

## ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

1.- Sea  $\alpha$  un ángulo del primer cuadrante, sin hallar el ángulo calcula:

- Si  $\operatorname{tg} \alpha = 2/5$  halla  $\operatorname{tg}(\pi/2 - \alpha)$ ,  $\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$ ,  $\operatorname{tg}(\pi/2 + \alpha)$ ,  $\operatorname{tg}(\pi + \alpha)$ ,  $\operatorname{tg}(-\alpha)$  y  $\operatorname{tg}(3\pi/2 - \alpha)$ .
- Si  $\operatorname{sen} \alpha = 3/4$  halla  $\operatorname{sen}(\pi/2 - \alpha)$ ,  $\operatorname{sen}(\pi - \alpha)$ ,  $\operatorname{sen}(\pi/2 + \alpha)$ ,  $\operatorname{sen}(\pi + \alpha)$ ,  $\operatorname{sen}(-\alpha)$ ,  $\operatorname{sen}(3\pi/2 - \alpha)$  y  $\operatorname{sen}(3\pi/2 + \alpha)$
- Si  $\cos \alpha = 2/3$  halla  $\cos(\pi/2 - \alpha)$ ,  $\cos(\pi - \alpha)$ ,  $\cos(\pi/2 + \alpha)$ ,  $\cos(\pi + \alpha)$ ,  $\cos(-\alpha)$ ,  $\cos(3\pi/2 - \alpha)$  y  $\cos(3\pi/2 + \alpha)$ .

2. Sabiendo que  $\operatorname{sen} \alpha = 1/4$ , halla  $\operatorname{sen}(2\alpha)$ ,  $\cos(2\alpha)$  y  $\operatorname{tg}(2\alpha)$  sin calcular el ángulo  $\alpha$ .

3. Sabiendo que  $\cos \alpha = 0,35$ , halla  $\operatorname{sen}(\alpha/2)$ ,  $\cos(\alpha/2)$  y  $\operatorname{tg}(\alpha/2)$  sin calcular el ángulo  $\alpha$ .

4. Dado a un ángulo del  $3^{\circ}$  cuadrante tal que  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$  halla las razones trigonométricas del ángulo  $2\alpha$ .

5. Sabiendo que  $\operatorname{tg}(2\alpha) = 3$ , halla  $\operatorname{sen} \alpha$  y  $\cos \alpha$ , sabiendo que  $\alpha < 90^{\circ}$ . ¿De qué ángulo  $\alpha$  se trata?

6. Comprueba si son ciertas las siguientes igualdades:

$$\text{a) } \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \sec \alpha} - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 - \sec \alpha} = \frac{2}{\operatorname{sen} \alpha} \quad \text{b) } \frac{\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} = 2 \operatorname{tg} \alpha \quad \text{c) } \frac{\sec^4 \alpha - 1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \sec^2 \alpha + 1$$

$$\text{d) } \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha} = \frac{\cos \alpha \cdot (\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha)}{1 - 2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha} \quad \text{e) } \frac{2 \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha + 1}{\cos \alpha} = 3 \cos \alpha$$

$$\text{f) } \frac{\cos \alpha}{1 - \operatorname{sen} \alpha} - \frac{1 + \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = 0 \quad \text{g) } \frac{\operatorname{cosec} \alpha - \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha} - \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{cosec} \alpha} = 0 \quad \text{h) } \frac{\sec \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{\sec \alpha + 1}{\operatorname{sen}^2 \alpha}$$

$$\text{i) } (\sec \alpha - \operatorname{tg} \alpha)(\operatorname{cosec} \alpha + 1) = \operatorname{ctg} \alpha \quad \text{j) } (\operatorname{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = \operatorname{sen}^4 \alpha - \cos^4 \alpha$$

