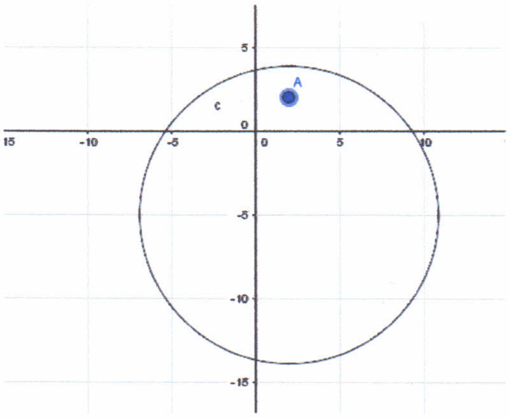
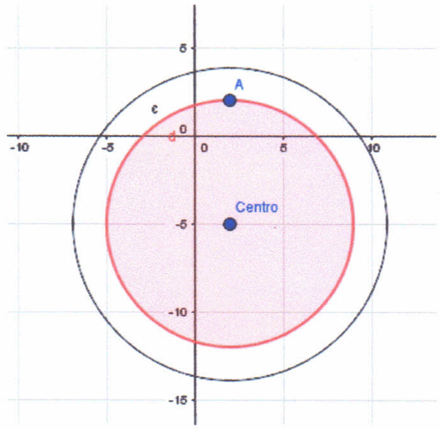
RELACIÓN 1 DE CÓNICAS : CIRCUNFERENCIA 1º BACH – A/B

$x^2+y^2=r^2$ ECUACIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA DE CENTRO (0,0) Y RADIO r
$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ECUACIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA DE CENTRO (a,b) Y RADIO r
$x^2+y^2+Ax+By+C=0$ ECUACIÓN GENERAL DE UNA CIRCUNFERENCIA $A=-2a$ $B=-2b$ $C=a^2+b^2-r^2$

<u>Calcula una circunferencia a partir de los datos siguientes :</u>

1. Concéntrica a $x^2+y^2-4x+10y-50=0$ pasando por el punto (2,2)

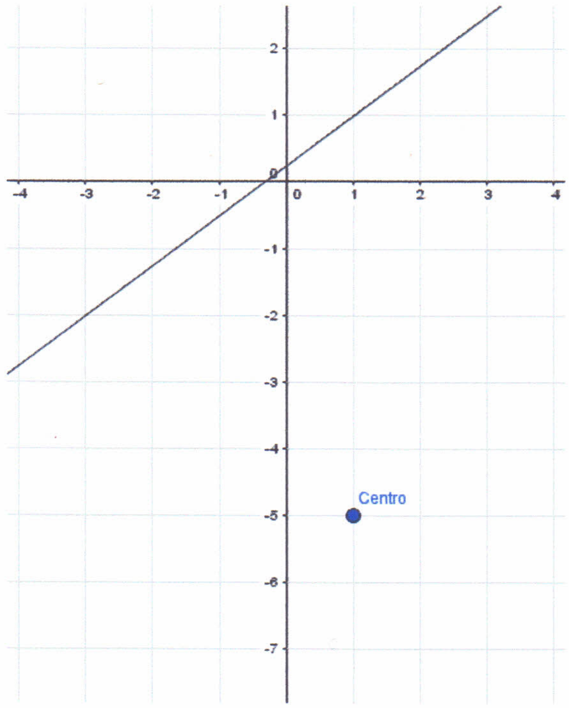


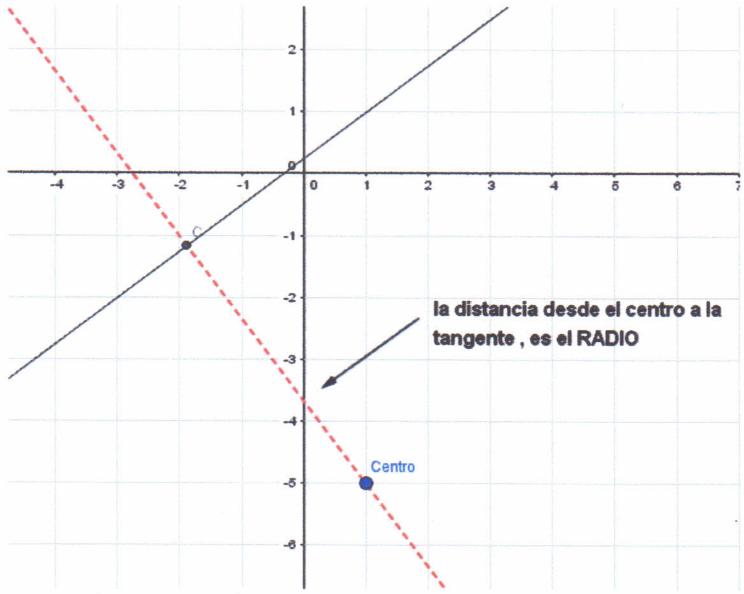


$A=-2a$; $-4=-2a$; $a=2$
$B=-2b$; $10=-2b$; $b=-5$
CENTRO : $(2,-5)$

$x^2+y^2-4x+10y+C'=0$ y pasando por $(2,2) \Rightarrow 4+4-8+20+C'=0$
$C'=-20 \Rightarrow x^2+y^2-4x+10y-20=0$

