12 Las distribuciones binomial y normal

ACTIVIDADES INICIALES

12.I. Calcula la media, la varianza y la desviación típica de la variable *X*, cuya distribución de frecuencias viene dada por la siguiente tabla:

x_i	1	2	4	5
f_i	3	5	8	4

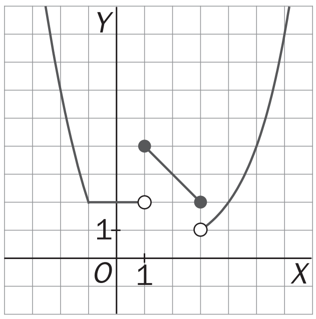
La media es $\overline{x} = \dfrac{1\cdot 3 + 2\cdot 5 + 4\cdot 8 + 5\cdot 4}{20} = 3{,}25$.

La varianza es $s^2 = \dfrac{1^2\cdot 3 + 2^2\cdot 5 + 4^2\cdot 8 + 5^2\cdot 4}{20} - (3{,}25)^2 = 1{,}9875$.

La desviación típica es, por tanto, $s = \sqrt{1{,}9875} = 1{,}41$.

12.II. Representa la siguiente función a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si} \quad x < -1 \\ 2 & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ -x + 5 & \text{si} \quad 1 \le x \le 3 \\ 2^{x-3} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$



EJERCICIOS PROPUESTOS

12.1. Se lanza tres veces una moneda y se define la variable aleatoria *X*, que asigna a cada elemento del espacio muestral el número de cruces.

a)¿Qué tipo de variable es?

b)¿Cuál es su recorrido?

a) *X* es una variable aleatoria discreta.

b) Su recorrido es el conjunto {0, 1, 2}.

12.2. El tiempo máximo de espera en una parada de metro es de 5 minutos. Se considera la variable aleatoria *X*, que asigna a una persona el tiempo que tiene que esperar en esta parada a que llegue el metro.

a) ¿Qué tipo de variable es?

b) ¿Cuál es su recorrido?

a) *X* es una variable aleatoria continua

b) Su recorrido es el intervalo [0, 5] (en minutos).

12.3. Se extraen sin reemplazamiento dos bolas de una urna que contiene dos bolas blancas y una negra. Determina la función de probabilidad de la variable *X* =”número de bolas blancas extraídas”. Calcula la media y la varianza de esta variable.

El número de bolas blancas extraídas es uno o dos, así que:

$P(X = 1) = P(\text{una bola blanca}) = P(\text{blanca y negra}) + P(\text{negra y blanca}) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

$P(X = 2) = P(\text{dos bolas blancas}) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

La media de esta variable es:

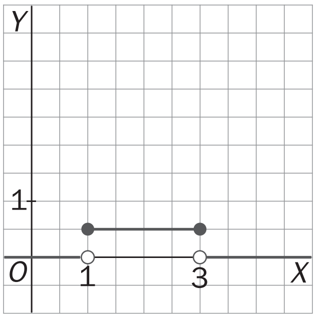
$$\mu = 1\cdot\frac{2}{3}+2\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

La varianza es:

$$\sigma^2 = 1^2\cdot\frac{2}{3}+2^2\cdot\frac{1}{3}-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{6}{3}-\frac{16}{9}=\frac{2}{9}$$

12.4. Representa la siguiente función y determina si es una función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5 & \text{si } 1 \le x \le 3 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$



Sí es función de densidad, ya que siempre $f(x) \ge 0$, y el área encerrada con el eje *X* es 1.

12.5. El Ayuntamiento de una ciudad ha comprobado que el 23% de los ciudadanos acude a las piscinas municipales. Si se escoge al azar una muestra de 15 personas de esa ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que ninguna de ellas haya acudido a las piscinas municipales?

La variable *X*, que cuenta el número de personas que han utilizado en alguna ocasión los polideportivos municipales, sigue una distribución binomial $B(15;\ 0{,}23)$. Por tanto:

$P(X = 0) = \binom{15}{0}(0{,}23)^0\,(0{,}77)^{15} = 0{,}0198$

12.6. En un concurso de tiro, la probabilidad de que un hombre acierte en el blanco es de $\frac{1}{3}$. Si dispara 12 veces, ¿cuál es la probabilidad de que acierte exactamente en cinco ocasiones? ¿Y de que acierte al menos una vez?

La variable *X* cuenta el número de aciertos en el blanco, y sigue una distribución binomial $B\left(12;\frac{1}{3}\right)$. Por tanto:

$$P(X=5)=\binom{12}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^7=0{,}1908$$

$$P(X\ge 1)=1-P(X=0)=1-\binom{12}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^{12}=0{,}9923$$

12.7. Una variable *X* sigue una distribución normal de media 5 y desviación típica 1,2. Calcula las siguientes probabilidades.

a) $P(X \le 4)$ **b) $P(3{,}5 \le X \le 4{,}5)$**

La variable *X* dada sigue una distribución *N*(5; 1,2). Se construye una nueva variable *Z* que sigue una *N*(0, 1).

El cambio de variable es $Z = \dfrac{X-5}{1{,}2}$

a) $P(X \le 4) = P\left(Z \le \dfrac{4-5}{1{,}2}\right) = P(Z \le -0{,}83) = P(Z \ge 0{,}83) = 1 - P(Z \le 0{,}83) = 0{,}2023$

b) $P(3{,}5 \le X \le 4{,}5) = P\left(\dfrac{3{,}5-5}{1{,}2} \le Z \le \dfrac{4{,}5-5}{1{,}2}\right) = P(-1{,}25 \le Z \le -0{,}42) = P(Z < -0{,}42) - P(Z < -1{,}25) =$

$= [1 - P(Z < 0{,}42)] - [1 - P(Z < 1{,}25)] = 0{,}2328$

12.8. (PAU) En una panadería se cortan panecillos con un peso que se ajusta a una distribución normal de media 100 gramos y desviación típica 9 gramos. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un panecillo cuyo peso oscile entre 80 gramos y la media?

