

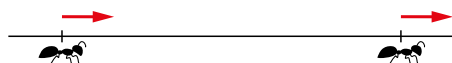
DESAFÍO

¡No tiene pérdida!



Una hormiga está sobre una cinta de Möbius de un metro de largo y, justo debajo, al otro lado de la cinta, hay otra. Ambas empiezan a moverse simultáneamente, a 10 cm/s y 5 cm/s, respectivamente. ¿Cuánto tardarán en encontrarse? ¿Y si avanzan en sentidos opuestos?

Al estar en lados opuestos, las hormigas están inicialmente a 50 cm de distancia.



Si caminan en el mismo sentido, la más rápida debe recortarle 50 cm a razón de 5 cm/s, que es la diferencia de las velocidades.

$$50 : 5 = 10$$

Por tanto, tardará 10 s en alcanzarla.



Si avanzan en sentidos opuestos, ambas se recortan 15 cm/s, pues se suman las velocidades.

$$x_1 = 10t$$

$$x_2 = 100 - 5t$$

$$50 : 15 = 3,33$$

Por tanto, tardarán 3,33 s en encontrarse.

PIENSA

PÁG. 145. Escribe el vector $(1, 2)$ como combinación lineal de los vectores $(2, 4)$ y $(-1, -2)$. ¿Qué observas? ¿Puedes expresarlo como una combinación diferente?

$$(1, 2) = a(2, 4) + b(-1, -2)$$

$$\begin{cases} 1 = 2a - b \\ 2 = 4a - 2b \end{cases} \quad b = 2a - 1$$

Hay infinitas soluciones para este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Por ejemplo:

$$(1, 2) = (2, 4) + (-1, -2)$$

$$(1, 2) = 2(2, 4) + 3(-1, -2)$$

PÁG. 151. ¿Para qué valores del vector director $\vec{d}$ no se puede expresar la ecuación de una recta con su forma punto-pendiente? ¿Cómo son estas rectas?

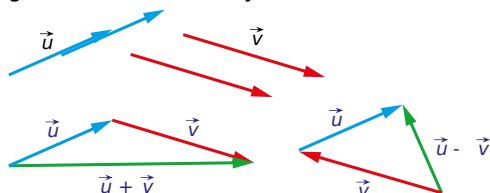
La ecuación punto-pendiente de una recta es de la forma:

$$y - b = \frac{d_2}{d_1}(x - a)$$

Por tanto, no se puede expresar de esta manera cuando las coordenadas del vector director son $(0, d_2)$. Es decir, en rectas verticales.

ACTIVIDADES

1 Copia estos vectores y calcula gráficamente $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$.

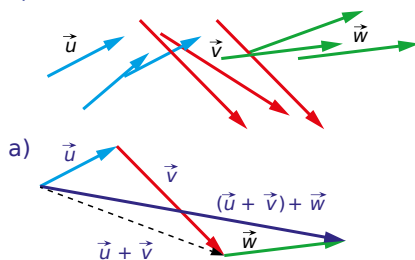


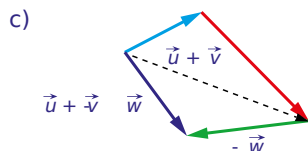
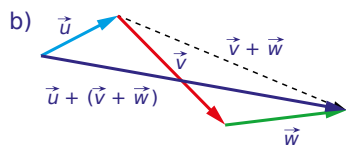
2 Realiza estas operaciones con vectores.

a) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

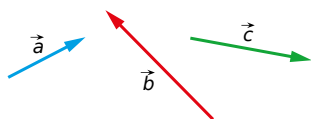
b) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

c) $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$





- 3 Copia los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, y realiza gráficamente las siguientes operaciones.

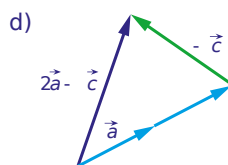
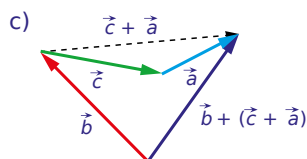
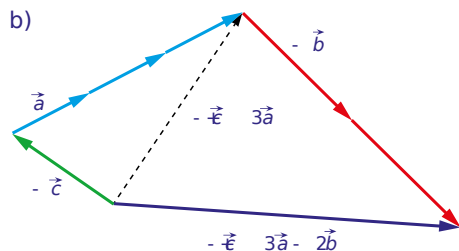
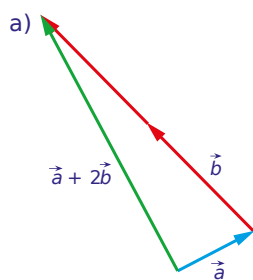


a) $\vec{a} + 2\vec{b}$

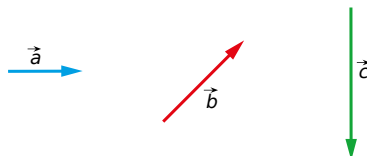
b) $-\vec{c} + 3\vec{a} - 2\vec{b}$

c) $\vec{b} + (\vec{c} + \vec{a})$

d) $2\vec{a} - \vec{c}$



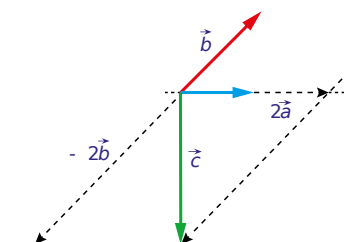
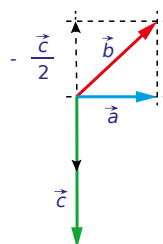
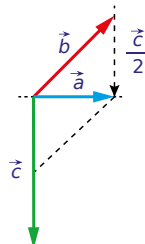
- 4 Escribe cada vector como combinación lineal de los otros dos.



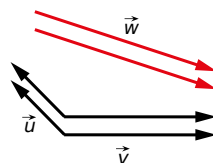
$$\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\vec{b} = -\vec{a} + \vec{c}$$

$$\vec{c} = 2\vec{a} - 2\vec{b}$$

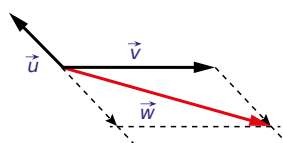


- 5 Comprueba que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman una base y expresa el vector $\vec{w}$ en función de ellos.



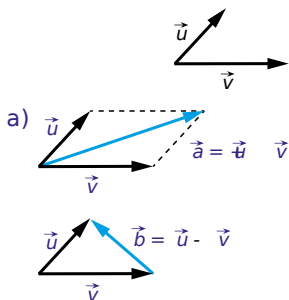
Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen distinta dirección, por lo que forman una base.

$$\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$$



6 Dada la base $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$:

- Calcula $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{b} = \vec{u} - \vec{v}$.
- Indica las coordenadas de b en la base B .
- Comprueba que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman una base.
- Expresa $\vec{u}$ y $\vec{v}$ como combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

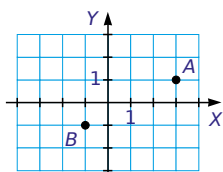


- $\vec{b} = (1, -1)$
- Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen distinta dirección, luego forman una base.
- $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{b} = \vec{u} - \vec{v}$ $\Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = 2\vec{u}$

$$\Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

$$\vec{v} + \vec{a} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \Rightarrow \vec{v} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$$

7 Dibuja los puntos $A(3, 1)$ y $B(-1, -1)$ y calcula las coordenadas de los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{BA}$. Después, calcula sus módulos.



$$\vec{AB} = (3 - (-1), 1 - (-1)) = (4, 2)$$

$$\vec{BA} = (-1 - 3, -1 - 1) = (-4, -2)$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$$

$$|\vec{BA}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$$

8 Calcula el valor de k para que estos pares de vectores sean paralelos.

a) $\vec{u} = (3, 2)$ y $\vec{v} = (9, k)$

b) $\vec{u} = (-1, 4)$ y $\vec{v} = (k, -2)$

a) $\frac{9}{3} = \frac{k}{2} \Rightarrow k = \frac{2 \cdot 9}{3} = 6$

b) $\frac{-1}{k} = \frac{4}{-2} \Rightarrow k = \frac{-2 \cdot (-1)}{4} = \frac{1}{2}$