2. Centro en (1,-5) y tangente a $3x-4y+1=0$



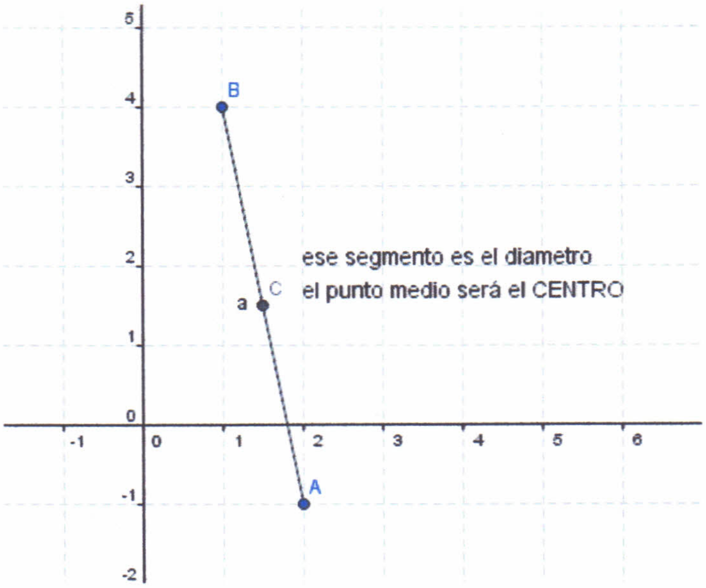


$d(C,r)=$ RADIO

$d=\dfrac{|3+20+1|}{\sqrt{9+16}}=\dfrac{24}{5}$

$(x-1)^2+(y+5)^2=\left(\dfrac{24}{5}\right)^2$

3. Los puntos (2, -1) y (1, 4) son los extremos de uno de sus diámetros



$$P_{medio}: \left(\frac{2+1}{2}, \frac{-1+4}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

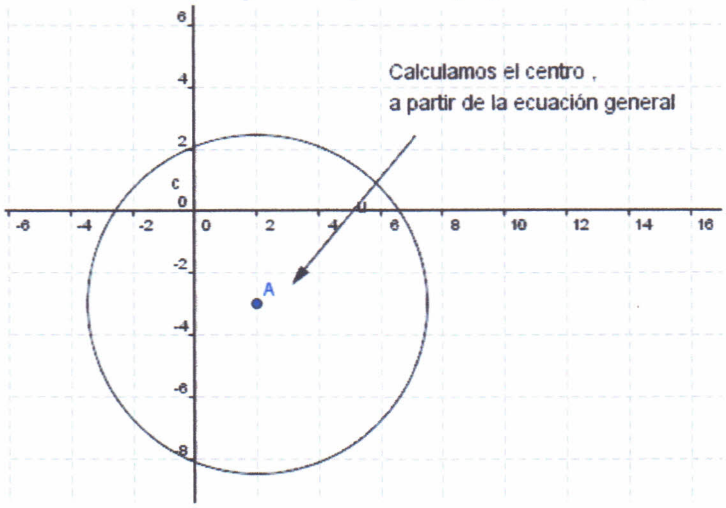
d(Cento, Punto) = radio.

$$\sqrt{\left(\frac{3}{2}-2\right)^2 + \left(\frac{3}{2}+1\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{26}{4}} = \sqrt{\frac{13}{2}}$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}$$

4. Concéntrica a $x^2+y^2-4x+6y-17=0$ y que sea tangente a $3x-4y+7=0$



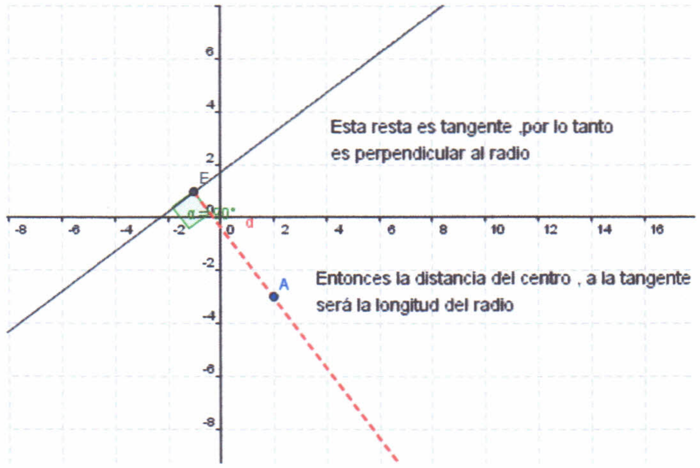
$-4 = -2a \; ; \; a = 2$

$6 = -2b \; ; \; b = -3$

d(cento, recta) = radio.

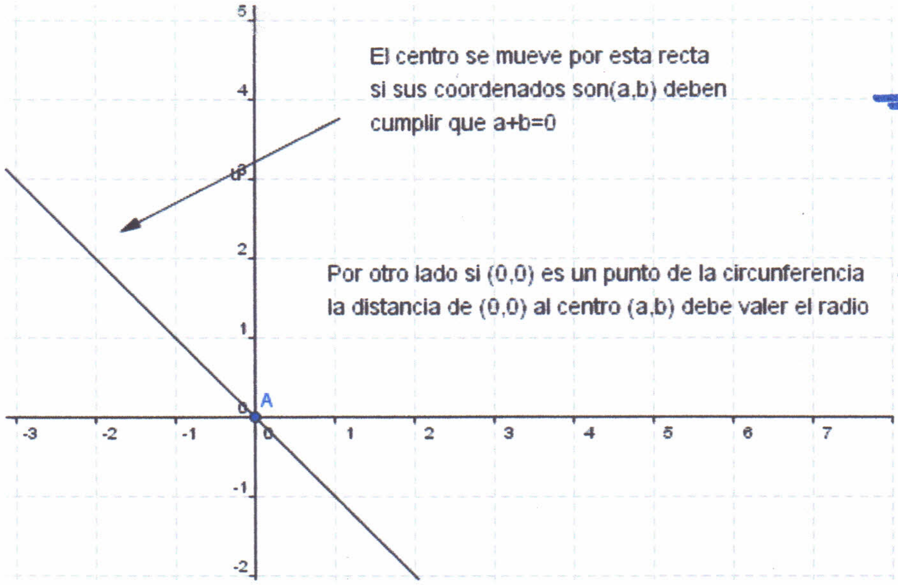
$$\frac{|6+12+7|}{\sqrt{9+16}} = \frac{25}{5} = 5$$

