REPASO TEMA 5 - NÚMEROS COMPLEJOS

ENTREGA ANTES DEL VIERNES 13-01-2025

Entrega los siguientes ejercicios del libro resueltos:

Página 134: 49

49 Calcula el valor de a para que el número $\frac{2-3ai}{3+4i}$:

a) Sea un número real.

b) Sea un número imaginario puro.

c) Tenga su afijo en la bisectriz del tercer cuadrante.

$$\frac{2-3ai}{3+4i}\cdot\frac{3-4i}{3-4i}=\frac{(6-12a)-(8+9a)i}{25}$$

a) $8 + 9a = 0 \quad \rightarrow \quad a = -8/9$

b) $6 - 12a = 0 \rightarrow a = \frac{1}{2}$

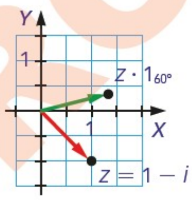
c) $6 - 12a = -8 - 9a \rightarrow a = \frac{14}{3}$

Página 135: 72, 73 y 74

72 Se representa el número complejo $5_{20°}$ y se efectúa un giro de 40°. ¿En qué número complejo se convierte?

$5_{20°}\cdot 1_{40°} = 5_{60°}$

73 Representa el número complejo $1 - i$ y realiza en este punto un giro de 60° centrado en el origen. Expresa el número resultante en forma binómica y polar.



$1 - i = \sqrt{2}_{315°}$

$\sqrt{2}_{315°}\cdot 1_{60°} = \sqrt{2}_{15°} = 1{,}37 + 0{,}37i$

74 Sea el número complejo $z = 3 + 4i$, halla las coordenadas de los afijos de los números complejos que se obtienen al aplicarle a z las siguientes transformaciones.

a) Un giro con centro el origen y amplitud 90°.

b) Una simetría respecto del eje de abscisas.

c) Una simetría respecto del origen de coordenadas.

d) Un giro con centro el origen y amplitud 60°.

$z = 5_{53,13°}$

a) $5_{53,13°}\cdot 1_{90°} = 5_{143,13°} = -4 + 3i \rightarrow (-4, 3)$

b) El conjugado es el simétrico respecto del eje de abscisas: $\overline{z} = 3 - 4i \rightarrow (3, -4)$

c) El opuesto es el simétrico respecto del origen: $-z = -3 - 4i \rightarrow (-3, -4)$

d) $5_{53,13°}\cdot 1_{60°} = 5_{113,13°} = -1{,}96 + 4{,}6i \rightarrow$ $\rightarrow (-1{,}96; 4{,}6)$

Página 136: 95 y 97

95 Realiza las siguientes divisiones de números complejos.

a) $(5+2i):(2i)$

b) $\dfrac{5}{2+4i}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}i}$

d) $\dfrac{-1+5i}{3-2i}$

e) $\dfrac{-1+5i}{2-i}$

f) $\dfrac{6_{\pi}}{2_{\frac{\pi}{4}}}$

g) $\dfrac{8_{170^\circ}}{2_{50^\circ}}$

h) $\dfrac{7_{\frac{2\pi}{3}}}{5_{\frac{5\pi}{2}}}$

i) $\dfrac{1_{80^\circ}}{\sqrt{2}_{30^\circ}}$

a) $\dfrac{5+2i}{2i}\cdot\dfrac{-2i}{-2i}=\dfrac{-10i+4}{4}=\dfrac{-5i+2}{2}$

b) $\dfrac{5}{2+4i}\cdot\dfrac{2-4i}{2-4i}=\dfrac{10-20i}{20}=\dfrac{1-2i}{2}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}i}\cdot\dfrac{1-\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i}=\dfrac{\sqrt{2}-2i}{3}$

d) $\dfrac{-1+5i}{3-2i}\cdot\dfrac{3+2i}{3+2i}=$

$=\dfrac{-3-2i+15i-10}{9+4}=$

$=-1+i$

e) $\dfrac{-1+5i}{2-i}\cdot\dfrac{2+i}{2+i}=\dfrac{-2-i+10i-5}{4+1}=$

$=\dfrac{-7+9i}{5}$

f) $3_{\frac{3\pi}{4}}$

g) 4_{120°

h) $\dfrac{7}{5}_{\frac{\pi}{6}}$

i) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}_{50^\circ}$

97 Si $z=2-2i$ y $w=1+i$, calcula:

a) $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{w}$

b) $\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{w}$

c) $\dfrac{1}{z+w}$

d) $\dfrac{1}{z-w}$

e) $\dfrac{z+w}{z-w}$

f) $\dfrac{z-w}{z+w}$

a) $\dfrac{1}{2-2i}+\dfrac{1}{1+i}=\dfrac{2+2i}{8}+\dfrac{1-i}{2}=$

$=\dfrac{2+2i+4-4i}{8}=\dfrac{3-i}{4}$

b) $\dfrac{1}{2-2i}-\dfrac{1}{1+i}=\dfrac{2+2i}{8}-\dfrac{1-i}{2}=$

$=\dfrac{2+2i-4+4i}{8}=\dfrac{-1+3i}{4}$

c) $\dfrac{1}{3-i}=\dfrac{3+i}{10}$

d) $\dfrac{1}{1-3i}=\dfrac{1+3i}{10}$

e) $\dfrac{3-i}{1-3i}\cdot\dfrac{1+3i}{1+3i}=\dfrac{6+8i}{10}=\dfrac{3+4i}{5}$

f) $\dfrac{1-3i}{3-i}\cdot\dfrac{3+i}{3+i}=\dfrac{6-8i}{10}=\dfrac{3-4i}{5}$

Página 137: 107 y 118

107 Resuelve la ecuación

$$\frac{xi}{1+3i} - \frac{2x}{4-i} = 1.$$

$xi(4-i) - 2x(1+3i) = (1+3i)(4-i) \rightarrow$
$\rightarrow x(4i + 1 - 2 - 6i) = 7 + 11i \rightarrow$
$\rightarrow x = \frac{7+11i}{-1-2i} \cdot \frac{-1+2i}{-1+2i} = \frac{-29+3i}{5}$