9 Dados los puntos $A(3, -1)$, $B(-1, 2)$, $C(0, 2)$ y $D(-1, -2)$, halla estos vectores.

a) $\vec{AB} + \vec{CD}$ b) $2\vec{AC} - \vec{BD}$ c) $-\vec{BC} + 2\vec{AD}$

a) $\vec{AB} + \vec{CD} = (4, 3) + (-1, -4) = (3, -1)$

b) $2\vec{AC} - \vec{BD} = 2(3, 3) - (0, -4) = (6, 6) - (0, -4) = (6, 10)$

c) $-\vec{BC} + 2\vec{AD} = -(1, 0) + 2(-1, 1) = (-1, 0) + (-2, 2) = (-3, 2)$

10 Dados $\vec{u} = (2, -1)$ y $\vec{v} = (0, 3)$, realiza las siguientes operaciones con vectores.

a) $\vec{u} - 3\vec{v}$ b) $5\vec{u} + \vec{v}$ c) $-\vec{u} + 2\vec{v}$

a) $\vec{u} - 3\vec{v} = (2, -1) - (0, 9) = (2, -10)$

b) $5\vec{u} + \vec{v} = (10, -5) + (0, 3) = (10, -2)$

c) $-\vec{u} + 2\vec{v} = (-2, 1) + (0, 6) = (-2, 7)$

11 Dados $\vec{u} = (0, 2)$, $\vec{v} = (1, -1)$ y $\vec{w} = (0, -1)$, calcula.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ b) $\vec{w} \cdot \vec{v}$ c) $\vec{u} \cdot (\vec{v} - 2\vec{w})$

d) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$ e) $\vec{u} \cdot \vec{w}$ f) $-2\vec{u} \cdot 3\vec{v}$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (0, 2) \cdot (1, -1) = -2$

b) $\vec{w} \cdot \vec{v} = (0, -1) \cdot (1, -1) = 1$

c) $\vec{u} \cdot (\vec{v} - 2\vec{w}) = (0, 2) \cdot ((1, -1) - (0, -2)) = (0, 2) \cdot (1, 1) = 2$

d) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (0, 2) \cdot (1, -2) = -2$

e) $\vec{u} \cdot \vec{w} = (0, 2) \cdot (0, -1) = -2$

f) $-2\vec{u} \cdot 3\vec{v} = (-4, 0) \cdot (3, -3) = 12$

12 Señala cuáles de los siguientes vectores son perpendiculares entre sí y cuáles no.

$\vec{u} = (-1, 3)$ $\vec{v} = (12, 4)$ $\vec{w} = (\frac{1}{3}, -10)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = -1 \cdot 12 + 3 \cdot 4 = 0$

$\vec{u} \cdot \vec{w} = -1 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot (-10) \neq 0$

$\vec{v} \cdot \vec{w} = 12 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot (-10) \neq 0$

Son perpendiculares $\vec{u} \cdot \vec{v}$ y $\vec{v} \cdot \vec{w}$.

- 13** Halla el ángulo que forman los siguientes vectores.

a) $\vec{a} = (2, -1)$ y $\vec{b} = (3, 2)$

b) $\vec{a} = (5, 2)$ y $\vec{b} = (-1, 1)$

c) $\vec{a} = (-3, -1)$ y $\vec{b} = (2, 3)$

d) $\vec{a} = (-1, 5)$ y $\vec{b} = (4, -2)$

a) $\cos a = \frac{2 \cdot 3 + 2 \cdot (-1)}{\sqrt{2^2 + 1^2} \sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{65}}$
 $a = 60,3^\circ$

b) $\cos a = \frac{-1 \cdot 5 + 2 \cdot 1}{\sqrt{5^2 + 2^2} \sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{-3}{\sqrt{58}}$
 $a = 113,2^\circ$

c) $\cos a = \frac{-3 \cdot 2 + 3 \cdot (-1)}{\sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} \sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{-9}{\sqrt{130}}$
 $a = 217,9^\circ$

d) $\cos a = \frac{-1 \cdot 4 + 5 \cdot (-2)}{\sqrt{(-1)^2 + 5^2} \sqrt{4^2 + (-2)^2}} = \frac{-14}{\sqrt{520}}$
 $a = 232,1^\circ$

- 14** Encuentra tres vectores perpendiculares y otros tres paralelos a cada uno de los siguientes vectores.

a) $\vec{a} = (1, 1)$ b) $\vec{b} = (3, 2)$ c) $\vec{c} = (0, 1)$

Indica, para cada apartado, cómo son entre sí los vectores que has calculado.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\vec{a} = (1, 1)$

Vectores paralelos: (2, 2), (3, 3) y (4, 4)

Vectores perpendiculares: (-1, 1), (-2, 2) y (-3, 3)

b) $\vec{b} = (3, 2)$

Vectores paralelos: (6, 4), (9, 6) y (12, 8)

Vectores perpendiculares: (2, -3), (4, -6) y (6, -9)

c) $\vec{c} = (0, 1)$

Vectores paralelos: (0, 2), (0, 3) y (0, 4)

Vectores perpendiculares: (1, 0), (2, 0) y (3, 0)

- 15** Dados los puntos A (-1, 3), B (5, 1) y C (0, 3), calcula la distancia del punto C al punto medio de A y B.

Punto medio de A y B:

$$M = \left(\frac{-1 + 5}{2}, \frac{3 + 1}{2} \right) = (2, 2)$$

$$d(C, M) = |\vec{CM}| = \sqrt{(2 - 0)^2 + (2 - 3)^2} = \sqrt{5}$$

- 16** Halla los simétricos de los puntos A (2, -5) y B (-1, 3) respecto del punto C (2, -1).

$$(2, -1) = \frac{2+x}{2}, \frac{-5+y}{2} \Rightarrow x = 2, y = 3$$

El simétrico respecto de A (2, -5).

$$(2, -1) = \frac{-1+x}{2}, \frac{3+y}{2} \Rightarrow x = 5, y = -5$$

El simétrico respecto de B (-1, 3).

El simétrico respecto de C (2, -1).

- 17** Escribe las ecuaciones vectorial y paramétricas de la recta que pasa por los puntos A(7, 3) y B(2, -1).

$$\vec{AB} = (-5, -4)$$

Ecuación vectorial:

$$\vec{OP} = \vec{OA} + t\vec{AB}$$

$$(x, y) = (7, 3) + t(-5, -4)$$

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} x &= 7 - 5t \\ y &= 3 - 4t \end{aligned}$$

- 18** Halla las ecuaciones paramétricas de la recta cuyo vector director es $\vec{v} = (-1, 0)$ y pasa por el punto A(3, 2).

$$\begin{aligned} x &= 3 - t \\ y &= 2 \end{aligned}$$

- 19** Calcula las ecuaciones vectorial y paramétricas de las rectas bisectrices de los cuadrantes.

Bisectriz del primer y tercer cuadrantes

$$\text{Ecuación vectorial: } (x, y) = t(1, 1)$$

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= t \end{aligned}$$

Bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes

$$\text{Ecuación vectorial: } (x, y) = t(1, -1)$$

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= -t \end{aligned}$$

- 20 Halla las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto medio de $A(3, 1)$ y $B(5, -3)$ y por el punto $C(0, 3)$.

$$M = \left(\frac{3+5}{2}, \frac{1-3}{2} \right) = (4, -1)$$

$$\vec{CM} = (4, -4)$$

$$\begin{cases} x = 4t \\ y = -3 - 4t \end{cases}$$

- 21 Halla la ecuación continua de la recta que pasa por $A(2, -1)$ y tiene la dirección del vector $\vec{d} = (2, -1)$.

Averigua si el punto $P(3, 1)$ está en la recta.

Calculamos la ecuación continua de la recta.

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-(-1)}{-1}$$

Comprobamos si el punto P cumple la ecuación de la recta.

$$\frac{3-2}{2} = \frac{1-(-1)}{-1} \Rightarrow \frac{1}{2} \neq -2$$

Luego el punto P no pertenece a la recta.

- 22 Calcula la recta que pasa por el punto $A(2, 7)$ y forma con el eje de abscisas un ángulo de 60° . Explica cómo lo haces.

Calculamos la pendiente.

$$\tan 60^\circ = m \Rightarrow m = \sqrt{3}$$

Hallamos la ecuación punto-pendiente.

$$y - 7 = \sqrt{3}(x - 2)$$

- 23 Halla la ecuación explícita de la recta que pasa por $A(2, -3)$ y tiene la dirección del vector $\vec{v} = (-2, 1)$.