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$$



5. $r=\sqrt{3}$, pasa por (0,0) e su centro está en $x+y=0$

Llamamos al centro C(a,b)



$\Rightarrow a+b=0$

$\Rightarrow d((a,b),(0,0)) = \text{radio}$

$\sqrt{(a-0)^2+(b-0)^2} = r$

$a^2+b^2=r^2$

(Sabemos $r=\sqrt{3}$)

$\begin{cases} a+b=0 \\ a^2+b^2=r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a=-b \\ (-b)^2+b^2=3 \end{array} \Rightarrow 2b^2=3 \ ; \ b=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

¡HAY DOS!

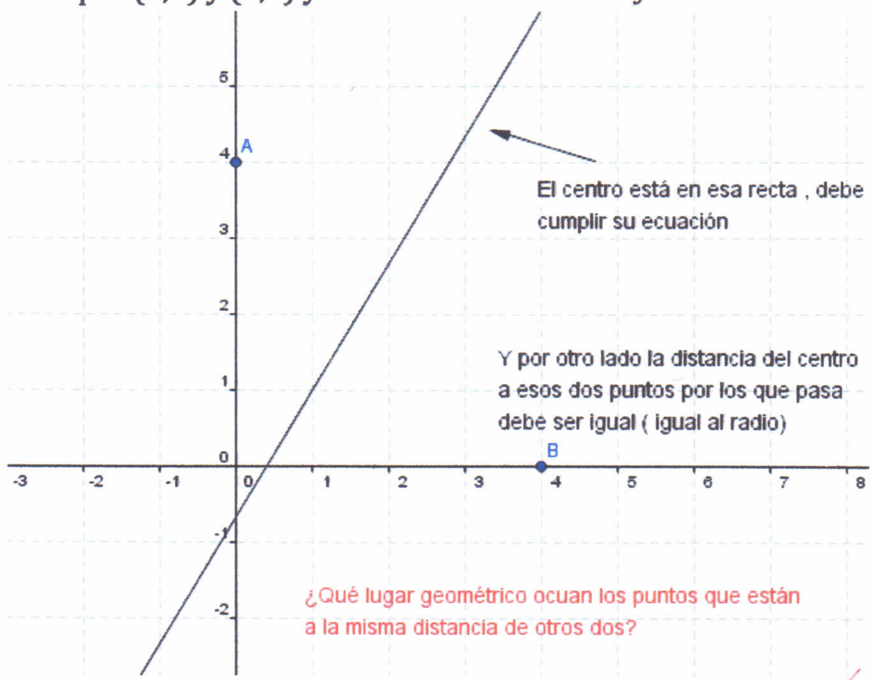
$a=\sqrt{\frac{3}{2}} \quad b=-\sqrt{\frac{3}{2}} \quad r=\sqrt{3}$

$a=-\sqrt{\frac{3}{2}} \quad b=\sqrt{\frac{3}{2}} \quad r=\sqrt{3}$

6. Pasa por (0,4) y (4,0) y su centro está en 5x-3y-2=0

$C(a,b) \Rightarrow \boxed{5a-3b-2=0}$

$d(C,A) = d(C,B) = r$



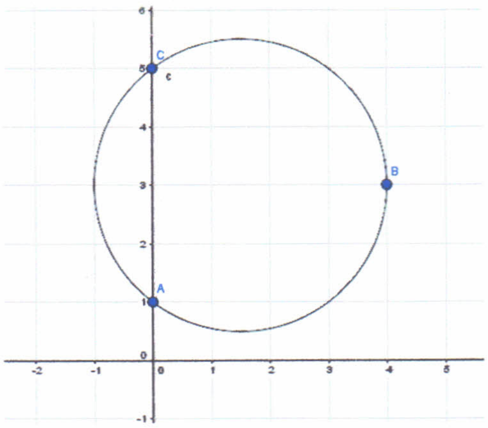
$\sqrt{(a-0)^2+(b-4)^2} = \sqrt{(a-4)^2+b^2} \Rightarrow \cancel{a^2}+\cancel{b^2}-8b+\cancel{16} = \cancel{a^2}-8a+\cancel{16}+\cancel{b^2}$

$\boxed{8a-8b=0}$

$\begin{cases} 5a-3b=2 \\ 8a-8b=0 \end{cases} \Rightarrow a=b \ ; \ 5a-3a=2 \Rightarrow a=1 \ ; \ b=1$