Se denota por *X* el peso de un panecillo. *X* sigue una distribución *N*(100, 9), que se transforma en una *N*(0, 1) mediante el cambio de variable $Z = \dfrac{X-100}{9}$. Por tanto:

$$P(80 \le X \le 100) = P\left(\frac{80-100}{9} \le Z \le \frac{100-100}{9}\right) = P(-2{,}22 \le Z \le 0) = P(Z \le 0) - P(Z \le -2{,}22) =$$

$$= P(Z \le 0) - (1 - P(Z \le 2{,}22)) = 0{,}5 - 1 + 0{,}9868 = 0{,}4868$$

12.9. La probabilidad de acierto en tiros libres de un jugador de baloncesto es del 87%. Si realiza 50 lanzamientos, calcula la probabilidad de que:

a) Acierte exactamente 45 tiros. **b) Como mínimo meta 42 canastas.**

La variable "número de aciertos en 50 tiros libres" sigue una distribución *B*(50; 0,87). No obstante, dado que $np = 50 \cdot 0{,}87 = 43{,}5 > 5$ y $nq = 50(1 - 0{,}87) = 6{,}5 > 5$, se puede aproximar por una normal

$X = N(np, \sqrt{npq}) = N(43{,}5; 2{,}55)$.

Mediante el cambio de variable $Z = \dfrac{X-43{,}5}{2{,}55}$, *X* se transforma en una *N*(0, 1). Por último, dado que *X* es una variable continua y el número de aciertos es una variable discreta, se considerarán los valores exactos *n* como intervalos ($n - 0{,}5$; $n + 0{,}5$).

a) $P(44{,}5 \le X \le 45{,}5) = P\left(\dfrac{44{,}5-43{,}5}{2{,}55} \le Z \le \dfrac{45{,}5-43{,}5}{2{,}55}\right) = P(0{,}39 \le Z \le 0{,}78) = P(Z \le 0{,}78) - P(Z \le 0{,}39) =$

$= P(Z \le 0{,}78) - P(Z \le 0{,}39) = 0{,}7823 - 0{,}6517 = 0{,}1306$

b) $P(42{,}5 \le X) = P\left(\dfrac{42{,}5-43{,}5}{2{,}55} \le Z\right) = P(-0{,}39 \le Z) = 1 - P(Z \le -0{,}39) = 1 - (1 - P(Z \le 0{,}39)) = 0{,}6517$

12.10. En un examen tipo test de 250 preguntas de opción múltiple, cada pregunta tiene cinco posibles respuestas, de las que solo una es correcta. Si una persona contesta al azar, calcula la probabilidad de que conteste correctamente más de 50 preguntas, pero menos de 55.

La variable *X* = "número de respuestas acertadas" sigue una binomial *B*(250; 0,2) que se puede aproximar por una $N(250 \cdot 0{,}2; \sqrt{250 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}) = N(50; 6{,}32)$, ya que $np = 250 \cdot 0{,}2 = 50 > 5$ y $n(1 - p) = 250 \cdot 0{,}8 = 200 > 5$.

Mediante el cambio de variable $Z = \dfrac{X-50}{6{,}32}$, *X* se transforma en una *N*(0, 1).

Por último, dado que *X* es una variable continua y el número de respuestas acertadas es una variable discreta, se considerarán los valores exactos *n* como intervalos ($n - 0{,}5$; $n + 0{,}5$).

$$P(50 \le X \le 55) = P\left(\frac{49{,}5-50}{6{,}32} \le Z \le \frac{55{,}5-50}{6{,}32}\right) = P(-0{,}079 \le Z \le 0{,}87) = P(Z \le 0{,}87) - P(Z \le -0{,}079) =$$

$$= P(Z \le 0{,}78) - (1 - P(Z \le 0{,}079)) = 0{,}7823 - 1 + 0{,}5319 = 0{,}3142$$

EJERCICIOS

Distribuciones discretas

12.11. La distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta viene dada por:

X	1	2	3	4
P	0,35	0,25	*m*	0,2

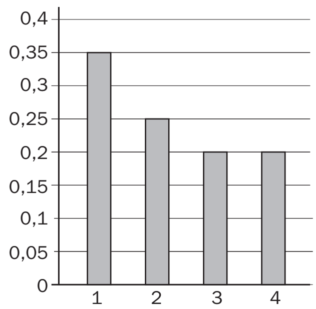
a) Halla *m* para que se trate de una función de probabilidad.

b) Representa gráficamente la función de probabilidad.

c) Halla *P*(*X* ≤ 4) y *P*(2 ≤ *X* < 4).

a) $m = 1 - 0{,}35 - 0{,}25 - 0{,}2 = 0{,}2$, puesto que las probabilidades deben sumar 1.

b)



c) $P(X \le 4) = 1$, $P(2 \le X \le 4) = 0{,}25 + 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}85$

12.12. Una variable aleatoria *X* toma valores en los puntos 1, 2, 3,…, *n*, y la ley de probabilidad es

$$P(X = n) = \frac{k}{2^n}.$$

a) Determina *k*.

b) Obtén la media.