Calculamos la pendiente.

$$m = \frac{d_2}{d_1} = -\frac{1}{2}$$

Ecuación punto-pendiente:

$$y + 3 = -\frac{1}{2}(x - 2)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + n \Rightarrow -3 = -\frac{1}{2}(-2) + n \Rightarrow n = -2$$

Ecuación explícita:

$$y = -\frac{1}{2}x - 2$$

- 24 Escribe la ecuación general de la recta que pasa por $A(0, -2)$ y $B(4, -1)$.

$$\vec{AB} = (4, 1) \Rightarrow \frac{x-0}{4} = \frac{y-(-2)}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{4} - (y + 2) = 0 \Rightarrow x - 4y - 8 = 0$$

- 25 Estudia la posición relativa de las rectas r y s a partir de los coeficientes de sus ecuaciones generales.

$$r: \frac{x}{3} = y - 5 \quad s: \begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \end{cases}$$

Las ecuaciones generales de r y s son:

$$r: x - 3y + 15 = 0 \quad s: 3x + y - 6 = 0$$

Como $\frac{1}{3} \neq \frac{-3}{1}$, las rectas son secantes.

- 26 Estudia la posición relativa de dos rectas que tienen vectores directores no proporcionales. ¿Qué condición han de verificar para que las rectas sean perpendiculares?

Si los vectores directores no son proporcionales, las rectas son secantes.

Sea $\vec{d} = (d_1, d_2)$ el vector director de la recta r , y sea $\vec{c} = (c_1, c_2)$ el vector director de la recta s .

Las rectas son perpendiculares si el producto escalar de los vectores es cero.

$$d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2 = 0 \Rightarrow d_1 \cdot c_1 = -d_2 \cdot c_2$$

$$\Rightarrow \vec{c} = (-d_2, d_1)$$

- 27 Halla la distancia que existe entre el punto $P(2, -1)$ y la recta r , cuya ecuación es la siguiente:

$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{2-y}{2}$$

Expresamos la recta en forma general.

$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{2-y}{2} \Rightarrow 2x + 3y - 8 = 0$$

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$$

$$= \frac{|2(-2) + 3(-1) - 8|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} =$$

$$= \frac{7}{\sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{13}}{13}$$

- 28 Calcula la distancia que separa la siguiente recta del origen de coordenadas.

$$r: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$$

Expresamos la recta en forma general.

$$\begin{aligned} x &= 3 + 2t \\ y &= 2 + 3t \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 2t \\ y - 2 = 3t \end{cases} \Rightarrow \frac{y-2}{3} = \frac{x-3}{2} \Rightarrow 2y - 4 = 3x - 9 \Rightarrow 3x - 2y = 5$$

$$\begin{aligned} d(P, r) &= \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \\ &= \frac{|3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 5|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{13}}{13} \end{aligned}$$

- 29 Halla la distancia entre estas dos rectas paralelas.

$$r: 5x - 2y + 2 = 0 \quad s: \frac{x}{2} = \frac{y-3}{5}$$

Tomamos el punto $P(0, 1)$, que pertenece a la recta r .

La ecuación general de la recta s es $5x - 2y + 6 = 0$.

$$\begin{aligned} d(P, s) &= \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \\ &= \frac{|5 \cdot 0 - 2 \cdot 1 + 6|}{\sqrt{5^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{\sqrt{29}} = \frac{4\sqrt{29}}{29} \end{aligned}$$

- 30 Calcula el ángulo que forman estas dos rectas al cortarse.

$$r: y = x - 3$$

$$s: \frac{x-1}{-2} = \frac{y-3}{3}$$

$$r: -x + y + 3 = 0 \quad s: x + 2y + 5 = 0$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = \\ &= \frac{|(-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \\ &= \frac{\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \alpha = 71,57^\circ \end{aligned}$$

PRACTICA

- 31 Determina si los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman una base y halla las coordenadas del vector $\vec{w}$ respecto de ella en cada caso.

a) $\vec{u} = (-1, 0)$, $\vec{v} = (2, -3)$ y $\vec{w} = (3, -3)$

b) $\vec{u} = (3, -3)$, $\vec{v} = (1, -4)$ y $\vec{w} = (5, -2)$

a) Forman una base, pues $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$.

$$(3, -3) = a(-1, 0) + b(2, -3)$$

$$\begin{cases} -a + 2b = 3 \\ -3b = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{w} = 1\vec{u} + 1\vec{v}$$

b) Forman una base, pues $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = -12 - (-12) = 0$.

$$(5, -2) = a(3, -3) + b(1, -4)$$

$$\begin{cases} 3a + b = 5 \\ -3a - 4b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \vec{w} = 1\vec{u} + 2\vec{v}$$

- 32 Si los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$ son equipolentes, con $A(2, 1)$ y $B(0, -2)$, calcula el extremo desconocido en cada caso.

a) $C(-5, 7)$ e) $C(7, -5)$

b) $D(-5, 7)$ f) $D(7, -5)$

c) $C(0, -2)$ g) $C(0, 0)$

d) $D(0, -2)$ h) $D(0, 0)$

$$\vec{AB} = (-2, -3)$$

a) $\vec{CD} = (a + 5, b - 7) = (-2, -3) \Rightarrow \begin{cases} a = -7 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow C(-7, 4)$

b) $\vec{CD} = (-5 - a, 7 - b) = (-2, -3) \Rightarrow \begin{cases} a = -7 \\ b = 10 \end{cases} \Rightarrow C(-7, 10)$

c) $\vec{CD} = (a, b + 2) = (-2, -3) \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -5 \end{cases} \Rightarrow C(-2, -5)$

d) $\vec{CD} = (-a, -2 - b) = (-2, -3) \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow C(2, 1)$

e) $\vec{CD} = (a - 7, b + 5) = (-2, -3) \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -8 \end{cases} \Rightarrow C(5, -8)$

f) $\vec{CD} = (7 - a, 5 - b) = (-2, -3) \Rightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = 8 \end{cases} \Rightarrow C(9, 8)$

g) $\vec{CD} = (a, b) = (-2, -3) \Rightarrow C(-2, -3)$

h) $\vec{CD} = (-a, -b) = (-2, -3) \Rightarrow C(2, 3)$

- 33 Halla las coordenadas de dos vectores sabiendo que su suma y su diferencia son:

a) $\vec{u} + \vec{v} = (2, 3)$ y $\vec{u} - \vec{v} = (-1, 4)$

b) $\vec{u} + \vec{v} = (1, 0)$ y $\vec{u} - \vec{v} = (0, 1)$

c) $\vec{u} + \vec{v} = (2, 5)$ y $\vec{u} - \vec{v} = (2, -3)$

d) $\vec{u} + \vec{v} = (6, 10)$ y $\vec{u} - \vec{v} = (0, 0)$

a)
$$\begin{aligned} \begin{matrix} \vec{u} + \vec{v} & (2, 3) \\ \vec{u} - \vec{v} & (-1, 4) \end{matrix} & \quad " \quad 2\vec{u} = (1, 7) " \\ & \quad " \quad \vec{u} = e\frac{1}{2}, \frac{7}{2}o \end{aligned}$$

$$\vec{v} = (2, 3) - e\frac{1}{2}, \frac{7}{2}o = e\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}o$$

b)
$$\begin{aligned} \begin{matrix} \vec{u} + \vec{v} & (1, 0) \\ \vec{u} - \vec{v} & (0, 1) \end{matrix} & \quad " \quad 2\vec{u} = (1, 1) " \\ & \quad " \quad \vec{u} = e\frac{1}{2}, \frac{1}{2}o \end{aligned}$$

$$\vec{v} = (1, 0) - e\frac{1}{2}, \frac{1}{2}o = e\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}o$$

c)
$$\begin{aligned} \begin{matrix} \vec{u} + \vec{v} & (2, 5) \\ \vec{u} - \vec{v} & (2, -3) \end{matrix} & \quad " \quad 2\vec{u} = (4, 2) " \\ & \quad " \quad \vec{u} = (2, 1) \end{aligned}$$

$$\vec{v} = (2, 5) - (2, 1) = (0, 4)$$

d)
$$\begin{aligned} \begin{matrix} \vec{u} + \vec{v} & (6, 10) \\ \vec{u} - \vec{v} & (0, 0) \end{matrix} & \quad " \quad 2\vec{u} = (6, 10) " \\ & \quad " \quad \vec{u} = (3, 5) \end{aligned}$$

$$\vec{v} = (6, 10) - (3, 5) = (3, 5)$$

34 Halla los vectores que se piden a continuación.

a) Perpendicular a $u = (-2, 1)$ y de módulo 2.

b) Perpendicular a $u = (3, 1)$ y de módulo 1.

c) Perpendicular a $u = (-3, 4)$ y de módulo 5.

a) Un vector perpendicular a $\vec{u} = (2, 1)$ es $\vec{v} = (1, 2)$.