$r=\sqrt{1+(-3)^2}=\sqrt{10}$ SOL: $(x-1)^2+(y-1)^2=10$

7. Circunscrita al triángulo de vértices (0,1), (4,3) y (0,5)



$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

$(0,1) \Rightarrow 0+1+0+B+C=0$

$(4,3) \Rightarrow 16+9+4A+3B+C=0$

$(0,5) \Rightarrow 0+25+0+5B+C=0$

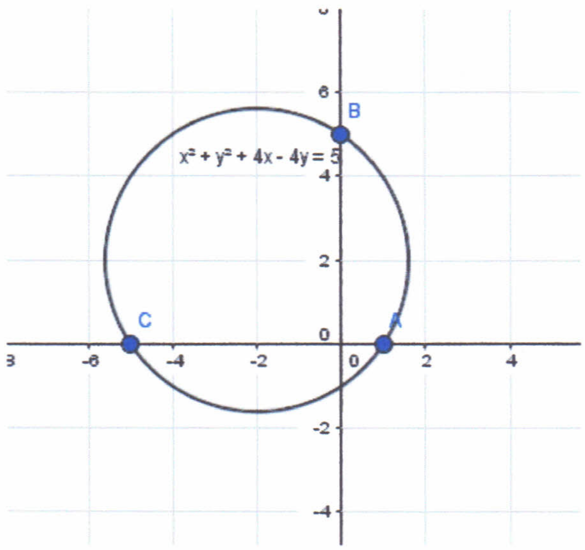
Aunque es de "3 incógnitas" no hace falta GAUSS!

$$\begin{cases} B+C=-1 \\ 4A+3B+C=-25 \\ 5B+C=-25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B+C=-1 \\ 5B+C=-25 \end{cases} \Rightarrow 4B=-24 \quad B=-6, \; C=5$$

$4A-18+5=-25 \Rightarrow 4A=-12 \; ; \; A=-3$

SOL: $x^2+y^2-3x-6y+5=0$

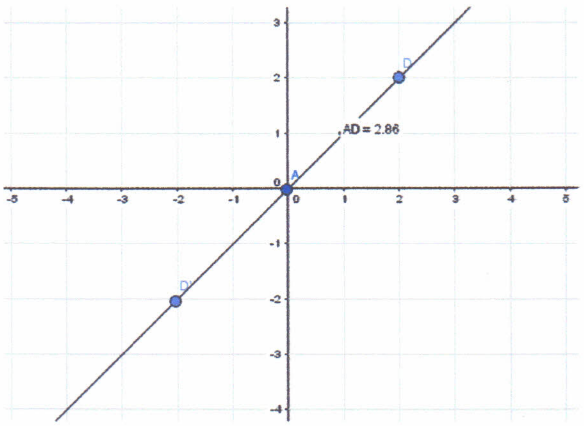
8. Pasa por A(1,0) ; B(0,5) ; C(-5,0)

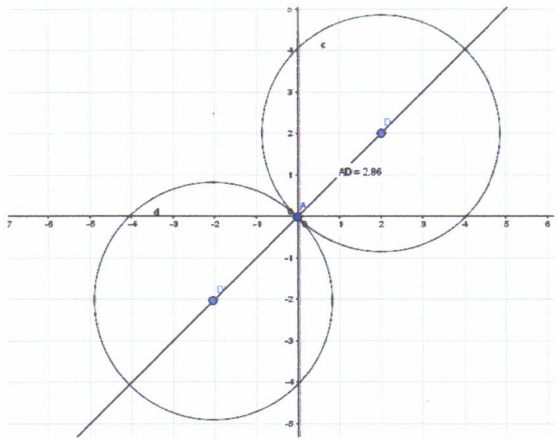


ES IDÉNTICO!

SOL: $x^2+y^2+4x-4y-5=0$

9. Calcula una circunferencia que pasa por el origen de coordenadas , tiene su centro en la bisectriz del primer cuadrante y su diámetro es $4\sqrt{2}$





C(a,b) está en la recta $x - y = 0 \Rightarrow x = y \Rightarrow \boxed{a = b}$

La ecuación de la circunferencia será:

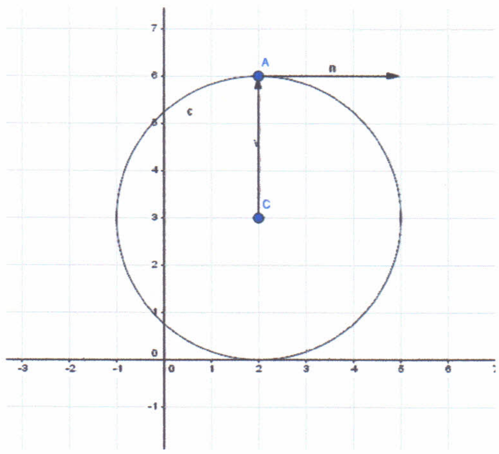
$$(x-a)^2 + (y-a)^2 = (2\sqrt{2})^2$$

Ahora solo hay que imponer que pasa por (0,0)

$a^2 + a^2 = 8$; $2a^2 = 8$; $a^2 = 4$; $a = \pm 2$ HAY DOS!!

Sol: $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$ $\quad (x+2)^2 + (y+2)^2 = 8$

10. Calcula la recta tangente y normal a la circunferencia $(x-2)^2+(y-3)^2=9$ en el punto (2,6).



Vemos si el punto pertenece a la circunferencia.

$(2-2)^2 + (6-3)^2 = 9$ ✓

Construimos un vector pasando por el centro y el punto.

