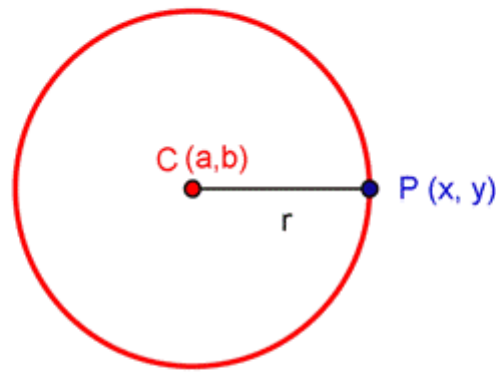


Circunferencia

Una circunferencia de centro **C** y radio **r** es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a C es r.



Determinación de una circunferencia

Podemos hallar la ecuación una circunferencia cuando conocemos:

- Tres puntos de la misma.
- El centro y el radio.
- Un punto y el centro
- El centro y una recta tangente.

Ecuación de la circunferencia

La obtenemos aplicando la fórmula de la distancia entre C(a,b) y un punto cualquiera de la circunferencia P(x, y), resulta:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \text{ elevando al cuadrado } (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

$$\begin{array}{l} \text{Ecuación general de la circunferencia} \\ x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} -2a = A \\ -2b = B \\ a^2 + b^2 - r^2 = C \end{cases}$$

Ejemplos

1. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto C (1,5) que pasa por el punto P (-3,2).

- El radio es la distancia de C(1,5) a P(-3,2):

$$r = \sqrt{(-3-1)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{25} = 5$$

- Ecuación: $(x-1)^2 + (y-5)^2 = 25$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 10y + 25 = 25 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 10y + 1 = 0$$

2. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro es el segmento de extremos los puntos A (2,3) y B (-4,-9).

- El centro es el punto medio de A y B, es decir,

$$C \left(\frac{(2-4)}{2}, \frac{(3-9)}{2} \right) \Rightarrow C(-1, -3)$$

- El radio es la distancia de C (-1,-3) al punto A(2,3).

$$r = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45}$$

- Ecuación: $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 45$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = 45 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x + 6y - 35 = 0$$

3. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos: D (0,0) , E (0,5) y F (3,2).

Sustituimos en la fórmula $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ las coordenadas de los tres puntos, obtenemos tres ecuaciones, resolvemos para calcular los valores de A, B y C.

$$D(0,0) \Rightarrow 0^2 + 0^2 + A \cdot 0 + B \cdot 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$E(0,5) \Rightarrow 0^2 + 5^2 + 0 \cdot A + 5 \cdot B + 0 = 0 \Rightarrow 5B = -25 \Rightarrow B = -5$$

$$F(3,2) \Rightarrow 3^2 + 2^2 + 3A + 2(-5) + 0 = 0 \Rightarrow 13 + 3 \cdot A = 10 \Rightarrow A = -1$$

Llevando los valores a la fórmula

$$x^2 + y^2 - x - 5y = 0$$

4. Calcula el centro y el radio de la circunferencia

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$$

La ecuación general de la circunferencia es:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Identificando coeficientes resulta:

$$-2a = 2 \Rightarrow a = -1 \quad -2b = -4 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow \text{centro } C(-1, 2)$$

$$\text{Radio: } a^2 + b^2 - r^2 = -4$$

$$(-1)^2 + 2^2 - r^2 = -4 \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow \text{radio } r = 3$$

5. Halla la ecuación de la circunferencia de centro (1,4) y que es tangente a la recta $3x + 4y - 4 = 0$.

- El radio es la distancia del punto C a la recta.

$$r = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 4 - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

- Ecuación: $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 8y + 8 = 0$.