a) Hay que imponer que $\sum_{i=1}^{n} P(X = i) = 1$. Desarrollando la suma se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{k}{2^i} = k\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = k\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1 \Rightarrow k = \frac{2^n}{2^n - 1}$$

b) La media es $\mu = \sum_{i=1}^{n} i \cdot P(X = i)$. Desarrollando la suma se obtiene:

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} \cdot \frac{2^n}{2^n - 1} = \frac{2^n}{2^n - 1} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} = \frac{2^n}{2^n - 1} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^n}\right) = \frac{2^n}{2^n - 1} \cdot \frac{2^{n+1} - n + 2}{2^n} = \frac{2^{n+1} - n + 2}{2^n - 1}$$

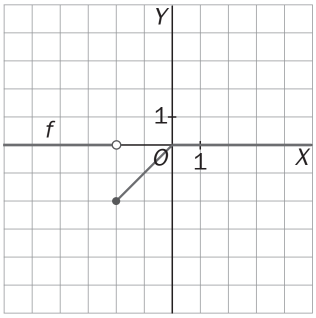
Distribuciones continuas

12.13. Representa las siguientes funciones e indica si son funciones de densidad.

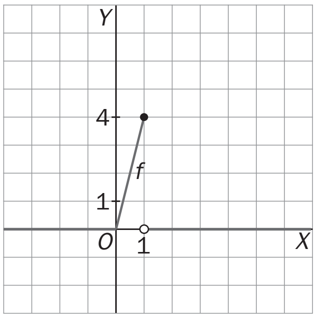
a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } -2 \le x \le 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 4x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) No es de densidad porque hay valores donde la función es negativa.



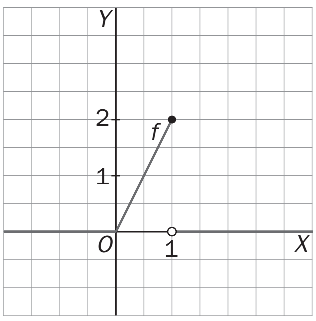
b) No es de densidad, ya que el área encerrada con el eje X no es 1: Área = $\frac{1 \cdot 4}{2} = 2$.



12.14. Halla el valor de *k* para que la siguiente función sea una función de densidad.

$f(x) = \begin{cases} kx & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$

Hay que imponer que el área sea 1: Área = $\frac{k \cdot 1}{2} = 1 \Rightarrow k = 2$.



12.15. Halla *k* para que la siguiente función sea de densidad.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{k-1} & \text{si } 2\le x\le 9\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$

Para ese valor, calcula las siguientes probabilidades.

a) $P(X = 3)$ b) $P(X < 5)$ c) $P(3 < X < 7)$

Para que sea función de densidad, el área entre el eje X y la función debe ser 1. Por tanto:

Área = $7\cdot\dfrac{3}{k-1}=1\Rightarrow k-1=21\Rightarrow k=22$

a) $P(X=3)=0$, porque la distribución es continua.

b) $P(X<5)=(5-2)\dfrac{3}{21}=\dfrac{3}{7}$

c) $P(3<X<7)=(7-3)\dfrac{3}{21}=\dfrac{4}{7}$

Distribución binomial

12.16. Para la distribución binomial de parámetros $n = 10$, $p = 0,3$, obtén las siguientes probabilidades.

a) $P(X = 3)$ b) $P(X < 2)$ c) $P(X = 4)$ d) $P(X > 1)$

a) $P(X = 3) = \binom{10}{3}(0,3)^3\,(0,7)^7 = 0,27$

b) $P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{10}{0}(0,3)^0\,(0,7)^{10} + \binom{10}{1}(0,3)^1\,(0,7)^9 = 0,028 + 0,121 = 0,149$

c) $P(X = 4) = \binom{10}{4}(0,3)^4\,(0,7)^6 = 0,200$

d) $P(X > 1) = 1 – P(X \le 1) = 1 – P(X < 2) = 1 – 0,149 = 0,851$

12.17. Se consideran las distribuciones binomiales $B(30;\ 0,6)$ y $B(100,\ p)$. Halla p para que las dos distribuciones tengan la misma varianza.

$\sigma^2_1 = 30 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 7,2$

$\sigma^2_2 = 100p(1 – p) = 100(p – p^2) = 100p – 100p^2 \Rightarrow 7,2 = 100p – 100p^2 \Rightarrow 100p^2 – 100p + 7,2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow p = \frac{100 \pm \sqrt{100^2-4\cdot 100\cdot 7,2}}{2\cdot 100} = \frac{100\pm\sqrt{7120}}{200} = \frac{100\pm 84,38}{200}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = \begin{cases}\dfrac{100+84,38}{200}=0,9219\\[2mm] \dfrac{100-84,38}{200}=0,0781\end{cases}$$, y las dos soluciones son válidas.

12.18. Halla la probabilidad de que al lanzar un dado cúbico 20 veces obtengamos al menos un 5.

La variable X = “número de cincos” sigue una binomial $B\left(20,\ \dfrac{1}{6}\right)$. La probabilidad pedida es

$$P(X\ge 1) = 1 – P(X < 1) = 1 – P(X = 0) = 1 – \binom{20}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^{20} = 0,974.$$

12.19. En un determinado juego de un casino se gana cuando al extraer una carta de una baraja española obtienes un as. Si se extraen al azar 15 cartas, siempre con reemplazamiento, se pide:

a) La probabilidad de que se gane exactamente en cuatro ocasiones.

b) La probabilidad de que se pierda las 15 veces que se juega.