$\vec{v} = (0,3) \Rightarrow$ ESTE DIRIGE LA NORMAL

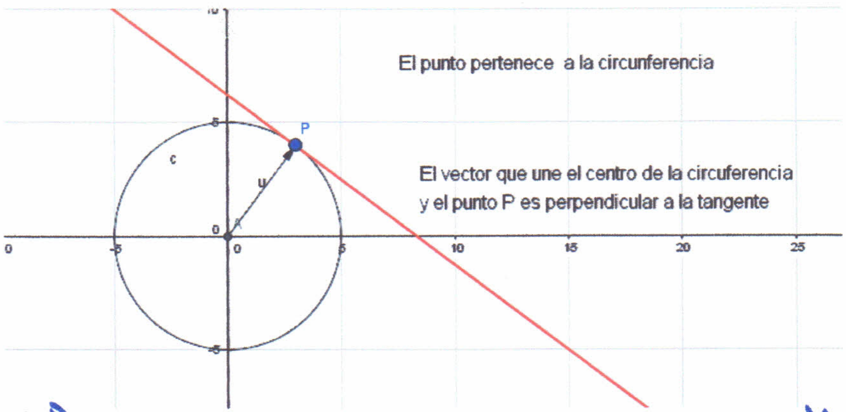
$\vec{n} = (3,0) \Rightarrow$ ESTE DIRIGE LA TANG.

TANGENTE: $\frac{x-2}{3} = \frac{y-6}{0} \Rightarrow 0 = y - 6 \Rightarrow \boxed{y = 6}$

NORMAL: $\frac{x-2}{0} = \frac{y-6}{3} \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

11. Dada la circunferencia $x^2 + y^2=25$, determina las rectas tangentes a esta que pasan por :

a) P(3,4)



$9+16=25$ ✓

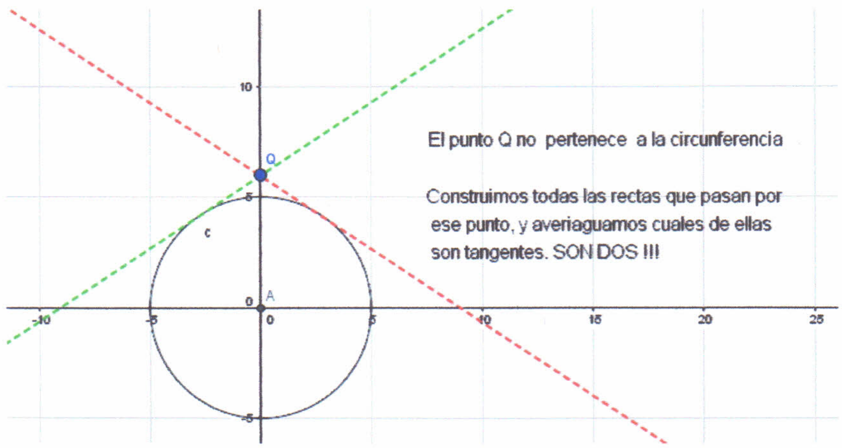
Centro : $(0,0)$

$\vec{v}=(3,4)$

$\Rightarrow$ NORMAL: $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-4}{4}$

$\vec{n}=(-4,3)$ $\Rightarrow$ TANG : $\dfrac{x-3}{-4}=\dfrac{y-4}{3}$; $3x+4y-25=0$

b) Q(0,6) $\quad 0^2+6^2 \neq 25$ NO!



$y-6=m(x-0)$

$\Rightarrow y=mx+6$

FORMA GENERAL:

$mx-y+6=0$

- Podemos obligar a que la recta y la circunferencia se corten en un solo punto

$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ y=mx+6 \end{cases} \Rightarrow$ UNA ÚNICA SOLUCIÓN! "EL DISCRIMINANTE $=0$"

(Normalmente se hace muy largo .....)

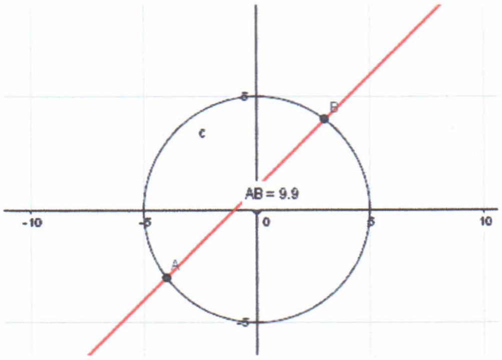
- Podemos usar que la distancia del centro a la recta tangente es el radio.

$$\frac{|m.0-0+6|}{\sqrt{m^2+1}}=5 \ ; \ \frac{6}{\sqrt{m^2+1}}=5 \ ; \ 6=5\sqrt{m^2+1} \Rightarrow 36=25(m^2+1)$$

$$m^2=\frac{11}{25} \ ; \ m=\pm\frac{\sqrt{11}}{5}$$

SOL: $\dfrac{\sqrt{11}}{5}x-y+6=0$; $-\dfrac{\sqrt{11}}{5}x-y+6=0$

12. Sean la circunferencia de ecuación: $x^2 + y^2 = 25$ y la recta $y = x+1$. Calcula la longitud de la cuerda que forma dicha recta con la circunferencia.



Calculamos los puntos de corte

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ y=x+1 \end{cases} \Rightarrow x^2+(x+1)^2=25$$

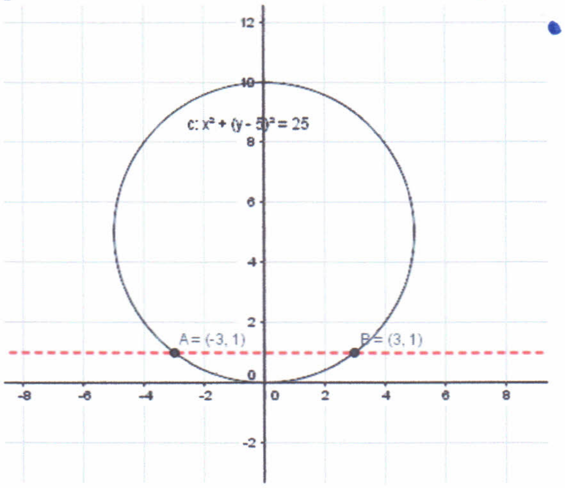
$$x^2+x^2+2x+1-25=0 \;;\; 2x^2+2x-24=0$$

$$x^2+x-12=0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\frac{-1\pm 7}{2}= \begin{cases} \rightarrow -4 \Rightarrow x=-4 \;;\; y=-3 \Rightarrow A(-4,-3) \\ \rightarrow 3 \Rightarrow x=3 \;;\; y=4 \Rightarrow B(3,4) \end{cases}$$

$$d(A,B)=\sqrt{(3+4)^2+(4+3)^2}=\sqrt{98}\ u.$$

13. Escribe la ecuación de la recta tangente y recta normal a la circunferencia $x^2 + y^2 - 10y = 0$ en los puntos de la misma con ordenada $y = 1$.