7. Demostrar las siguientes identidades:

$$\text{a) } \frac{1 - \cos 2\alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos 2\alpha} = 2 \operatorname{tg}^2 \alpha \quad \text{b) } \operatorname{sen} 2\alpha \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos 2\alpha = \operatorname{sen} \alpha$$

$$\text{c) } 1 - \operatorname{sen} \alpha = \left( \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right)^2 \quad \text{d) } \cos(2\alpha) + 2 \operatorname{sen}^2 \alpha = 1$$

$$\text{e) } \frac{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen}(2\alpha)}{1 + \cos \alpha + \cos(2\alpha)} = \operatorname{tg} \alpha \quad \text{f) } \left( \frac{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{sen} \alpha} - 2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) \cdot \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos \alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha} - \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{2}$$

8. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

$$\text{a) } \cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{b) } \operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2}$$

$$\text{c) } \operatorname{sen} x - 2 \cos 2x = -1/2$$

$$\text{d) } \operatorname{sen} x \cos x = 1/2$$

$$\text{e) } \operatorname{sen} 2x = \cos x$$

$$\text{f) } 3 \operatorname{sen} x + \cos x = 1$$

## TEMA 4 TRIGONOMETRÍA

## EJERCICIOS REPASO

g)  $2\cos^2x - \sin^2x + 1 = 0$

h)  $\sin^2x - \sin x = 0$

i)  $2\cos^2x - \sqrt{3}\cos x = 0$

9. Resuelve las ecuaciones trigonométricas:

a)  $\cos\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

b)  $\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

c)  $\tan\left(\pi-\frac{x}{2}\right)=-1$

d)  $\sin 2x = 2\cos x$

e)  $\sin 4x = \sin 2x$

f)  $\sin x = 1 + 2\cos 2x$

g)  $\sec x + \tan x = 0$

h)  $6\cos^2(x/2) + \cos x = 1$

10. Resuelve los sistemas de ecuaciones trigonométricas, siendo x e y ángulos agudos:

a) 
$$\begin{cases} \sin^2 x + 2\cos^2 y = \frac{3}{2} \\ \cos^2 x - 2\sin^2 y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ \cos 2x + \sin^2 y = \frac{5}{4} \end{cases}$$

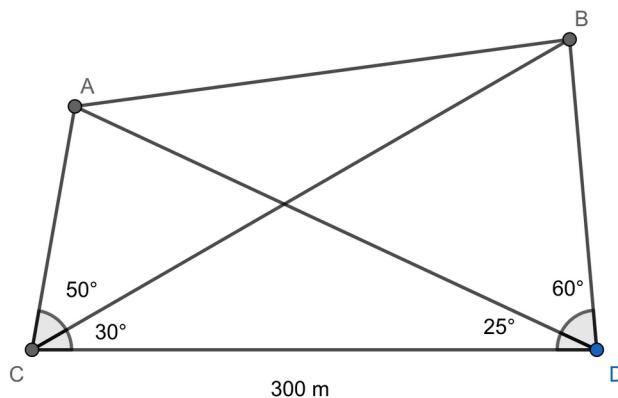
c) 
$$\begin{cases} \sin x + \sin^2 y = 1 \\ \cos(2x) - \sin^2 y = 0 \end{cases}$$

## RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

11. Calcula los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita a un octágono de lado 10 cm.

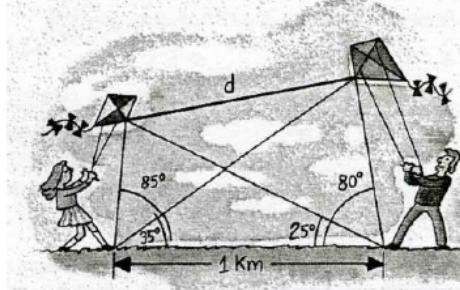
12. En un trapecio isósceles conocemos la diagonal, que mide 22,5 cm, el lado oblicuo que mide 7,5 cm, y el ángulo que este forma con la base mayor, que es  $60^\circ$ . Halla el área del trapecio.

13.- Sean A y B dos puntos inaccesibles y C y D desde los que se observa A y B con los ángulos  $ACB=50^\circ$ ,  $BCD=30^\circ$   $ADC=25^\circ$   $BDA=60^\circ$ . Calcula AB.