La variable X = "número de veces que se gana" sigue una binomial $B\left(15, \frac{1}{10}\right)$.

a) $P(X = 4) = \binom{15}{4}(0{,}1)^4 (0{,}9)^{11} = 0{,}043$

b) $P(X = 0) = \binom{15}{0}(0{,}1)^0 (0{,}9)^{15} = 0{,}206$

12.20. (PAU) De una urna que contiene una bola blanca y dos negras se hacen extracciones sucesivas con reemplazamiento (una bola cada vez). Llamamos *X* al número de bolas blancas extraídas. Si se hacen cinco extracciones:

a) ¿Cuál es la distribución de probabilidad de *X*?

b) ¿Cuál es su media? ¿Y su desviación típica?

c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos 1 bola blanca?

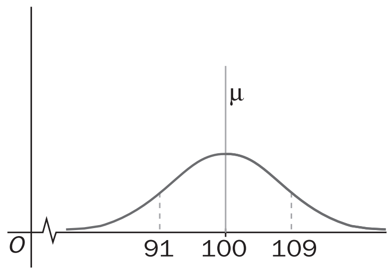
a) X sigue una binomial $B\left(5, \frac{1}{3}\right)$.

b) $\mu = 5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$. $\sigma^2 = 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{9} \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{10}{9}} = 1{,}054$

c) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{5}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^5 = 1 - \frac{32}{243} = \frac{211}{243} = 0{,}8683$

Distribución normal

12.21. (PAU) La longitud de cierto tipo de peces sigue la distribución normal de la figura, en la que la varianza es de 81 mm.



¿Cuál es la probabilidad de que uno de esos peces mida entre 82 y 91 mm?

La variable X = "longitud de un pez" sigue una distribución $N(100, 9)$, que se transforma en una $N(0, 1)$ mediante el cambio de variable $Z = \frac{X - 100}{9}$. Por tanto, la probabilidad pedida es:

$$P(82 < X < 91) = P\left(\frac{82-100}{9} < Z < \frac{91-100}{9}\right) = P(-2 < Z < -1) = P(Z < -1) - P(Z < -2) =$$
$$= 1 - P(Z < 1) - 1 + P(Z < 2) = -0{,}8413 + 0{,}9772 = 0{,}1359$$

12.22. (PAU) Una máquina produce recipientes cuyas capacidades están fijadas según una distribución normal *N*(10; 0,1). Un fabricante considera que un recipiente es defectuoso si su capacidad no está entre 9,9 y 10 ¿Qué probabilidad tiene un recipiente de ser considerado defectuoso?

La variable X = "capacidad de un recipiente" sigue una distribución $N(10; 0,1)$, que se transforma en una $N(0, 1)$ mediante el cambio de variable $Z = \frac{X-10}{0,1}$. La probabilidad de que un recipiente sea considerado válido es: $P(9,9 < X < 10,1) = P\left(\frac{9,9-10}{0,1} < Z < \frac{10,1-10}{0,1}\right) = P(-1 < Z < 1) = P(Z < 1) - P(Z < -1) =$

$= P(Z<1) - 1 + P(Z<1) = 2P(Z<1) - 1 = 2 \cdot 0,8413 - 1 = 0,6826$.

Y, en consecuencia, la probabilidad de que un recipiente sea considerado defectuoso es:

$1 - P(9,9 < X < 10,1) = 1 - 0,6826 = 0,3174$

12.23. (PAU) Los salarios mensuales de los trabajadores del país *A* siguen una normal *N*(2000, σ).
a) Calcula σ para que la probabilidad de ganar más de 2100 € sea de 0,33.
b) Sabiendo que los salarios del país *B* siguen una normal *N*(2000, 200), ¿en cuál de los dos países es más fácil ganar más de 2100 € al mes?

La variable X_A = "salario de un trabajador del país *A*" sigue una $N(2000, \sigma)$, y la variable X_B = "salario de un trabajador del país *B*" sigue una $N(2000, 200)$.

a) $P(X_A > 2100) = 0,33 \Rightarrow P\left(Z > \frac{2100-2000}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{100}{\sigma}\right) = 0,33 \Rightarrow P\left(Z < \frac{100}{\sigma}\right) = 0,67 \Rightarrow \frac{100}{\sigma} = 0,44 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma = \frac{100}{0,44} = 227,27$ es la desviación típica pedida.

b) $P(X_B > 2100) = P\left(Z > \frac{2100-2000}{200}\right) = P(Z > 0,5) = 1 - P(Z < 0,5) = 1 - 0,6915 = 0,3085$

Luego en el país *A* es más fácil ganar más de 2100 € al mes.

Aproximación de la binomial por una normal

12.24. (PAU) El 70% de los alumnos de un instituto tiene teléfono móvil.
a) Si un instituto tiene 1400 alumnos, ¿cuántos se espera que tengan teléfono móvil?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que en una muestra de 150 alumnos haya más de 100 con teléfono móvil?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que en una muestra de 200 alumnos haya como máximo 140 con teléfono móvil?

a) Se espera que tengan teléfono móvil $\frac{70}{100} \cdot 1400 = 980$ alumnos.

b) La variable X = "número de alumnos con teléfono móvil" sigue una binomial $B(150; 0,7)$.
Como $np = 150 \cdot 0,7 = 105 > 5$ y $nq = 150 \cdot 0,3 = 45 > 5$, la distribución binomial se puede aproximar por una normal $N(np, \sqrt{npq}) = N(105; 5,6)$. Por tanto, la probabilidad pedida es:

$P(X > 100) = P(X' > 100,5) = P\left(Z > \frac{100,5 - 105}{5,6}\right) = P(Z > -0,8) = P(Z \leq 0,8) = 0,7881$

c) En este caso, la variable X = "número de alumnos con teléfono móvil" sigue una $B(200; 0,7)$, que se puede aproximar por una normal $N(140; 6,48)$, porque $np = 140 > 5$ y $nq = 60 > 5$.

