqrt{x^2 + y^2 + 12x + 36}$$

$$d(B, P) = \sqrt{(x - (-1))^2 + (y - 0)^2} = \\ = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 1}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 12x + 36} =$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 1} \rightarrow$$

$$\rightarrow 12x + 36 = 2x + 1 \rightarrow x = -\frac{7}{2}$$

El lugar geométrico es la mediatriz del segmento AB , $x = -\frac{7}{2}$.

b) Sea $P(x, y)$ un punto equidistante de A y B , entonces $d(A, P) = d(B, P)$.

$$d(A, P) = \sqrt{(x - (-2))^2 + (y - (-1))^2} = \\ = \sqrt{x^2 + y^2 + 4x + 2y + 5}$$

$$d(B, P) = \sqrt{(x - 4)^2 + (y - 1)^2} = \\ = \sqrt{x^2 + y^2 - 8x - 2y + 17}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 4x + 2y + 5} =$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2 - 8x - 2y + 17} \rightarrow$$

$$\rightarrow 4x + 2y + 5 = -8x - 2y + 17 \rightarrow$$

$$\rightarrow 3x + y - 3 = 0$$

El lugar geométrico es la mediatriz del segmento AB , $3x + y - 3 = 0$.

c) Sea $P(x, y)$ un punto equidistante de A y B , entonces $d(A, P) = d(B, P)$.

$$d(A, P) = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - (-5))^2} = \\ = \sqrt{x^2 + y^2 - 6x + 10y + 34}$$

$$d(B, P) = \sqrt{(x - 7)^2 + (y - 1)^2} = \\ = \sqrt{x^2 + y^2 - 14x - 2y + 50}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 6x + 10y + 34} =$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2 - 14x - 2y + 50} \rightarrow$$

$$\rightarrow -6x + 10y + 34 = -14x - 2y + 50 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x + 3y - 4 = 0$$

El lugar geométrico es la mediatriz del segmento AB , $2x + 3y - 4 = 0$.

d) Sea $P(x, y)$ un punto equidistante de A y B , entonces $d(A, P) = d(B, P)$:

$$d(A, P) = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - (-2))^2} = \\ = \sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4}$$

$$d(B, P) = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 7)^2} = \\ = \sqrt{x^2 + y^2 - 14y + 49}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4} =$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2 - 14y + 49} \rightarrow$$

$$\rightarrow 4y + 4 = -14y + 49 \rightarrow y = \frac{5}{2}$$

El lugar geométrico es la mediatriz del segmento AB , $y = \frac{5}{2}$.

- 42 ●●○ Halla el lugar geométrico de los puntos, P , del plano cuya distancia a $A(-3, 0)$ sea el doble de la distancia a $B(1, 0)$. Identifica la figura resultante.

Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico, entonces $d(A, P) = 2d(B, P)$.

$$\begin{aligned}d(A, P) &= \sqrt{(x - (-3))^2 + (y - 0)^2} = \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + 6x + 9}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d(B, P) &= \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 0)^2} = \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + y^2 + 6x + 9} &= \\ &= 2\sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1} \rightarrow \\ \rightarrow x^2 + y^2 + 6x + 9 &= \\ &= 4(x^2 + y^2 - 2x + 1) \rightarrow \\ \rightarrow 3x^2 + 3y^2 - 14x - 5 &= 0\end{aligned}$$

El lugar geométrico es la circunferencia

$$x^2 + y^2 - \frac{14}{3}x - \frac{5}{3} = 0.$$

- 43 ●●○ Calcula el lugar geométrico de los puntos que distan 4 unidades de la recta $r: 4x - 2y + 5 = 0$.