14. Desde dos puntos A y B , situados en una orilla de un río , se ve un punto C al que no podemos llegar. Si la distancia de A a B es de 50 m y los ángulos CAB y CBA miden  $85^\circ 20'$  y  $32^\circ 35'$  respectivamente, ¿qué distancia hay entre C y A?

15. ¿A qué distancia se encuentran las cometas?



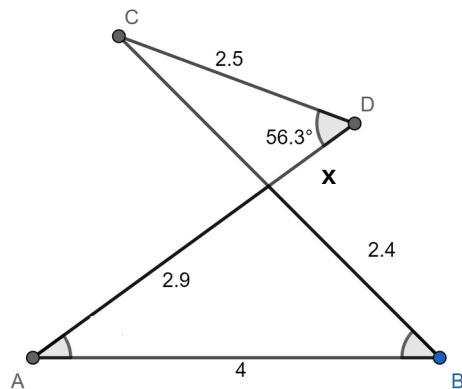
## TEMA 4 TRIGONOMETRÍA

## EJERCICIOS REPASO

16. En un entrenamiento de la selección española de fútbol, Ansu Fati coloca el balón en un punto que está a 5 m y 8 m respectivamente de cada uno de los postes de la portería, cuyo ancho es de 7,32 m, para lanzar a puerta. Además, Unai Simón se coloca en el borde de la portería y enfrente del balón. ¿Bajo qué ángulo ve Ansu Fati los dos bordes de la portería desde el punto de tiro? ¿A qué distancia está Unai Simón del balón?

17. Calcular la superficie de un heptágono regular inscrito en una circunferencia de diámetro  $d = 20$  cm.

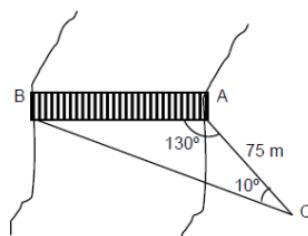
18. Con los datos de la figura calcula x:



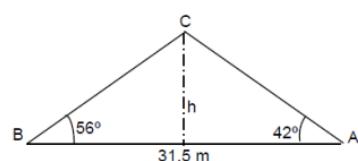
19. Un grupo decide escalar una montaña de la que desconocen la altura. A la salida del pueblo han medido el ángulo de elevación, que resulta ser  $30^\circ$ . A continuación han avanzado 100 m hacia la base de la montaña y han vuelto a medir el ángulo de elevación, siendo ahora  $45^\circ$ . Calcular la altura de la montaña.

20. Rosa y Juan se encuentran a ambos lados de la orilla de un río, en los puntos A y B respectivamente. Rosa se aleja hasta un punto C distante 100 m del punto A desde la que dirige visuales a los puntos A y B que forman un ángulo de  $20^\circ$  y desde A ve los puntos C y B bajo un ángulo de  $120^\circ$ . ¿Cuál es la anchura del río?

21. Se quiere tender un puente desde A hasta B. El observador se desplaza desde B hasta un punto cualquiera C y mide los datos que aparecen en la figura. Calcula la longitud del puente.



22. Un río tiene las dos orillas paralelas. Desde los puntos A y B de una orilla se observa un punto de la orilla opuesta. Las visuales con la dirección de la orilla unos ángulos de  $42^\circ$  y  $56^\circ$  respectivamente. Calcular la anchura del río sabiendo que la distancia AB es 31,5 m.

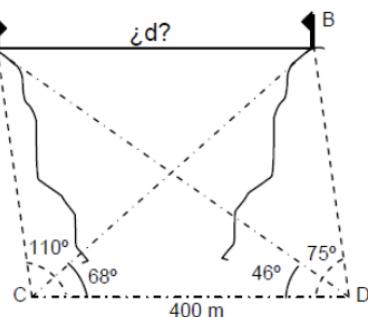


## TEMA 4 TRIGONOMETRÍA

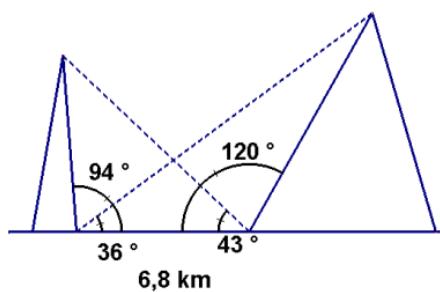
## EJERCICIOS REPASO

23. Se desea calcular la distancia entre dos cimas de montañas con objeto de construir un teleférico. Desde el valle se obtiene por medición directa los datos que aparecen en la figura.