La probabilidad pedida es: $P(X \leq 140) = P(X' \leq 140,5) = P\left(Z \leq \frac{140,5 - 140}{6,48}\right) = P(Z \leq 0,08) = 0,5319$

12.25. (PAU) En un centro comercial se sabe que el 35% de los clientes paga con tarjeta.

a) Si en una caja han pagado 120 clientes, ¿cuántos de ellos se espera que no lo hayan hecho con tarjeta?
b) Si en una caja han pagado 200 clientes, ¿cuál es la probabilidad de que lo hayan hecho con tarjeta entre 60 y 85 de ellos?
c) Si en una caja han pagado 400 clientes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 260 no lo hayan hecho con tarjeta?

a) El número esperado es $120 \cdot (1 - 0{,}35) = 78$ clientes.

b) El número de clientes que han pagado con tarjeta sigue una distribución binomial $B(200;\ 0{,}35)$.

No obstante, como $np = 70 > 5$ y $nq = 130 > 5$, la binomial se puede aproximar por una normal $N(70;\ 6{,}75)$.

$$P(60 \le X \le 85) = P(59{,}5 < X' < 85{,}5) = P\left(\frac{59{,}5 - 70}{6{,}75} < Z < \frac{85{,}5 - 70}{6{,}75}\right) = P(-1{,}56 < Z < 2{,}3) =$$

$$= P(Z < 2{,}3) - P(Z < -1{,}56) = P(Z < 2{,}3) - 1 + P(Z < 1{,}56) = 0{,}9893 - 1 + 0{,}9406 = 0{,}9299$$

c) El número de clientes que no han pagado con tarjeta sigue una distribución binomial $B(400;\ 0{,}65)$.

No obstante, como $np = 260 > 5$ y $nq = 140 > 5$, se puede aproximar por $Y = N(260;\ 9{,}54)$. Por tanto:

$$P(Y \ge 260) = P(Y' \ge 259{,}5) = P\left(Z \ge \frac{259{,}5 - 260}{9{,}54}\right) = P(Z \ge -0{,}05) = P(Z < 0{,}05) = 0{,}5199$$

PROBLEMAS

12.26. La probabilidad de que en una empresa determinada un empleado no acuda a trabajar un día es de 0,08. Si en la empresa hay 50 trabajadores, ¿cuál es la probabilidad de que como mucho hayan faltado a trabajar dos empleados?

La variable X = "número de trabajadores que faltan al trabajo" sigue una $B(50;\ 0{,}08)$. La probabilidad pedida es:

$$P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \binom{50}{0}(0{,}08)^0\,(0{,}92)^{50} + \binom{50}{1}(0{,}08)^1\,(0{,}92)^{49} + \binom{50}{2}(0{,}08)^2\,(0{,}92)^{48} =$$

$= 0{,}0155 + 0{,}0672 + 0{,}1433 = 0{,}226$

12.27. (PAU) Se sabe que dos de cada ocho habitantes de una ciudad utilizan el transporte público para ir a su trabajo. Se hace una encuesta a 140 de esos ciudadanos. Determina:
a) El número esperado de ciudadanos que no van a su trabajo en transporte público.
b) La probabilidad de que el número de ciudadanos que van al trabajo en transporte público esté entre 30 y 45.

La variable X = "número de personas que utilizan el transporte público" sigue una $B(140; 0{,}25)$.

a) El número esperado de ciudadanos que no van a su trabajo en transporte público es $140 \cdot (1 - 0{,}25) = 105$.

b) Como $np = 140 \cdot 0{,}25 > 5$ y $nq = 140 \cdot 0{,}75 > 5$, X se puede aproximar por una $N(35;\ 5{,}12)$. Por tanto:

$$P(30 \le X \le 45) = P(29{,}5 \le X' \le 45{,}5) = P\left(\frac{29{,}5 - 35}{5{,}12} \le Z \le \frac{45{,}5 - 35}{5{,}12}\right) = P(-1{,}07 \le Z \le 2{,}05) =$$

$$= P(Z \le 2{,}05) - P(Z < -1{,}07) = 0{,}9798 - (1 - 0{,}8577) = 0{,}8375$$

12.28. (PAU) Un tratamiento contra el cáncer produce mejoría en el 80% de los enfermos a los que se les aplica. Se suministra a 5 enfermos. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que los cinco pacientes mejoren.
b) Calcular la probabilidad de que, al menos, mejoren tres pacientes.
c) ¿Cuántos pacientes se espera que mejoren?

La variable X = "número de pacientes que mejoran con el tratamiento" sigue una $B(5;\ 0{,}8)$.

a) $P(X = 5) = \binom{5}{5}(0{,}8)^5\,(0{,}2)^0 = 0{,}328$

b) $P(X \ge 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = \binom{5}{3}(0{,}8)^3\,(0{,}2)^2 + \binom{5}{4}(0{,}8)^4\,(0{,}2)^1 + \binom{5}{5}(0{,}8)^5\,(0{,}2) = 0{,}9421$

c) Se espera que mejoren $np = 5 \cdot 0{,}8 = 4$ pacientes.

12.29. (PAU) Se lanza un dado 720 veces. Calcula la probabilidad aproximada de que salgan, al menos, 110 seises.