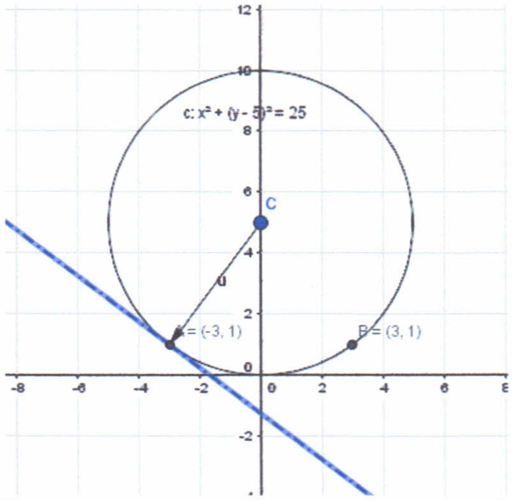


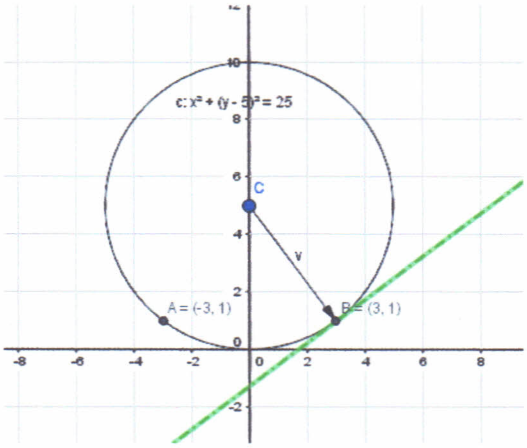
• Calculamos los puntos $\begin{cases} x^2+y^2-10y=0 \\ y=1 \end{cases}$

$$x^2+1-10=0 \;:\; x=\pm 3 \Rightarrow A(-3,1) \quad B(3,1)$$

• Calculamos centro:

$$0=-2a \;;\; -10=-2b \Rightarrow C(0,5)$$





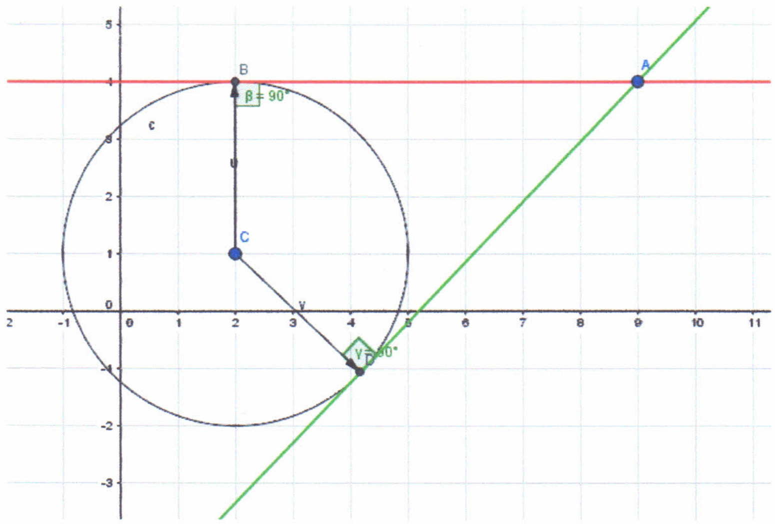
$\vec{v}=(3,4) \Rightarrow$ NORMAL $\quad \frac{x+3}{3}=\frac{y-1}{4}$

$\vec{n}=(-4,3) \Rightarrow$ TANG $\quad \frac{x+3}{-4}=\frac{y-1}{3}$

$\vec{v}=(-3,4) \Rightarrow N: \quad \frac{x-3}{-3}=\frac{y-1}{4}$

$\vec{n}=(4,3) \Rightarrow T: \quad \frac{x-3}{4}=\frac{y-1}{3}$

14. Consideremos la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$, determinar las ecuaciones de las rectas tangentes a la misma, desde el punto exterior P (9,4). Distancia entre P y los puntos de tangencia.



• Todas las rectas que pasan (9,4)

$y-4 = m(x-9)$

$y-4 = mx - 9m$

$mx - y - 9m + 4 = 0$ F.G.