118 Simplifica esta expresión:

$$\left(\frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i}\right)^5.$$

$$\left(\frac{(1+i)^2}{2} - \frac{(1-i)^2}{2}\right)^5 = (2i)^5 = 32i$$

Página 138: 157

157 Resuelve en los números complejos las ecuaciones.

a) $z^2 - 2z - 2 + 4i = 0$

b) $z^4 + (4-2i)z^2 - 8i = 0$

c) $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$

a) $z = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-2+4i)}}{2} =$
$= 1 \pm \sqrt{3-4i} =$
$= 1 \pm \sqrt{5_{306,87°}} =$
$= 1 \pm (-2+i)$
$z_1 = -1 + i \qquad z_2 = 3 - i$

b) $t^2 + (4-2i)t - 9i = 0 \rightarrow$
$\rightarrow t = \frac{-4+2i \pm \sqrt{12+16i}}{2} =$
$= -2 + i \pm \sqrt{3+4i} =$
$= -2 + i \pm \sqrt{5_{53,13°}} =$
$= -2 + i \pm (-2-i)$
$t_1 = 2i \qquad t_2 = -4$

$z_1 = \sqrt{2}_{\frac{90°}{2}} = 1 + i$

$z_2 = \sqrt{2}_{\frac{90°+360°}{2}} = -1 - i$

$z_3 = \sqrt{4}_{\frac{180°}{2}} = 2i$

$z_4 = \sqrt{4}_{\frac{180°+360°}{2}} = -2i$

c) $t^2 + 10t + 169 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow t = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 676}}{2} =$$

$$= -5 \pm 12i$$

$t_1 = -5 + 12i \quad t_2 = -5 - 12i$

$z_1 = \sqrt{13}_{56,31°} = 2 + 3i$

$z_2 = \sqrt{13}_{236,31°} = -2 - 3i$

$z_3 = \sqrt{13}_{123,69°} = -2 + 3i$

$z_4 = \sqrt{13}_{303,69°} = 2 - 3i$

Ejercicio: Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt[4]{\frac{81}{i}}$ b) $\sqrt[5]{32(\cos 105° + i sen 105°)}$ c) $\sqrt[3]{\frac{3+i}{1-i}}$ d) $\sqrt{\frac{3+i}{i^3} - (2+i)^2 i^5}$

a) $$\sqrt[4]{\frac{81}{i}} = \sqrt[4]{\frac{81i}{i^2}} = \sqrt[4]{-81i} = \sqrt[4]{81_{270°}} = \begin{cases} 3_{67,5°} = 3\cdot(\cos 67,5° + i sen 67,5°) \\ 3_{157,5°} = 3\cdot(\cos 157,5° + i sen 157,5°) \\ 3_{247,5°} = 3\cdot(\cos 247,5° + i sen 247,5°) \\ 3_{337,5°} = 3\cdot(\cos 337,5° + i sen 337,5°) \end{cases}$$

b) $$\sqrt[5]{32_{105°}} = \begin{cases} 2_{21°} = 2\cdot(\cos 21° + i\, sen\, 21°) \\ 2_{93°} = 2\cdot(\cos 93° + i\, sen\, 93°) \\ 2_{165°} = 3\cdot(\cos 165° + i\, sen\, 165°) \\ 2_{237°} = 3\cdot(\cos 237° + i\, sen\, 237°) \\ 2_{309°} = 3\cdot(\cos 309° + i\, sen\, 309°) \end{cases}$$

c) $$\sqrt[3]{\frac{3+i}{1-i}} = \sqrt[3]{\frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}} = \sqrt[3]{\frac{3+3i+i+i^2}{1-i^2}} = \sqrt[3]{\frac{2+4i}{2}} = \sqrt[3]{1+2i} = \sqrt[3]{\sqrt{5}_{63,435°}} = \begin{cases} \sqrt[6]{5}_{21,145°} \\ \sqrt[6]{5}_{141,145°} \\ \sqrt[6]{5}_{261,145°} \end{cases}$$

d) $$\sqrt{\frac{3+i}{i^3} - (2+i)^2 i^5} = \sqrt{\frac{3+i}{-i} - (2^2 + i^2 + 4i)i} = \sqrt{\frac{(3+i)i}{-i \cdot i} - (4i + i^3 + 4i^2)} = \sqrt{3i - 1 - 4i + i + 4} = \pm\sqrt{3}$$

2) Sea z_1 = 3 + 4i un número complejo cuyo afijo es uno de los vértices de un triángulo equilátero de centro (0,0). Halla los números complejos de los afijos de los otros dos vértices.

Pasamos z_1 a polar y le aplicamos un giro de 360º/3 con centro en el origen:

$$z_1=3+4i=5_{53,13^o} \rightarrow z_2=z_1\cdot 1_{120^o}=5_{53,13^o}\cdot 1_{120^o}=5_{173,13^o} \quad y \quad z_3=z_1\cdot 1_{-120^o}=5_{53,13^o}\cdot 1_{-120^o}=5_{-66,87^o}$$

Los otros dos vértices son: $z_2=5(\cos 173,13^o+i\,sen\,173,13^o)=-4,96+0.6i$

$$z_3=5(\cos(-66,87^o)+i\,sen(-66,87^o))=1,96-4.6i$$