Sea (x, y) un punto del lugar geométrico, entonces:

$$\begin{aligned}\frac{|4x - 2y + 5|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2}} &= 4 \rightarrow \\ \rightarrow |4x - 2y + 5| &= 4\sqrt{20} \rightarrow \\ \rightarrow |4x - 2y + 5| &= 8\sqrt{5} \rightarrow \\ \rightarrow \begin{cases} 4x - 2y + 5 - 8\sqrt{5} = 0 \\ -4x + 2y - 5 - 8\sqrt{5} = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

44 ●●● Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los siguientes pares de rectas.

a) $3x - 4y - 26 = 0$
 $12x + 5y + 1 = 0$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{|3x - 4y - 26|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} &= \frac{|12x + 5y + 1|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} \rightarrow \\ \rightarrow \begin{cases} \frac{3x - 4y - 26}{5} &= \frac{12x + 5y + 1}{13} \\ \frac{3x - 4y - 26}{5} &= \frac{-12x - 5y - 1}{13} \end{cases} \rightarrow \\ \rightarrow \begin{cases} 39x - 52y - 338 &= 60x + 25y + 5 \\ 39x - 52y - 338 &= -60x - 25y - 5 \end{cases} \\ \rightarrow \begin{cases} 3x - 11y + 49 &= 0 \\ 11x - 3y - 37 &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

El lugar geométrico está formado por las dos bisectrices de los ángulos formados por las dos rectas.

b) $\frac{|-2x + 7y + 9|}{\sqrt{(-2)^2 + 7^2}} = \frac{|4x - 14y + 11|}{\sqrt{4^2 + (-14)^2}} \rightarrow$

$$\begin{aligned} \rightarrow \begin{cases} \frac{-2x + 7y + 9}{\sqrt{53}} &= \frac{4x - 14y + 11}{2\sqrt{53}} \\ \frac{-2x + 7y + 9}{\sqrt{53}} &= \frac{-4x + 14y - 11}{2\sqrt{53}} \end{cases} \rightarrow \\ \rightarrow \begin{cases} -4x + 14y + 18 &= 4x - 14y + 11 \\ -4x + 14y + 18 &= -4x + 14y - 11 \end{cases} \rightarrow \\ \rightarrow \begin{cases} 8x - 28y - 7 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Como las rectas son paralelas, el lugar geométrico es otra recta paralela a ambas.

b) $-2x + 7y + 9 = 0$
 $4x - 14y + 11 = 0$

c) $2x - 3y + 3 = 0$
 $3x - 2 = 0$

d) $2y - 5 = 0$
 $2x - 3y + 5 = 0$

c) $\frac{|2x - 3y + 3|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|3x - 2|}{\sqrt{3^2 + 0^2}} \rightarrow$

$$\begin{aligned} \rightarrow \begin{cases} \frac{2x - 3y + 3}{\sqrt{13}} &= \frac{3x - 2}{3} \\ \frac{2x - 3y + 3}{\sqrt{13}} &= \frac{-3x + 2}{3} \end{cases} \rightarrow \\ \rightarrow \begin{cases} 6x - 9y + 9 &= 3\sqrt{13}x - 2\sqrt{13} \\ 6x - 9y + 9 &= -3\sqrt{13}x + 2\sqrt{13} \end{cases} \rightarrow \\ \rightarrow \begin{cases} (6 - 3\sqrt{13})x - 9y + 9 + 2\sqrt{13} &= 0 \\ (6 + 3\sqrt{13})x - 9y + 9 - 2\sqrt{13} &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

El lugar geométrico está formado por las dos bisectrices de los ángulos formados por las dos rectas.

d) $\frac{|2y - 5|}{\sqrt{2^2 + 0^2}} = \frac{|2x - 3y + 5|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} \rightarrow$

$$\begin{aligned} \rightarrow \begin{cases} \frac{2y - 5}{2} &= \frac{2x - 3y + 5}{\sqrt{13}} \\ \frac{2y - 5}{2} &= \frac{-2x + 3y - 5}{\sqrt{13}} \end{cases} \rightarrow \\ \rightarrow \begin{cases} 2\sqrt{13}y - 5\sqrt{13} &= 4x - 6y + 10 \\ 2\sqrt{13}y - 5\sqrt{13} &= -4x + 6y - 10 \end{cases} \rightarrow \\ \rightarrow \begin{cases} -4x + (6 + 2\sqrt{13})y - 10 - 5\sqrt{13} &= 0 \\ 4x + (-6 + 2\sqrt{13})y + 10 - 5\sqrt{13} &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

El lugar geométrico está formado por las dos bisectrices de los ángulos formados por las dos rectas.