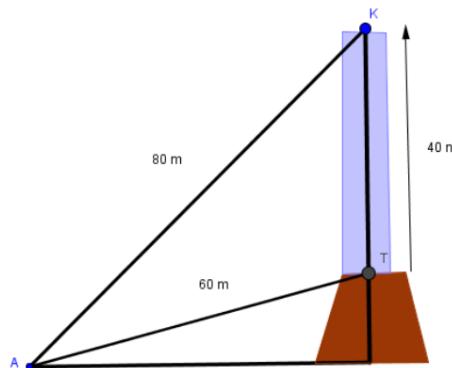
Calcular la distancia AB.



24. Dos montañeros han ascendido en fines de semana sucesivos a dos picos, A y B, y querrán saber la distancia entre dichos picos. Para ello han medido desde las bases de las montañas los ángulos indicados en la figura. Sabiendo que la distancia entre las bases dichas es de 6800m, ¿qué distancia hay entre los picos?



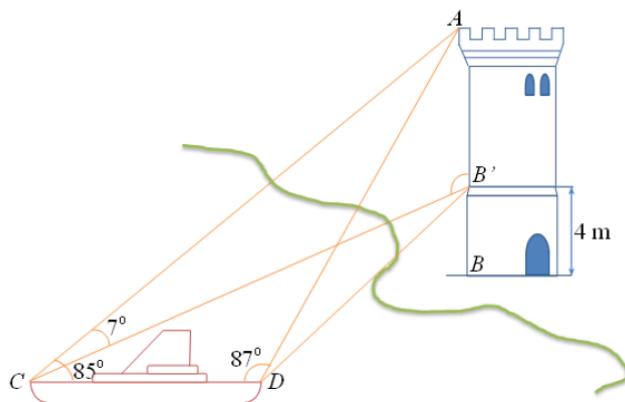
25. Un faro tiene 40 m de altura, hallándose situado sobre una roca. Situados en un punto A de la playa, hemos comprobado que la distancia que hay hasta la base del faro es 60 m, y la distancia que le separa de la cúpula del faro es 80 m. Hállese la altura de la roca sobre la que se encuentra el faro.



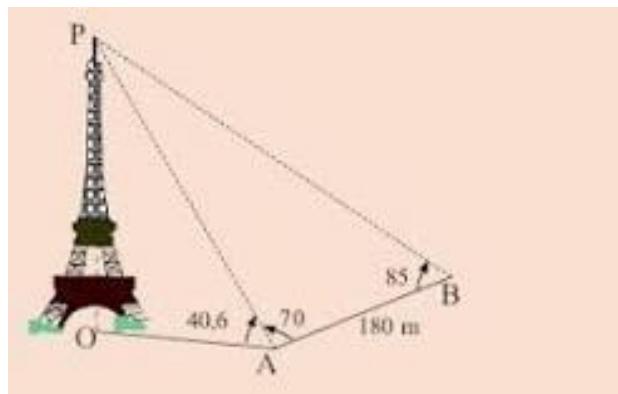
### Altura de un punto de pie inaccesible desde un terreno horizontal con obstáculos.

26. Desde un barco fondeado frente a la costa se desea calcular la altura AB de una torre. Para ello, desde la proa C, a 4 metros sobre el nivel del mar, se mide el ángulo de elevación de A:  $7^\circ$ , y  $\angle ACD=85^\circ$ . Así mismo, desde la popa D, también a 4 metros sobre el nivel del mar, se mide el ángulo  $\angle ACD=87^\circ$  (ver figura). Si la distancia entre la proa y la popa es  $CD=60$  metros, calcula la altura de la torre.