La variable X = "número de seises en 720 tiradas" sigue una distribución binomial $B\left(720, \frac{1}{6}\right)$. No obstante, como $np = 120 > 5$ y $nq = 600 > 5$, X se puede aproximar por una normal $N(120, 10)$. Por tanto:

$$P(X \geq 110) = P(X' > 109{,}5) = P\left(Z > \frac{109{,}5 - 120}{10}\right) = P(Z > -1{,}05) = P(Z < 1{,}05) = 0{,}8531$$

12.30. (PAU) La media de ventas diarias de un dependiente de unos grandes almacenes es de 950 €, y la desviación típica es de 200 €. Suponiendo que la distribución de ventas es normal, ¿cuál es la probabilidad de vender más de 1250 € en un día?

La variable X = "ventas de un dependiente en un día" sigue una $N(950, 200)$. La probabilidad pedida es:

$$P(X > 1250) = P\left(Z > \frac{1250 - 950}{200}\right) = P(Z > 1{,}5) = 1 - P(Z < 1{,}5) = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$$

12.31. (PAU) Cierto tipo de batería dura un promedio de 3 años, con una desviación típica de 0,5 años. Suponiendo que la duración de las baterías es una variable normal:

a)¿Qué porcentaje de baterías se espera que duren entre 2 y 4 años?

b) Si una batería lleva funcionando 3 años, ¿cuál es la probabilidad de que dure menos de 4,5 años?

La variable X = "duración en años de una batería" sigue una $N(3; 0{,}5)$.

a) $P(2 \leq X \leq 4) = P\left(\frac{2-3}{0{,}5} \leq Z \leq \frac{4-3}{0{,}5}\right) = P(-2 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq -2) = 2P(Z \leq 2) - 1 = 0{,}9544$

Por tanto, el porcentaje es del 95,44%.

b) Se trata de un problema de probabilidad condicionada:

$$P(X < 4{,}5 / X \geq 3) = \frac{P(3 \leq X < 4{,}5)}{P(X \geq 3)} = \frac{P\left(\frac{3-3}{0{,}5} < Z < \frac{4{,}5-3}{0{,}5}\right)}{P\left(Z \geq \frac{3-3}{0{,}5}\right)} = \frac{P(0 < Z < 3)}{P(Z \geq 0)} = \frac{0{,}9987 - 0{,}5}{0{,}5} = 0{,}9974$$

12.32. (PAU) Tiramos una moneda perfecta 100 veces. Hacemos la predicción de que saldrá un número de caras comprendido entre 40 y 53. Calcula la probabilidad de acertar.

La variable X = "número de caras obtenidas al lanzar una moneda 100 veces" sigue una $B(100; 0{,}5)$.

Como $np = 100 \cdot 0{,}5 > 5$ y $nq = 100 \cdot 0{,}5 > 5$, se puede aproximar X por una normal $N(np, \sqrt{npq}) = N(50, 5)$.

La probabilidad de acertar, por tanto, es:

$$P(40 \leq X \leq 53) = P(39{,}5 \leq X' \leq 53{,}5) = P\left(\frac{39{,}5 - 50}{5} \leq Z \leq \frac{53{,}5 - 50}{5}\right) = P(-2{,}1 \leq Z \leq 0{,}7) =$$

$$= P(Z \leq 0{,}7) - P(Z < -2{,}1) = P(Z \leq 0{,}7) - 1 + P(Z < 2{,}1) = 0{,}7580 - 1 + 0{,}9821 = 0{,}7401$$

12.33. (PAU) En una población, los ingresos anuales siguen una distribución normal, con una media de 20 000 € y una desviación típica de 8000 €. Si la proporción de pobres es del 4% y la de ricos del 2%, ¿cuáles son los ingresos anuales que marcan los límites de pobreza y riqueza en esa población?

La variable X = "ingresos anuales de una persona" sigue una $N(20\,000, 8000)$. Se buscan dos valores k_1 y k_2 tales que $P(X < k_1) = 0{,}04$ y $P(X > k_2) = 0{,}02$.

$$P(X < k_1) = P\left(Z < \frac{k_1 - 20\,000}{8\,000}\right) = 0{,}04 \Rightarrow \frac{k_1 - 20\,000}{8\,000} = -1{,}75 \Rightarrow k_1 = 6000 \text{ €}$$

$$P(X > k_2) = P\left(Z > \frac{k_2 - 20\,000}{8\,000}\right) = 0{,}02 \Rightarrow \frac{k_2 - 20\,000}{8\,000} = 2{,}05 \Rightarrow k_2 = 36\,400 \text{ €}$$

12.34. (PAU) El 25% de las viviendas de una región tienen conexión a internet. Se eligen 80 viviendas y se pide:

a) La probabilidad de que al menos 20 de ellas estén conectadas a internet.

b) El número esperado de viviendas no conectadas a internet.

c) La probabilidad de que el número de viviendas con internet esté entre 10 y 30.

La variable X = "número de viviendas con internet" sigue una distribución binomial $B(80; 0{,}25)$.