Para obtener el vector de módulo 2, multiplicamos por 2 y dividimos entre el módulo del vector v .

$$\vec{w} = \frac{2(1, 2)}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = f \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}} p$$

b) Un vector perpendicular a $\vec{u} = (3, 1)$ es $\vec{v} = (-1, 3)$.

Para obtener el vector de módulo 1, dividimos entre el módulo del vector v .

$$\vec{w} = \frac{(-1, 3)}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2}} = f \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}} p$$

c) Un vector perpendicular a $\vec{u} = (-3, 4)$ es $\vec{v} = (4, 3)$.

Para obtener el vector de módulo 5, multiplicamos por 5 y dividimos entre el módulo del vector v .

$$\vec{w} = \frac{5(4, 3)}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = (4, 3)$$

35 Comprueba que los vértices $A(2, 1)$, $B(5, 4)$, $C(4, 5)$ y $D(1, 2)$ forman un rectángulo.

Para comprobar que es un rectángulo, vamos a estudiar cómo son los vectores entre sí.

$$\vec{AB} = (3, 3)$$

$$\vec{CD} = (-3, -3)$$

$$\vec{BC} = (-1, 1)$$

$$\vec{AD} = (-1, 1)$$

$\vec{AB}$ es paralelo a $\vec{CD}$; BC es paralelo a AD ; a su vez, $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$ son perpendiculares a BC y AD .

Por tanto, se trata de un rectángulo. No es un cuadrado porque los módulos de los vectores son distintos.

36 Divide el segmento AB en tres partes iguales.

a) $A(-2, 3)$ y $B(0, -1)$

b) $A(1, 1)$ y $B(3, 6)$

a) $\vec{AB} = (2, -4)$

$$\begin{aligned} P_1 &= A + \frac{1}{3}\vec{AB} = (-2, 3) + \frac{1}{3}(2, -4) \\ &= e \frac{4}{3}, \frac{5}{3}o \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2 &= A + \frac{2}{3}\vec{AB} = (-2, 3) + \frac{2}{3}(2, -4) \\ &= e \frac{2}{3}, \frac{1}{3}o \end{aligned}$$

b) $\vec{AB} = (2, 5)$

$$\begin{aligned} P_1 &= A + \frac{1}{3}\vec{AB} = (1, 1) + \frac{1}{3}(2, 5) = \\ &= e \frac{5}{3}, \frac{8}{3}o \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2 &= A + \frac{2}{3}\vec{AB} = (1, 1) + \frac{2}{3}(2, 5) = \\ &= e \frac{7}{3}, \frac{13}{3}o \end{aligned}$$

- 37 Comprueba si los puntos A , B y C están alineados.

a) $A(-2, 0)$, $B(1, -1)$ y $C(-5, -1)$

b) $A(0, 0)$, $B(3, -1)$ y $C(2, -2)$

a) $\vec{AB} = (3, -1)$ $\vec{AC} = (-3, -1)$
No están alineados, pues $\frac{3}{-3} \neq \frac{-1}{-1}$.

b) $\vec{AB} = (3, -1)$ $\vec{AC} = (2, -2)$
No están alineados, pues $\frac{3}{2} \neq \frac{-1}{-2}$.

- 38 Halla todas las ecuaciones de la recta que pasa por $O(0, 0)$:

a) Y pasa también por el punto $A(-5, 2)$.

b) Y tiene pendiente $m = -2$.

c) Y tiene como vector director $d = (2, -1)$.

d) Y pasa por el punto medio del segmento definido por $A(3, 4)$ y $B(5, 2)$.

a) El vector director $\vec{d} = (5, 2)$ y pasa por el punto O .

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 5t \\ y = 2t \end{cases}$

b) Ecuación punto-pendiente: $y = -2x$

c) $\vec{d} = (2, -1)$ $m = -\frac{1}{2}$ $y = -\frac{1}{2}x$

d) Hallamos el punto medio.

$M = \left(\frac{3+5}{2}, \frac{4+2}{2} \right) = (4, 3)$

El vector director de la recta es $\vec{OM} = (4, 3)$.

Por tanto $\frac{x}{4} = \frac{y}{3}$ $3x - 4y = 0$.

- 39 Determina la ecuación de la recta paralela a $r: 3x - y - 3 = 0$ que pasa por el punto $P(0, -4)$.

El vector director $\vec{d} = (1, 3)$.

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = t \\ y = -4 + 3t \end{cases}$

- 40 Halla la recta s paralela a $r: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{4}$

que está a 2 unidades de distancia.

La ecuación de la recta s es $3y + 6 = 0$

Un punto de la recta r es $(1, 1)$.

$$d(P, s) = \frac{|4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + C|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|1 + C|}{5} = 2$$

$$C_1 = 9, C_2 = -11$$

Hay dos rectas que cumplen las condiciones.

$s_1: 4x - 3y + 9 = 0$

$s_2: 4x - 3y - 11 = 0$

- 41 Determina la ecuación de la recta perpendicular a $r: 3x - y - 3 = 0$ que pasa por el punto $P(0, -4)$.

El vector perpendicular al vector director de r es $(3, -1)$

Ecuación continua:

$$\frac{x}{3} = \frac{y+4}{-1}$$

- 42 Halla la ecuación de la recta que pasa por $P(0, 1)$ y forma un ángulo de 45° con $r: x + y - 1 = 0$.

El vector director de la recta r es $(-1, 1)$.

La recta que hay que hallar tiene pendiente m y pasa por el punto $(0, 1)$. Por tanto:

$y - 1 = m(x - 0)$ $mx - y = 1 - 0$

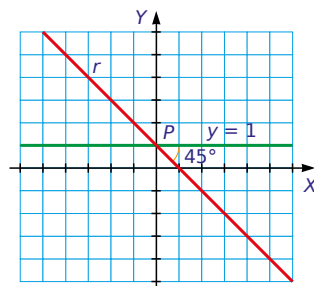
El vector director de esta recta es $(1, m)$.

Aplicamos la definición de producto escalar a los dos vectores directores.

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(-1) \cdot 1 + 1 \cdot m}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + m^2}} = \frac{m-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+m^2}}$$

$m-1 = \sqrt{1+m^2}$ $m=0$

Por tanto, la recta que buscamos es $y = 1$.



Si representamos gráficamente el resultado, observamos que también la recta $x = 0$ cumple los requisitos.

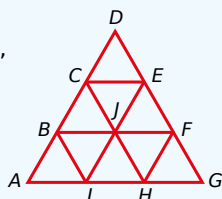
ACTIVIDADES FINALES

1. Conoce y maneja las operaciones con vectores

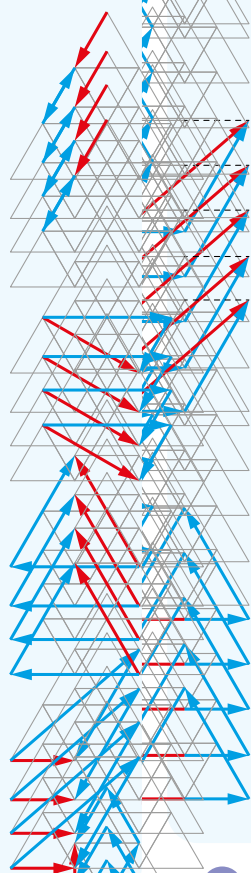
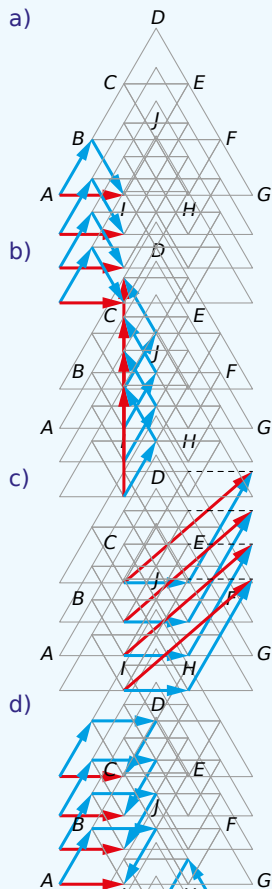


ACTIVIDADES FLASH

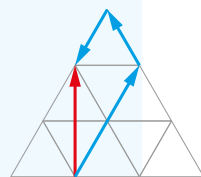
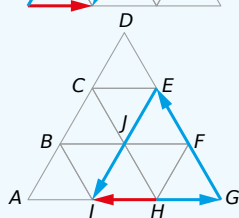
- 43 A la vista de la siguiente figura, realiza las operaciones indicadas.