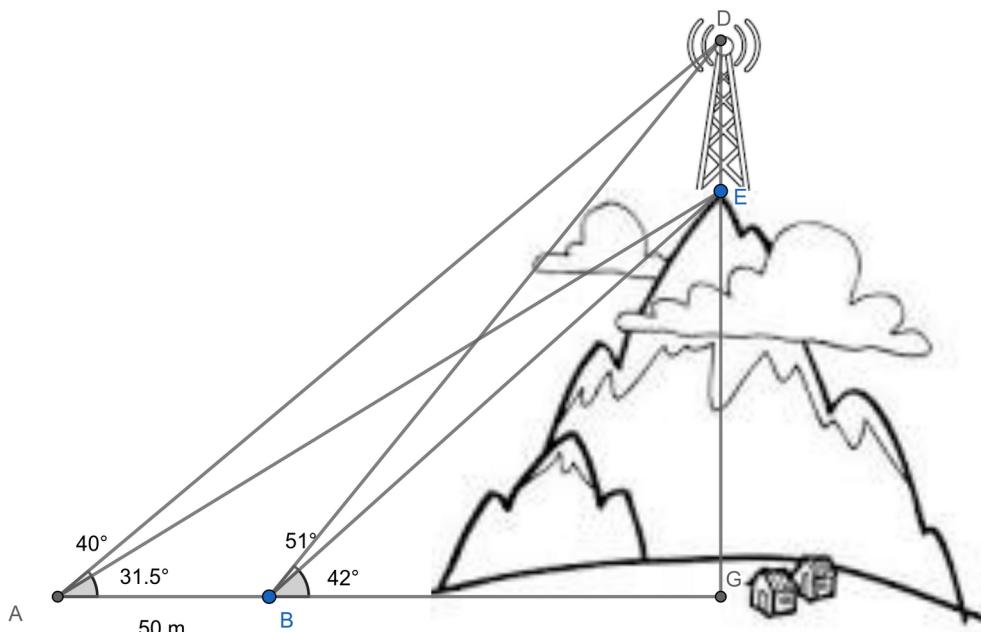
NOTA: Ángulo  $\angle AB'C$  recto



27. Para calcular la altura de la torre Eiffel sin acceder hasta su base, una persona efectúa las medidas de los ángulos del dibujo en dos puntos A y B separados 180 m. ¿Cuánto mide la altura OP de la torre Eiffel?

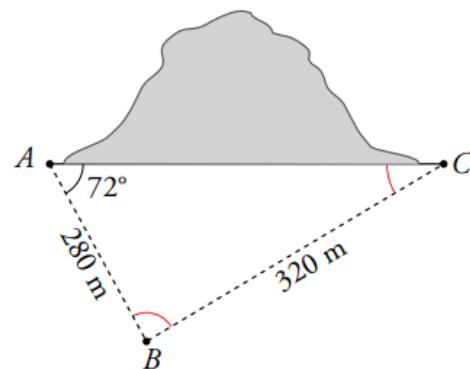


28. Desde un punto se observa el pie y la punta de una torre de televisión situada sobre una montaña bajo ángulos de **42°** y **51°**, respectivamente. Si retrocedemos **50m**, los ángulos de observación son **31,5°** y **40°**. Calcula la altura de la torre.



PISTA: Calcula primero la altura total DG y la distancia BG con los ángulos de  $40^\circ$  y  $51^\circ$

29. Para construir un túnel entre A y C necesitamos saber su longitud y dirección. Para ello, fijamos un punto B y tomamos las medidas indicadas en la figura. Calcula  $\overline{AC}$  y los ángulos  $\hat{B}$  y  $\hat{C}$ .



30. Repite el problema anterior siendo el ángulo  $\hat{A}=30^\circ$ ,  $\overline{AB}=500\text{ m}$  y  $\overline{BC}=360\text{ m}$ .