Como $np = 80 \cdot 0{,}25 > 5$ y $nq = 80 \cdot 0{,}75 > 5$, se puede aproximar X por una normal $N(20; 3{,}87)$.

a) $P(X \geq 20) = P(X' \geq 19{,}5) = P\left(Z \geq \frac{19{,}5 - 20}{3{,}87}\right) = P(Z \geq -0{,}13) = P(Z < 0{,}13) = 0{,}5517$

b) Se espera que $80 \cdot 0{,}75 = 60$ vecinos no tengan conexión a internet.

c) $P(10 \leq X \leq 30) = P(9{,}5 \leq X' \leq 30{,}5) = P\left(\frac{9{,}5 - 20}{3{,}87} \leq Z \leq \frac{30{,}5 - 20}{3{,}87}\right) = P(-2{,}71 \leq Z \leq 2{,}71) =$

$= P(Z \leq 2{,}71) - 1 + P(Z \leq 2{,}71) = 2 \cdot 0{,}9966 - 1 = 0{,}9932$

12.35. (PAU) En una competición de baloncesto, dos equipos, *A* y *B*, juegan una eliminatoria al mejor de cinco partidos. Ganará el equipo que consiga ganar antes tres partidos. Si se sabe que en cada partido el equipo *A* tiene una probabilidad de ganar de 0,55, ¿qué probabilidad tendrá el equipo *B* de ganar la eliminatoria?

La variable X = "número de partidos ganados por el equipo B" sigue una distribución binomial $B(5; 0{,}45)$. El equipo B ganará la eliminatoria si gana tres o más partidos. Por tanto, la probabilidad pedida es:

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = \binom{5}{3} 0{,}45^3\, 0{,}55^2 + \binom{5}{4} 0{,}45^4\, 0{,}55 + \binom{5}{5} 0{,}45^5\, 0{,}55^0 = 0{,}4069$$

PROFUNDIZACIÓN

12.36. Aplicado un test a un grupo de 600 personas se ha obtenido una distribución normal de media 65 y desviación típica 8. Halla el percentil 73 (punto que deja a su izquierda el 73% de la distribución).

La variable X = "puntuación de una persona en el test" sigue una $N(65, 8)$. Se busca el valor k que cumple que $P(X \leq k) = 0{,}73$.

$$P(X \leq k) = 0{,}73 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{k - 65}{8}\right) = 0{,}73 \Rightarrow \frac{k - 65}{8} = 0{,}61 \Rightarrow k = 69{,}88$$

El percentil 73 de la distribución es la puntuación 69,88.

12.37. En una granja avícola pueden usar dos sistemas de alimentación para sus gallinas: *A* y *B*. Con ambos se recoge aproximadamente el mismo número de huevos, pero cuando se usa el sistema *A*, el peso de los huevos sigue una distribución normal de 62 gramos de media y 3,5 gramos de desviación típica, mientras que usando el sistema *B* la distribución, también normal, tiene 63,5 gramos de media y 4,5 gramos de desviación típica. Si hay que desechar, por inutilizables, los huevos de menos de 55 gramos:

a) ¿Qué sistema resulta preferible?

b) ¿Cuántos huevos se desecharon en una temporada en la que se usó el sistema *A* y se produjeron 1000 docenas de huevos?

La variable X_A = "peso de un huevo de una gallina alimentada con el sistema A" sigue una $N(62; 3{,}5)$.

La variable X_B = "peso de un huevo de una gallina alimentada con el sistema B" sigue una $N(63{,}5; 4{,}5)$.

a) Resulta preferible el sistema que tenga mayor probabilidad de producir huevos utilizables:

$$P(X_A \geq 55) = P\left(Z \geq \frac{55 - 62}{3{,}5}\right) = P(Z \geq -2) = P(Z \leq 2) = 0{,}9772$$

$$P(X_B \geq 55) = P\left(Z \geq \frac{55 - 63{,}5}{4{,}5}\right) = P(Z \geq -1{,}89) = P(Z \leq 1{,}89) = 0{,}9706$$

El sistema A es preferible.

b) La probabilidad de desechar un huevo con el sistema A es de $1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$. Si se produjeron 1000 docenas de huevos, es decir, 12 000 huevos, el número de huevos desechados será, previsiblemente:

$12\,000 \cdot 0{,}0228 = 273{,}6 \approx 274$.

12.38. (PAU) La cantidad de café depositada en cada bolsa por una máquina envasadora sigue una distribución normal con media μ = 1040 gramos y desviación típica 50 gramos.

a) Calcula el tanto por ciento de paquetes que contienen más de un kilo.

b) Calcula α sabiendo que el 97,5% de los paquetes contienen menos de α gramos.

c) Calcula el tanto por ciento de paquetes cuyo contenido tiene un peso comprendido entre 950 y 1050 gramos.

La variable *X* = "cantidad de café en una bolsa" sigue una distribución *N*(1040, 50).

a) $P(X \geq 1000) = P\left(Z \geq \frac{1000 - 1040}{50}\right) = P(Z \geq -0{,}8) = P(Z \leq 0{,}8) = 0{,}7881$. El porcentaje es del 78,81%.

b) $P(X \leq \alpha) = 0{,}975 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{\alpha - 1040}{50}\right) = 0{,}975 \Rightarrow \frac{\alpha - 1040}{50} = 1{,}96 \Rightarrow \alpha = 1138 \text{ g}$

c) $P(950 \leq X \leq 1050) = P\left(\frac{950 - 1040}{50} \leq Z \leq \frac{1050 - 1040}{50}\right) = P(-1{,}8 \leq Z \leq 0{,}2) = P(Z \leq 0{,}2) - P(Z \leq -1{,}8) =$

$= P(Z \leq 0{,}2) - 1 + P(Z \leq 1{,}8) = 0{,}5793 - 1 + 0{,}9641 = 0{,}5434$

El porcentaje es del 54,34%.