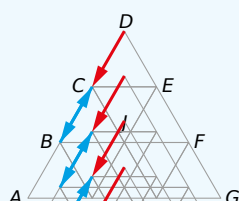
- a) $\vec{AB} + \vec{BI}$
 b) $\vec{BC} - \vec{EF}$
 c) $\vec{IH} + 2\vec{BC}$
 d) $\vec{AB} + \vec{JF} - \vec{DC}$
 e) $\vec{HG} - 2\vec{CJ} + 2\vec{CB}$
 f) $\vec{AB} + 2\vec{DC}$
 g) $\vec{BF} - \vec{JE}$
 h) $2\vec{HI} + 2\vec{CD}$
 i) $\vec{AE} - \vec{AC}$
 j) $\vec{IE} + \vec{IB} - \vec{BC}$



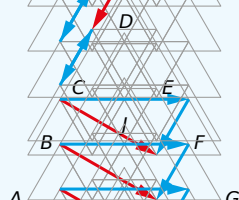
e)



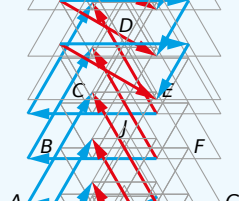
f)



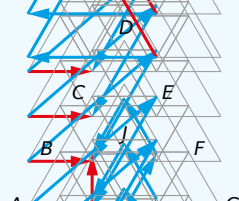
g)



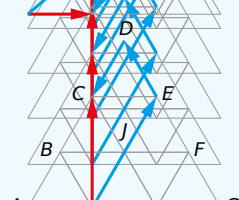
h)



i)



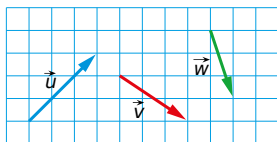
j)



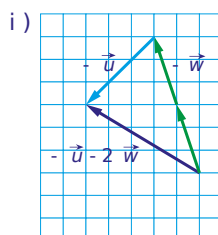
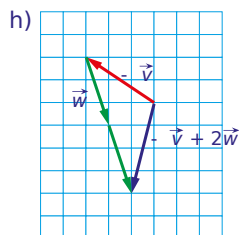
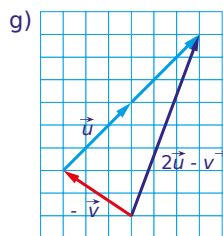
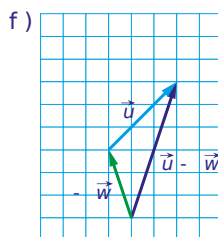
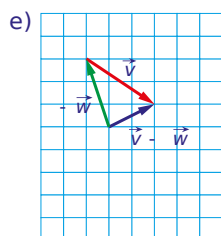
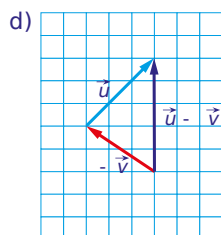
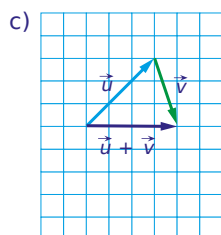
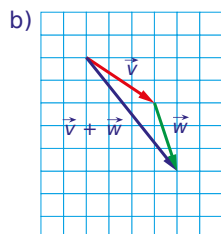
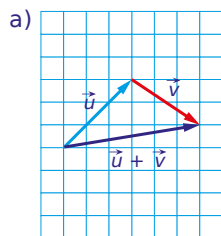
44



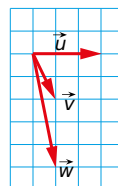
Realiza gráficamente estas operaciones.



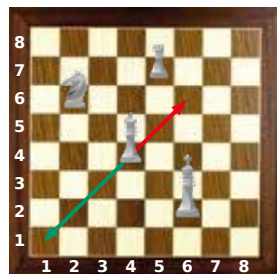
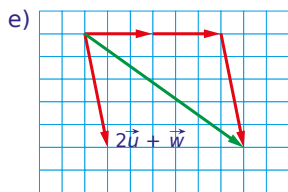
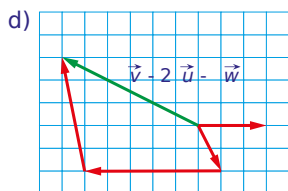
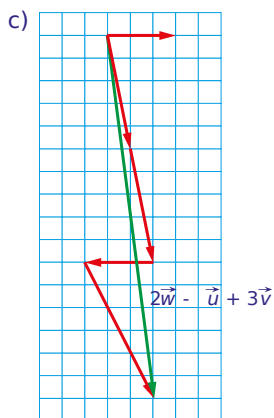
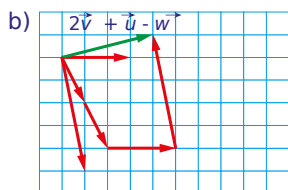
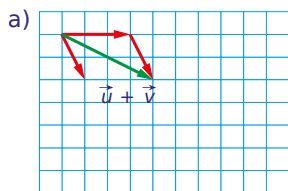
- a) $\vec{u} + \vec{v}$ d) $\vec{u} - \vec{v}$ g) $2\vec{u} - \vec{v}$
 b) $\vec{v} + \vec{w}$ e) $\vec{v} - \vec{w}$ h) $-\vec{v} + 2\vec{w}$
 c) $\vec{u} + \vec{w}$ f) $\vec{u} - \vec{w}$ i) $-\vec{u} - 2\vec{w}$



45 Realiza las operaciones con vectores gráficamente.



- a) $\vec{u} + \vec{v}$
 b) $2\vec{v} + \vec{u}$ $\vec{w}$
 c) $2\vec{w} - \vec{u}$ $3\vec{v}$
 d) $\vec{v} - 2\vec{u}$ $\vec{w}$
 e) $2\vec{u} + \vec{w}$



Así, el alfil blanco que está colocado en la posición (4, 4), para pasar a la posición (6, 6), se desplaza dos cuadrículas hacia la derecha y dos hacia arriba.

$$(6, 6) - (4, 4) = (2, 2)$$

Describe estos movimientos:

- El rey que está en la posición (6, 2) se desplaza a la posición (7, 3).
 - El rey se desplaza 1 cuadrado hacia la izquierda y 1 hacia arriba.
 - El caballo se desplaza a la posición (4, 7).
 - La torre se desplaza dos cuadraditos hacia la izquierda.
- $(7, 3) - (6, 2) = (1, 1)$
 - $(6, 2) + (-1, 1) = (5, 3)$
 - $(4, 7) - (2, 6) = (2, 1)$
 - $(5, 7) + (-2, 0) = (3, 7)$

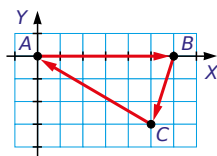
- 47 Dados los puntos $A(3, 7)$, $B(4, 9)$, $C(-4, 3)$ y $D(4, 9)$, ¿son paralelos los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$?

Los vectores $\overrightarrow{AB} = (1, 2)$ y $\overrightarrow{CD} = (8, 6)$ no son proporcionales puesto que $\frac{1}{8} \neq \frac{2}{6}$; por tanto, no son paralelos.

- 48 **INVESTIGA.** Dibuja un diagrama para demostrar que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$. Formula un resultado similar para cualquier número de puntos.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$$

$$B - A + C - B = C - A = \vec{0}$$



Siempre se van a anular los puntos dos a dos.