• Centro $-4 = -2a$; $-2 = -2b$

$a = 2$; $b = 1$

• Radio $a^2 + b^2 - r^2 = C$

$4 + 1 - r^2 = -4$; $r = 3$

• Distancia de centro a recta igual al radio

$$\frac{|2m - 1 - 9m + 4|}{\sqrt{m^2+1}} = 3 ; \frac{|-7m+3|}{\sqrt{m^2+1}} = 3 ; |-7m+3| = 3\sqrt{m^2+1}$$

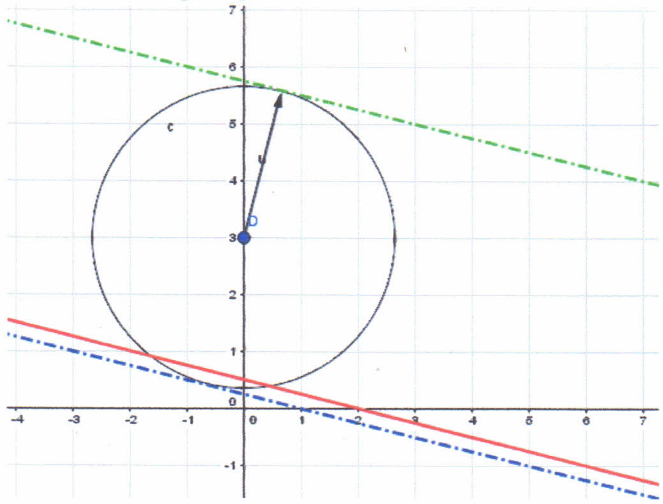
$$(-7m+3)^2 = 9.(\sqrt{m^2+1})^2 ; 9 - 14m + 49m^2 = 9m^2 + 9$$

$$40m^2 - 14m = 0 \quad m(40m - 14) = 0 \rightarrow m = 0$$
$$\rightarrow m = \frac{7}{20}$$

Sol: • Si $m = 0$, es una recta paralela al eje X; $\boxed{y = 4}$ ✓

• Si $m = \frac{7}{20}$; $\boxed{y - 4 = \frac{7}{20}(x - 9)}$ ✓

15. Calcula la ecuación de las rectas paralelas a $x+4y-2=0$ que son tangentes a la circunferencia de ecuación $x^2+y^2-6y+2=0$.



Si son paralelas, tienen la misma pendiente, sus vectores directores son proporcionales, sus coeficientes

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$

• Serán por tanto $x + 4y + c' = 0$

• Si además son tangentes $\Rightarrow$ la distancia del centro a ellas será el radio

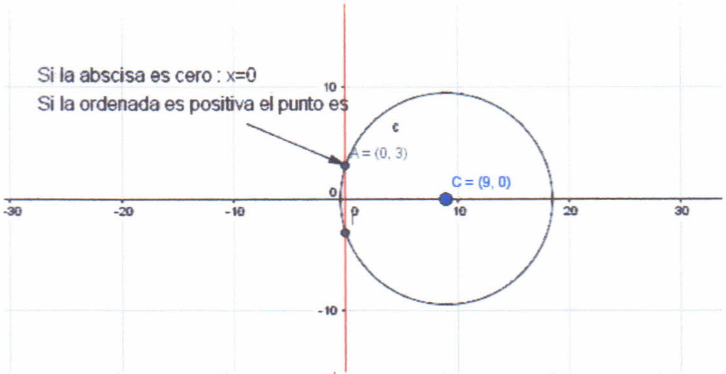
Centro: $0 = -2a$; $-6 = -2b$ $\Rightarrow$ $C(0,3)$

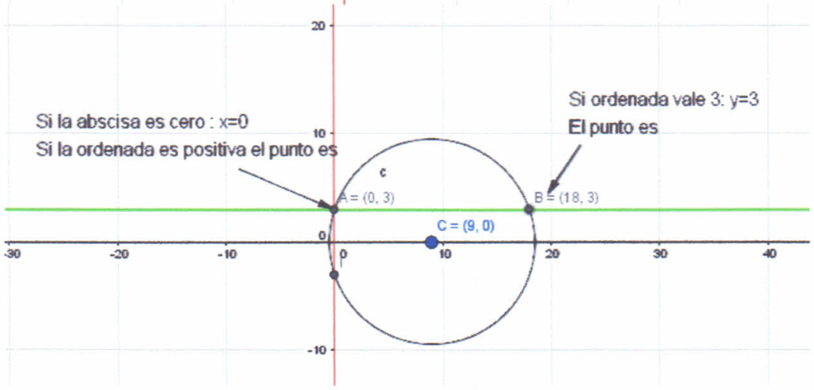
Radio: $a^2 + b^2 - r^2 = 2$ $\Rightarrow$ $0 + 9 - r^2 = 2$; $r = \sqrt{7}$

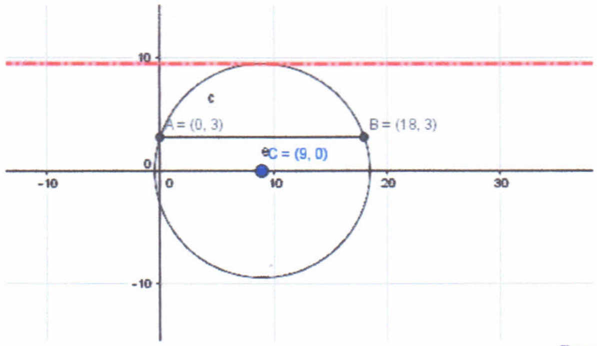
$$\frac{|0 + 4\cdot 3 + c'|}{\sqrt{1+16}} = \sqrt{7} \; ; \; \frac{|12 + c'|}{\sqrt{17}} = \sqrt{7} \; ; \; |12 + c'| = \sqrt{119}$$

$$(12 + c')^2 = (\sqrt{119})^2 \Rightarrow c^2 + 24c' + 25 = 0$$

16. Dada la circunferencia $x^2 + y^2 - 18x - 9 = 0$. Calcula la recta tangente a ella y paralela a la cuerda de extremos A y B , donde A es el punto de abscisa 0 y ordenada positiva , y B es el punto de ordenada 3 y abscisa positiva.