RELACIONA Y CONTESTA

Elige la única respuesta correcta en cada caso:

12.1. Una variable *X* sigue una distribución binomial de parámetros *n* = 8 y *p* = 0,2. La probabilidad de que *X* = 6 es aproximadamente de:

A) 0,049 | **D) 0,025**

B) 0,0011 | **E) Faltan datos para averiguarlo.**

C) 0,0041

La respuesta correcta es B, dado que $P(X = 6) = \binom{8}{6}(0{,}2)^6(0{,}8)^2 = 0{,}0011$.

12.2. En una fábrica de teléfonos móviles, la probabilidad de que una determinada pieza esté defectuosa es de 0,02. Si se toman 10 piezas de ese tipo, la probabilidad de que no haya ninguna defectuosa es aproximadamente de:

A)0,98 | **D) 0,2**

B) 0,534 | **E) 0,752**

C) 0,817

La solución es C, puesto que la probabilidad pedida es $P = (0{,}98)^{10} = 0{,}817$.

12.3. Si *Z* sigue una distribución *N*(0, 1), *P*(*Z* > 1,2) es:

A)0,8849 | **D)0,2299**

B)0,7801 | **E)0,1151**

C)0,5

La solución es E, consultando la tabla de la normal (0, 1).

12.4. El tiempo que tarda una persona en hacer una misma tarea sigue una distribución normal de media 3 h y desviación típica 0,2 h.

La probabilidad de que realice esa tarea en menos de 2 h 45 min es de:

A) 0,1056 **D) 0,5581**

B) 0,1353 **E) 0,8944**

C) 0,4419

La respuesta correcta es A, porque $P(X < 2{,}75) = P\left(X < \frac{2{,}75 - 3}{0{,}2}\right) = 0{,}1056$.

12.5. Se lanza 100 veces al aire una moneda trucada, en la que la probabilidad de obtener cara es de 0,65.

La probabilidad de obtener entre 60 y 70 caras es aproximadamente de:

A) 0,4297 **D) 0,7448**

B) 0,6939 **E) 0,9558**

C) 0,7064

La solución es D, puesto que, al aproximar la variable aleatoria por una *N*(65; 4,77), se tiene:

$$P(59{,}5 \le X \le 70{,}5) = P\left(\frac{59{,}5-65}{4{,}77} \le Z \le \frac{70{,}5-65}{4{,}77}\right) = P(-1{,}15 \le Z \le 1{,}15) = 0{,}7498$$

Señala en cada caso las respuestas correctas:

12.6. Si *X* sigue una *B*(5; 0,4):

A) μ = 2 **D) σ^2 = 2,05**

B) μ = 2,7 **E) σ = 1,095**

C) σ^2 = 1,46

Son correctas A y E, porque:

$\mu = 5 \cdot 0{,}4 = 2$

$\sigma^2 = 5 \cdot 0.4 \cdot 0{,}6 = 1{,}2$

$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1{,}2} = 1{,}095$

12.7. La gráfica de la función de densidad de la distribución normal *N*(μ, σ):

A) Es simétrica respecto al eje de ordenadas.

B) Tiene una asíntota vertical en *x* = 0.

C) Tiene una asíntota horizontal en *y* = 0.

D) Alcanza su único máximo en *x* = μ.

E) Tiene dos puntos de inflexión en *x* = $\pm\sigma$.

Son correctas C y D. Es simétrica respecto a *x* = μ, no tiene asíntotas verticales y sus puntos de inflexión se alcanzan en *x* = $\mu \pm \sigma$.

Elige la relación correcta entre las afirmaciones dadas:

12.8. Dadas las siguientes afirmaciones:

a: “*X* es una variable aleatoria discreta”.

b: “*X* es una variable aleatoria continua”.

c: “*P*(*X* = *k*) = 0, siendo *k* un número real cualquiera”.

¿Cuáles de las siguientes relaciones entre las afirmaciones son ciertas?

A) a ⇒ c B) b ⇒ c C) c ⇒ a D) c ⇒ b E) a ⇒ no c

Solo es cierta B. En una distribución de variable aleatoria discreta, las probabilidades para valores puntuales pueden ser nulas o no. Por el contrario, si la probabilidad de que la variable tome un valor puntual es nula, eso no quiere decir ni que la variable sea continua ni que sea discreta.

Señala los datos innecesarios para contestar:

12.9. De una distribución binomial se conocen los parámetros *n*, *p* y *q*. Para saber si se puede aproximar por una normal, aplicando el teorema de De Moivre:

A) Puedo prescindir de los parámetros *p* y *q*.

B) Puedo prescindir de los parámetros *n* y *p*.

C) Puedo prescindir de los parámetros *n* y *q*.

D) Puedo prescindir del parámetro *p*.

E) No puedo prescindir de ningún parámetro.

La solución es D. Dado que $q = 1 - p$, si se tiene uno de ellos, el otro es redundante.

Analiza si la información suministrada es suficiente para contestar la cuestión:

12.10. Para afirmar que $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < a \\ kx \text{ si } a \le x \le b \\ t \text{ si } x > b \end{cases}$ **es una función de densidad con *k*, *t*, *a*, *b* reales, nos dicen que:**

a) *a* = 0 b) *b* > 0

A) Cada información, a y b, es suficiente por sí sola.

B) a es suficiente por sí sola, pero b no.

C) b es suficiente por sí sola, pero a no.

D) Son necesarias las dos.

E) Faltan más datos.

La solución es E. Para garantizar que *f* es función de densidad hace falta, simultáneamente, que:

1) $t = 0$

2) Se conozcan al menos dos de los tres parámetros *a*, *b* y *k*.

3) $k(a + b) = 2$