46 MATEMÁTICAS Y... AJEDREZ.

- Para describir el movimiento de una pieza de ajedrez podemos indicar el número de cuadrados que se desplaza hacia la derecha y hacia arriba. Si el desplazamiento fuese hacia la izquierda o hacia abajo, se indicará con números negativos.

- 49 Si (4, 2) es el punto medio del segmento de extremos (x, 4) y (3, y), ¿cuánto vale $x + y$?

Aplicamos la fórmula del punto medio.

$$(4, 2) = \left(\frac{x + 3, 4 + y}{2} \right) \Rightarrow x = 5$$

$$\Rightarrow y = 0 \Rightarrow x + y = 5$$

- 50 Calcula las coordenadas del punto B de forma que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{AB}$ sean equipolentes, sabiendo que $u = (2, -3)$ y $A(-1, 2)$.

$$B(x, y) \Rightarrow \vec{AB} = (x - (-1), y - 2) = (2, -3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 2 \\ y - 2 = -3 \end{cases} \Rightarrow B = (1, -1)$$

- 51 INVENTA. Escribe dos valores distintos para A y B tales que $\vec{AB} = (3, -1)$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$A(1, 5) \text{ y } B(4, 4)$$

$$A(0, -3) \text{ y } B(3, -4)$$

- 52 Expresa el vector $\vec{u} = (7, 6)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{a} = (6, -3)$ y $\vec{b} = (-1, 3)$.

$$(7, 6) = a(6, -3) + b(-1, 3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7 = 6a - b \\ 6 = -3a + 3b \end{cases} \Rightarrow a = \frac{27}{15}, b = \frac{19}{5}$$

- 53 Comprueba si los vectores $\vec{u} = (-1, -3)$ y $\vec{v} = (4, 2)$ forman una base y, si es así, halla las coordenadas de los siguientes vectores respecto de ella.

a) $\vec{a} = (2, 1)$

b) $\vec{b} = (3, -1)$

c) $\vec{c} = (-2, 3)$

Forman una base, pues $\frac{-1}{4} \neq \frac{-3}{2}$.

a) $(2, 1) = a(-1, -3) + b(4, 2)$

$$\begin{cases} 2 = -a + 4b \\ 1 = -3a + 2b \end{cases} \Rightarrow a = 0, b = \frac{1}{2}$$

b) $(3, -1) = a(-1, -3) + b(4, 2)$

$$\begin{cases} 3 = -a + 4b \\ -1 = -3a + 2b \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = 1$$

c) $(-2, 3) = a(-1, -3) + b(4, 2)$

$$\begin{cases} -2 = -a + 4b \\ 3 = -3a + 2b \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{8}{5}, b = -\frac{9}{10}$$

- 54 INVENTA. Para cada punto medio del segmento AB, indica dos posibles valores de los puntos A y B.

a) $M(0, 0)$ c) $M(-1, -4)$

b) $M(1, 3)$ d) $M(2, -5)$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $A(1, -1)$ y $B(-1, 1)$

b) $A(2, -1)$ y $B(0, 7)$

c) $A(3, 5)$ y $B(-5, -13)$

d) $A(0, 3)$ y $B(4, -13)$

- 55 Si el punto medio del segmento AB es $M(3, 5)$, dado $A(9, 7)$, calcula el punto B. Luego, obtén A con $M(-1, 5)$ y $B(4, -9)$.

Sea $B(x, y)$.

$$(3, 5) = \left(\frac{9 + x}{2}, \frac{7 + y}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 = \frac{9 + x}{2} \\ 5 = \frac{7 + y}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow B(-3, 3)$$

Sea $A(x, y)$.

$$(-1, 5) = \left(\frac{4 + x}{2}, \frac{-9 + y}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 = \frac{4 + x}{2} \\ 5 = \frac{-9 + y}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = 19 \end{cases} \Rightarrow A(-6, 19)$$

- 56 Dos vértices consecutivos de un cuadrado son $A(-2, 3)$ y $B(1, -2)$. Si sus dos diagonales se cortan en $P(2, 2)$, calcula los dos vértices que faltan.

Sean C y D los vértices que faltan, C el opuesto a A y D el opuesto a B.

$$P = \left(\frac{A + C}{2} \right)$$

$$\Rightarrow C = 2P - A = (4, 4) - (-2, 3) = (6, 1)$$

$$P = \left(\frac{B + D}{2} \right)$$

$$\Rightarrow D = 2P - B = (4, 4) - (1, -2) = (3, 6)$$

- 57 Calcula las coordenadas de los puntos que dividen el segmento de extremos $A(5, -1)$ y $B(17, 8)$ en tres partes iguales.

Sean P y Q los puntos buscados.

$$P = A + \frac{\overrightarrow{AB}}{3} = (5, -1) + \frac{12}{3}, \frac{9}{3} = (9, 2)$$

$$Q = A + \frac{2\overrightarrow{AB}}{3} = (5, -1) + \frac{24}{3}, \frac{18}{3} = (13, 5)$$

- 58 Determina el valor de k para que los puntos $A(2, -3)$, $B(9, k)$ y $C(6, -1)$ estén alineados.

Los vectores paralelos han de ser proporcionales.

$$\overrightarrow{AB} = (7, k+3) \quad \overrightarrow{AC} = (4, 2)$$

$$\frac{7}{4} = \frac{k+3}{2} \quad k = \frac{1}{2}$$

- 59 En el segmento BC marca los puntos D y E que lo dividan en tres segmentos iguales. ¿Cuánto vale k si $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BE} = k\overrightarrow{BC}$?

Sea $x = BD$. Entonces se cumple que $BE = 2x$ y $BC = 3x$

$$BD^2 + BE^2 = k \cdot BC^2$$

$$x^2 + (2x)^2 = k(3x)^2 \quad 5x^2 = 9kx^2$$

$$5 = 9k \quad k = \frac{5}{9}$$

Tomamos el punto A como origen, por lo que obtenemos las siguientes coordenadas: $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, 1)$ y $D(0, 1)$.

a) $\overrightarrow{AB} = (1, 0)$, $\overrightarrow{BC} = (0, 1)$
 $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$

b) $\overrightarrow{AC} = (1, 1)$, $\overrightarrow{DB} = (1, -1)$
 $(1, 1) + (1, -1) = (2, 0)$

c) $\overrightarrow{AD} = (0, 1)$, $\overrightarrow{CB} = (0, -1)$
 $(0, 1) + (0, -1) = (0, 0)$

d) $\overrightarrow{AC} = (1, 1)$, $\overrightarrow{CB} = (0, -1)$
 $(1, 1) + (0, -1) = (1, 0)$

- 61 Si $\vec{u} = (3, 1)$ y $\vec{v} = (2, -1)$, calcula.

a) $\vec{u} + \vec{v}$ c) $(2\vec{u} + 3\vec{v}) + \vec{v}$

b) $\vec{u} + 2\vec{v}$ d) $\vec{u} + (\vec{u} - \vec{v})$

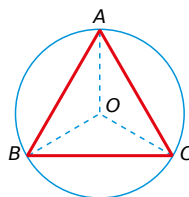
a) $\vec{u} + \vec{v} = (3, 1) + (2, -1) = 5$

b) $\vec{u} + 2\vec{v} = (3, 1) + (4, -2) = 12 - 2 = 10$

c) $(2\vec{u} + 3\vec{v}) + \vec{v} = ((6, 2) + (6, -3)) + (2, -1) = (12, -1) + (2, -1) = 24 - 1 = 25$

d) $\vec{u} + (\vec{u} - \vec{v}) = (3, 1) + ((3, 1) + (-2, 1)) = (3, 1) + (1, 2) = 3 + 2 = 5$

- 62 El siguiente triángulo equilátero está inscrito en una circunferencia de radio 5 cm.



Calcula los siguientes productos escalares.

a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$

a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos \alpha = 25 \cdot \cos(-120^\circ) = -12,5$

b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OC}| \cdot \cos \alpha = 25 \cdot \cos 120^\circ = -12,5$

2. Conoce y maneja el producto escalar de dos vectores y sus propiedades

ACTIVIDADES FLASH

- 60 Considera que A , B , C y D son los vértices consecutivos de un cuadrado de lado 1 cm. Calcula los siguientes productos escalares.