Calculamos el punto A

$x = 0$: $y^2 - 9 = 0$ $y = \pm 3$

$A(0,3)$

Calculamos el punto B

$y = 3$ $x^2 + 9 - 18x - 9 = 0$

$x(x - 18) = 0$ $\rightarrow x = 0$, $x = 18$

$B(18,3)$

$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (18,0)$ podemos coger uno proporcional $(1,0)$

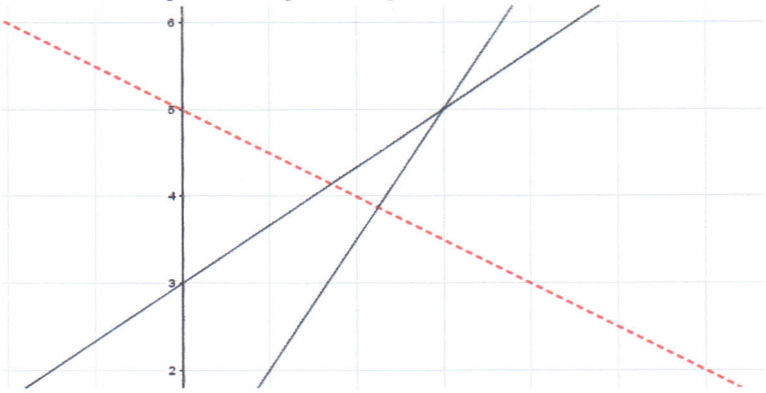
La recta que me piden tiene $m = 0$!! horizontal

$y = mx + n$ $\Rightarrow$ $y = n$

Centro: $(9,0)$ Radio: $\sqrt{90}$

SOL: $y = \sqrt{90}$ $y = -\sqrt{90}$

17. Halla la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en la recta $x + 2y - 10 = 0$ y es tangente a las rectas $2x - 3y + 9 = 0$ y $3x - 2y + 1 = 0$.



Centro : $C(a,b)$

$$\boxed{a + 2b - 10 = 0}$$

Distancia del centro a las rectas tangentes igual al radio

$$d(C, r_1) = \frac{|2a - 3b + 9|}{\sqrt{4+9}} \quad ; \quad d(C, r_2) = \frac{|3a - 2b + 1|}{\sqrt{9+4}}$$

$$\Rightarrow \frac{|2a-3b+9|}{\cancel{\sqrt{13}}} = \frac{|3a-2b+1|}{\cancel{\sqrt{13}}} \Rightarrow \text{Elevamos al cuadrado}$$

$$(2a - 3b + 9)^2 = (3a - 2b + 1)^2$$

$$4a^2 - \cancel{6ab} + 18a - \cancel{6ab} + 9b^2 - 27b + 18a - 27b + 81 =$$

$$= 9a^2 - \cancel{6ab} + 3a - \cancel{6ab} + 4b^2 - 2b + 3a - 2b + 1$$

$$4a^2 + 9b^2 + 36a - 54b + 81 = 9a^2 + 4b^2 + 6a - 4b + 1$$

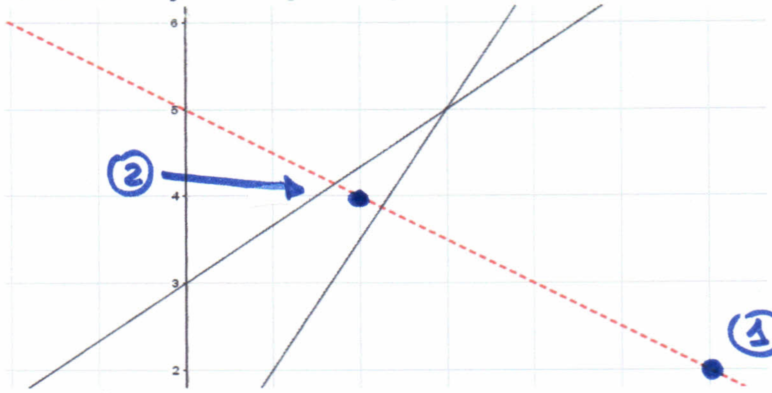
$$-5a^2 + 5b^2 + 30a - 50b + 80 = 0$$

$$\boxed{-a^2 + b^2 + 6a - 10b - 16 = 0}$$ y ahora resolver sistema. ... Muy largo....

OTRA FORMA: $|2a - 3b + 9| = |3a - 2b + 1|$

ó
$\rightarrow \; 2a - 3b + 9 = 3a - 2b + 1$
$\rightarrow \; 2a - 3b + 9 = -(3a - 2b + 1)$

17. Halla la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en la recta $x + 2y - 10 = 0$ y es tangente a las rectas $2x - 3y + 9 = 0$ y $3x - 2y + 1 = 0$.



Continua ...

Resolvemos dos sistemas:

① $\begin{cases} a+2b-10=0 \\ 2a-3b+9 = 3a-2b+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+2b=10 \\ -a-b=-8 \end{cases}$

$b = 2 \;;\; a = 6$

② $\begin{cases} a+2b-10=0 \\ 2a-3b+9 = -3a+2b-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+2b=10 \\ +5a-5b=-10 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a+2b=10 \\ a-b=-2 \end{cases}$

$3b = 12 \;;\; b=4 \;;\; a=2$

El radio: $d_1 = \dfrac{|2.6-3.2+9|}{\sqrt{13}} = \dfrac{15}{\sqrt{13}}$

$d_2 = \dfrac{|2.2-3.4+9|}{\sqrt{13}} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}$