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$

c) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB}$

d) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$

- 63** Calcula el valor de t para que $\vec{u} \perp \vec{v}$ si $\vec{u} = (-1, 2)$ y $\vec{v} = (3, t)$. Halla el módulo de los dos vectores.

$$(-1, 2) \cdot (3, t) = 0 \quad -3 + 2t = 0 \quad t = 1.5$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 1.5^2} = \sqrt{5.25}$$

3. Normaliza vectores y estudia la ortogonalidad de los vectores



ACTIVIDADES FLASH

- 64** Calcula los vectores unitarios con la misma dirección que estos vectores cuyo módulo es 5.

a) $\vec{u} = (3, 4)$

b) $\vec{u} = (4, -3)$

c) $\vec{u} = (\sqrt{10}, \sqrt{15})$

d) $\vec{u} = (-2\sqrt{6}, -1)$

Para hallar el vector unitario solo hay que dividir el vector por su módulo.

a) $\vec{u} = \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$

b) $\vec{u} = \frac{4}{5}, -\frac{3}{5}$

c) $\vec{u} = \frac{\sqrt{10}}{5}, \frac{\sqrt{15}}{5}$

d) $\vec{u} = \frac{-2\sqrt{6}}{5}, -\frac{1}{5}$

- 65** Calcula un vector perpendicular a cada vector.

a) $\vec{u} = (1, 3)$ d) $\vec{u} = (3, 0)$

b) $\vec{u} = (2, -5)$ e) $\vec{u} = (\sqrt{2}, 1)$

c) $\vec{u} = (0, 2)$ f) $\vec{u} = (1, 2)$

Para ser perpendiculares, su producto escalar ha de ser cero: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

a) $\vec{v} = (3, 1)$ d) $\vec{v} = (0, 3)$

b) $\vec{v} = (5, 2)$ e) $\vec{v} = (-1, \sqrt{2})$

c) $\vec{v} = (1, 0)$ f) $\vec{v} = (2, 1)$

- 66** Decide si los siguientes vectores son perpendiculares o paralelos entre sí.

a) $\vec{a} = (-2, 4)$ y $\vec{b} = (3, 2)$

b) $\vec{c} = (4, -3)$ y $\vec{d} = (6, 8)$

a) $\frac{-2}{3} = \frac{4}{2} \quad -4 \neq 12$

" No son paralelos.

$(-2, 4) \cdot (3, 2) = -6 + 8 = 2$

" No son perpendiculares.

b) $\frac{4}{6} = \frac{-3}{8} \quad 32 \neq -18$

" No son paralelos.

$(4, -3) \cdot (6, 8) = 24 - 24 = 0$

" Son perpendiculares.

- 67** Encuentra un vector perpendicular a $\vec{u} = (-3, 2)$ con módulo 2.

Un vector perpendicular a $\vec{u}$ es $(2, 3)$.

Para que tenga módulo 2, multiplicamos por 2 y dividimos entre el módulo de v .

$$\vec{w} = \frac{2(2, 3)}{\sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{13}}, \frac{6}{\sqrt{13}}$$

- 68** Demuestra que el cuadrilátero formado por los puntos $A(2, -2), B(5, 3), C(0, 6)$ y $D(-3, 1)$ es un cuadrado.

Comprobamos que los lados son perpendiculares.

$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$

" $(3, 5) \cdot (-5, 3) = 0$

$\vec{BC} \cdot \vec{CD} = 0$

" $(-5, 3) \cdot (-3, 5) = 0$

$\vec{BC} \cdot \vec{AB} = 0$

" $(-5, 3) \cdot (3, 5) = 0$

$\vec{CD} \cdot \vec{AD} = 0$

" $(-3, 5) \cdot (-5, 3) = 0$

Comprobamos si son iguales los módulos de los vectores que conforman los lados.

$|\vec{AB}| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$

$|\vec{AD}| = \sqrt{(-5)^2 + 3^2} = \sqrt{34}$

$|\vec{BC}| = \sqrt{(-5)^2 + 3^2} = \sqrt{34}$

$|\vec{CD}| = \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$

Por tanto, el cuadrilátero $ABCD$ es un cuadrado.

- 69 Calcula el valor de k para que los vectores sean perpendiculares entre sí.

a) $\vec{u} = (2, k), \vec{v} = (1, -6)$

b) $\vec{u} = (2, -3), \vec{v} = (1, k)$

c) $\vec{u} = e^{\frac{1}{3}}, \frac{2}{5} \vec{v} = (k, -1)$

d) $\vec{u} = e^{\frac{2}{3}}, k \vec{v} = (5, -1)$

a) $(2, k) \cdot (1, -6) = 2 - 6k = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{3}$

b) $(2, -3) \cdot (1, k) = 2 - 3k = 0 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$

c) $e^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{2}{5} \cdot (k, -1) = \frac{1}{3} k - \frac{2}{5} = 0 \Rightarrow k = \frac{6}{5}$

d) $e^{\frac{2}{3}} \cdot k \cdot (5, -1) = \frac{10}{3} k - k = 0 \Rightarrow k = -\frac{10}{3}$

- 70 Halla m para que $\vec{v} = (7, -2)$ y $\vec{w} = (m, 6)$:

a) Sean perpendiculares.

b) Sean paralelos.

c) Tengan el mismo módulo.

a) $(7, -2) \cdot (m, 6) = 7m - 12 = 0 \Rightarrow$

$m = \frac{12}{7}$

b) $\frac{7}{m} = \frac{-2}{6} \Rightarrow m = -21$

c) $|\vec{v}| = \sqrt{7^2 + (-2)^2} = \sqrt{53}$

$|\vec{w}| = \sqrt{m^2 + 6^2}$

$53 = m^2 + 36 \Rightarrow m = \sqrt{17}$

- 71 Dados $\vec{a} = (6, -2)$ y $\vec{b} = (16, 12)$, calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u} = m\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{v} = m\vec{a} - \vec{b}$ sean perpendiculares. ¿Hay una solución única?

$\vec{u} = m(6, -2) + (16, 12) = (16 + 6m, 12 - 2m)$

$\vec{v} = m(6, -2) - (16, 12) = (-16 + 6m, -12 - 2m)$

Para que los vectores sean perpendiculares, su producto escalar debe ser cero.

$(16 + 6m, 12 - 2m) \cdot (-16 + 6m, -12 - 2m) = 36m^2 - 256 + 4m^2 - 144 = 0$

$m = \pm \sqrt{10}$

La solución no es única.

4. Calcula el producto escalar, el módulo y el coseno del ángulo

- 72 Halla el perímetro de un triángulo cuyos vértices están situados en los puntos $A(1, 2)$, $B(3, 2)$ y $C(-1, 3)$.

Calculamos los vectores $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ y $\vec{CA}$.

$\vec{AB} = (2, 0)$, $\vec{BC} = (-4, 1)$ y $\vec{CA} = (2, -1)$

Hallamos el módulo de los vectores.

$|\vec{AB}| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$

$|\vec{BC}| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}$

$|\vec{CA}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

El perímetro mide:

$2 + \sqrt{17} + \sqrt{5} = 8,36 \text{ u}$

- 73 Calcula el ángulo que forma cada uno de los siguientes pares de vectores.

a) $\vec{a} = (0, -2)$ y $\vec{b} = (-4, -3)$

b) $\vec{a} = e^{\frac{1}{3}}, 5$ y $\vec{b} = (3, -1)$

c) $\vec{a} = (-4, -3)$ y $\vec{b} = (1, 1)$

d) $\vec{a} = 1, -\sqrt{3}j$ y $\vec{b} = 1, \sqrt{3}j$

a) $\cos a = \frac{(0, -2) \cdot (-4, -3)}{2 \cdot 5} = \frac{3}{5}$

$a = 30,68^\circ$

b) $\cos a = \frac{e^{\frac{1}{3}} \cdot 5 + (3, -1) \cdot (1, -1)}{\sqrt{\frac{226}{9}} \cdot \sqrt{10}} = \frac{-12}{\sqrt{2260}}$

$a = 255,38^\circ$

c) $\cos a = \frac{(-4, -3) \cdot (1, 1)}{5\sqrt{2}} = \frac{-7}{5\sqrt{2}}$

$a = 188,13^\circ$

d) $\cos a = \frac{1 \cdot 1 + (-\sqrt{3}j) \cdot (\sqrt{3}j)}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}$

$a = 120^\circ$

- 74** Halla el valor de k para que los vectores $\vec{a} = (2, -3)$ y $\vec{b} = (1, k)$ formen un ángulo de 120° .

$$\cos 120^\circ = \frac{2 - 3k}{\sqrt{1 + k^2} \sqrt{13}}$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{2 - 3k}{\sqrt{1 + k^2} \sqrt{13}}$$

$$k = \frac{24 + 13\sqrt{3}}{23}$$

- 75** Encuentra un vector $\vec{a}$ que forme un ángulo de 30° con $\vec{b} = (3, -4)$ y tal que $|\vec{a}| = \sqrt{3}$ y $|\vec{b}|$.

Sea $\vec{a} = (x, y)$ el vector pedido.

$$\cos 30^\circ = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\sqrt{3} |\vec{b}|^2} =$$

$$= \frac{3x - 4y}{\sqrt{3} (3^2 + 4^2)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$6x - 8y = 75$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{3} |\vec{b}| \quad \sqrt{x^2 + y^2} = 5\sqrt{3}$$

$$x^2 + y^2 = 75$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones que hemos obtenido.

$$6x - 8y = 75 \quad x = \frac{75 + 8y}{6}$$

$$x^2 + y^2 = 75$$

$$e \frac{75 + 8y}{6} + y^2 = 75$$

$$4y^2 + 48y + 117 = 0$$

$$y_1 = \frac{-12 - 3\sqrt{3}}{2} \quad x_1 = \frac{9 + 4\sqrt{3}}{2}$$

$$y_2 = \frac{-12 + 3\sqrt{3}}{2} \quad x_2 = \frac{9 - 4\sqrt{3}}{2}$$

Los vectores solución son:

$$\vec{a}_1 = \left(\frac{9 + 4\sqrt{3}}{2}, -6 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\vec{a}_2 = \left(\frac{9 - 4\sqrt{3}}{2}, -6 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right)$$

- 76** Halla m y n para que los vectores $\vec{u} = (3, m)$ y $\vec{v} = (n, -1)$ sean perpendiculares y se verifique que $|\vec{u}| = 5$.

$$(3, m) \cdot (n, -1) = 3n - m = 0$$

$$\sqrt{3^2 + m^2} = 5 \quad 9 + m^2 = 25$$

$$m^2 = 16 \quad m_1 = 4 \quad n_1 = \frac{4}{3}$$

$$m_2 = -4 \quad n_2 = -\frac{4}{3}$$

- 77** Determina si el triángulo de vértices $A(12, 10)$, $B(20, 16)$ y $C(8, 32)$ es rectángulo.

Calculamos los vectores formados por los vértices del triángulo.

$$\vec{AB} = (8, 6), \vec{BC} = (-12, 16)$$

$$\text{y } \vec{AC} = (-4, 22)$$

Hallamos los módulos de los vectores.

$$|\vec{AB}| = \sqrt{64 + 36} = 10u$$

$$|\vec{BC}| = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20u$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{16 + 484} = \sqrt{500}u$$

Si el triángulo es rectángulo, debe verificar el teorema de Pitágoras.

$$|\vec{AC}|^2 = |\vec{AB}|^2 + |\vec{BC}|^2$$

$$10^2 + 20^2 = 500$$

Luego el triángulo es rectángulo.

- 78** Demuestra que los puntos $A(3, -2)$, $B(9, 6)$ y $C(10, 5)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

$$\vec{AB} = (6, 8)$$

$$\vec{BC} = (1, -1)$$

$$\vec{AC} = (7, 7)$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{BC} = -7 = 0$$

" $\vec{AC}$ y $\vec{BC}$ son perpendiculares.

- 79 INVESTIGA.** Tres de los vértices de un paralelogramo son $A(2, 1)$, $B(6, -1)$ y $C(7, 1)$. ¿Cuáles son las posibles coordenadas del otro vértice?

Sea $D(a, b)$.

$$\vec{AB} = \vec{DC} \quad (4, -2) = (7 - a, 1 - b)$$

$$D(3, 3)$$

$$\vec{AC} = \vec{DB} \quad (5, 0) = (6 - a, 1 - b)$$

$$D(1, -1)$$

$$\vec{AC} = \vec{BD} \quad (5, 0) = (a - 6, b + 1)$$

$$D(11, -1)$$

80 Dados los vectores $\vec{a} = (1, 5)$

... y $\vec{b} = (-4, -3)$, calcula.

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ y $\vec{b} \cdot \vec{a}$

b) $|\vec{a}|$; $|\vec{b}|$

c) El ángulo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

d) El valor de k para que el vector $(3, k)$ sea perpendicular al vector $\vec{a}$.

e) El valor de k para que el vector $(k, -1)$ sea paralelo al vector $\vec{b}$.

f) Un vector perpendicular al vector $\vec{b}$.

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = (1, 5) \cdot (-4, -3) = 19$

b) $|\vec{a}| = \sqrt{26}$ $|\vec{b}| = 5$

c) $\cos \alpha = \frac{-19}{5\sqrt{26}}$ $\alpha = 138.18^\circ$

d) $(3, k) \cdot (1, 5) = 0$ $5k = 0$ $k = -\frac{3}{5}$

e) $\frac{k}{-4} = \frac{-1}{-3}$ $k = -\frac{4}{3}$

f) Respuesta abierta. Por ejemplo:

Un vector perpendicular a $\vec{b}$ es

$\vec{c} = (3, -4)$

81 INVESTIGA. ¿Qué condiciones tienen que cumplir los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para que $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0$?

Con este resultado, demuestra que, si un paralelogramo tiene las diagonales perpendiculares, solo puede ser un cuadrado o un rombo.

$$\begin{aligned} (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) &= \\ = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} &= \\ = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = 0 \quad |\vec{u}| = |\vec{v}| \end{aligned}$$

Por tanto, los vectores miden lo mismo.

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son los lados de un paralelogramo, $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ son sus diagonales. Por tanto, si las diagonales son perpendiculares entre sí, los módulos miden lo mismo, por lo que solo puede ser un cuadrado o un rombo.

82 Demuestra que el triángulo de vértices $A(3, 1)$, $B(9, -1)$ y $C(5, -5)$ es isósceles. ¿Cuáles son sus lados iguales? Calcula su área.

Hallamos los vectores formados por los vértices del triángulo.

$\vec{AB} = (6, -2)$, $\vec{BC} = (-4, -4)$

y $\vec{AC} = (2, -6)$

Calculamos los módulos de los vectores.

$|\vec{AB}| = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}u$

$|\vec{BC}| = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32}u$

$|\vec{AC}| = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40}u$

Como el triángulo tiene dos lados iguales, AB y AC , es un triángulo isósceles.

Calculamos la altura, h , sobre el lado BC aplicando el teorema de Pitágoras.

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{(\sqrt{40})^2 - \left(\frac{\sqrt{32}}{2}\right)^2} = \sqrt{40 - 8} \\ &= \sqrt{32}u \end{aligned}$$

$$A = \frac{B \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{32} \cdot \sqrt{32}}{2} = 16u^2$$

83 Dos vértices de un triángulo equilátero son $A(3, 1)$ y $B(5, -2)$. Calcula cuáles pueden ser las coordenadas del vértice que falta.

$\vec{AB} = (2, -3)$

La recta que pasa por el tercer vértice, $C(x, y)$, y por el punto medio de A y B tiene como vector director $\vec{d} = (3, 2)$. El punto

medio del vector $\vec{AB}$ es $\left(\frac{3+5}{2}, \frac{1-2}{2}\right) = (4, -\frac{1}{2})$. Así,

esta recta tiene como ecuación:

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y+\frac{1}{2}}{2} \quad 4x-6y-19=0$$

Además, el módulo de $\vec{AC}$ es igual que el módulo de $\vec{AB}$.

$$\sqrt{13} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2}$$

$$x^2 - 6x + y^2 - 2y - 3 = 0$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$c_x = \frac{19+6c_y}{4}$$

$$c_x^2 - 6c_x + c_y^2 - 2c_y - 3 = 0$$

$$x_1 = 4 - \frac{3\sqrt{3}}{2}, y_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{3}$$

$$x_2 = 4 + \frac{3\sqrt{3}}{2}, y_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{3}$$

Serían las posibles coordenadas del punto C .