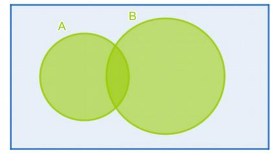
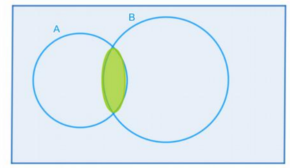
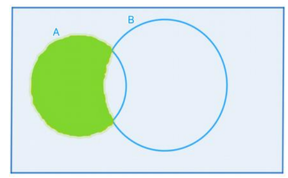
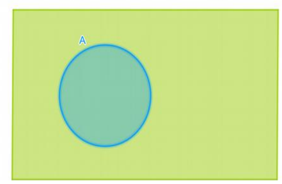
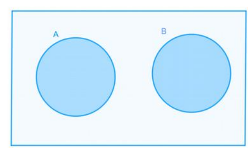
PROBABILIDAD

1. OPERACIONES CON SUCESOS

OPERACIÓN	DEFINICIÓN	DIAGRAMA
Unión $A \cup B$	Conjunto formado por todos los elementos de A y todos los elementos de B.	
Intersección $A \cap B$	Conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A y a B a la vez.	
Diferencia $A - B$	Conjunto formado por todos los elementos de A que no pertenecen a B.	
Suceso Contrario $\bar{A}$ o A^c	Conjunto formado por todos los elementos que no pertenecen a A.	

Sucesos incompatibles: Dos sucesos A y B son incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.



2. PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES CON SUCESOS

Sean A, B y C tres sucesos de un espacio muestral E, se verifican las siguientes propiedades:

1ª) Conmutativa: $A \cup B = B \cup A$ $\quad A \cap B = B \cap A$

2ª) Asociativa: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $\quad A \cap (B \cap C) = A \cap (B \cap C)$

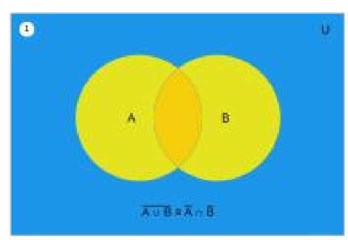
3ª) Distributiva: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $\quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

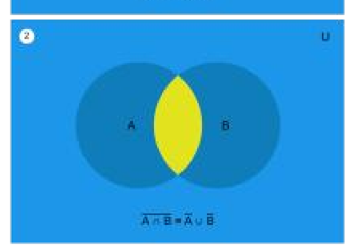
4º) Elemento neutro: $A \cup \emptyset = A$ $\quad A \cap E = A$

5º) Complementarios: $A \cup \bar{A} = E$ $\quad A \cap \bar{A} = \emptyset$

6º) $\bar{\bar{A}} = A$ y $A - B = A \cap \bar{B}$

7º) **Leyes de Morgan:** $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ y $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$





Igualdad útil: $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$ estos dos conjuntos son incompatibles.

PROBABILIDAD

3. PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD

1ª) $0 \leq P(A) \leq 1$
2ª) P(E) = 1 y $P(\emptyset)=0$
3ª) $P(\bar{A})=1-P(A)$
4ª) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ Si A y B son incompatibles → $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

Igualdades útiles: $P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap \bar{B})$ (estos dos conjuntos son incompatibles)
$P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-P(\bar{A}\cap\bar{B})$ (Leyes de Morgan)
Si A1, A2, ...An son sucesos incompatibles dos a dos entonces
$P(A_1\cup A_2\cup \ldots A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$

4. PROBABILIDAD CONDICIONADA

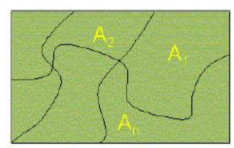
La probabilidad de un suceso B, cuando sabemos que ha ocurrido otro suceso A, se denomina probabilidad condicionada:

$$\boldsymbol{P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}}$$

Regla del producto: $\boldsymbol{P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B)}$

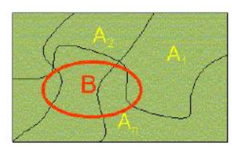
Si el resultado de B no depende de A entonces: **P(B/A) = P(B)** **A y B son independientes**
De aquí se deducen las expresiones: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ o P(A/B) =P(A) si A y B son independientes
En caso contrario son dependientes.

5. TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL



Si A1, A2, ...An son sucesos incompatibles entre sí y su unión es el espacio muestral, $A_1\cup A_2\cup \ldots\cup A_n=E$ entonces:

$$P(B)=P(B\cap A_1)+P(B\cap A_2)+\ldots+P(B\cap A_n)=$$
$$=P(A_1)\cdot P(B/A_1)+P(A_2)\cdot P(B/A_2)+\ldots+P(A_n)\cdot P(B/A_n)$$



6. TEOREMA DE BAYES

Si A1, A2, ...An son sucesos incompatibles entre sí y su unión es el espacio muestral, $A_1\cup A_2\cup \ldots\cup A_n=E$ entonces:

$$P(A_i/B)=\frac{P(A_i\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B\cap A_i)}{P(B\cap A_1)+P(B\cap A_2)+\ldots+P(B\cap A_n)}=$$
$$=\frac{P(A_i)\cdot P(B/A_i)}{P(A_1)\cdot P(B/A_1)+P(A_2)\cdot P(B/A_2)+\ldots+P(A_n)\cdot P(B/A_n)}$$

El teorema de Bayes calcula probabilidades a posteriori

PROBABILIDAD

EJERCICIOS MODELO RESUELTOS:

EJERCICIO 1: Consideramos dos sucesos, A y B, tales que P(A) = 0,65; P(B)=0,54 y $P(\bar{A}\cap\bar{B})=0,24$.
a)Di si los sucesos A y B son independientes.
b) Calcula la probabilidad del suceso $\bar{A}\cap B$.

SOLUCIÓN:

a) Aplicando la ley de Morgan $P(\overline{A\cup B})=P(\bar{A}\cap\bar{B})=0,24 \quad \Rightarrow$

$$P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-0,24=0,76$$

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0,65+0,54-0,76=0,43$$

$$P(A)P(B)=0,65\cdot 0,54=0,351$$

$P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B) \quad \Rightarrow$ A y B no son independientes

Otro modo de verlo es calcular $P(A/B)=P\frac{(A\cap B)}{P}(B)=\frac{0,43}{0,54}=0,796\neq P(A)$ por tanto A no es independiente de B.

b) $P(B)=P(A\cap B)+P(\bar{A}\cap B) \quad \Rightarrow \quad P(\bar{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=0,54-0,43=0,11$

EJERCICIO 2: Sean A y B dos sucesos independientes, tales que $P(A\cup B)=\frac{5}{16}$ y $P(\bar{A}\cup\bar{B})=\frac{47}{48}$. Sabiendo que el suceso B es tres veces más probable que el suceso A, ¿qué probabilidad tiene cada uno de ellos?

SOLUCIÓN:

Aplicando la ley de Morgan $P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\overline{A\cap B})=\frac{47}{48} \quad \Rightarrow$

$$P(A\cap B)=1-P(\overline{A\cap B})=1-\frac{47}{48}=\frac{1}{48}$$

$$P(A)+P(B)=P(A\cup B)+P(A\cap B)=\frac{5}{16}+\frac{1}{48}=\frac{16}{48}=\frac{1}{3}$$

Por otro lado, P(B) = 3P(A) → P(A) + 3P(A)=1/3 → 4P(A) = 1/3 → P(A) = 1/12

P(B) = 3/12 = 1 /4

PROBABILIDAD

EJERCICIO 3: En una ciudad el 40% de los domicilios tiene conexión a Internet, el 33% tiene TV por cable y el 20% disfruta de ambos servicios. Halla la probabilidad de que al elegir un hogar al azar solo tenga uno de estos dos servicios.
NOTA: Es importante explicar todos los pasos.

SOLUCIÓN:
Se definenlos sucesos que intervienen en el problema:
I= “Tener conexión a Internet”   C= ”Tener TV por cable”

Anotamos las probabilidades conocidas:
P(I) = 0,4   P(C) = 0,33 $P(I \cap C)=0,2$

La probabilidad que nos piden es P(I – C) + P(C – I) o lo que es lo mismo $P(I \cap \bar{C})+P(\bar{I} \cap C)$

P(I – C) = $P(I \cap \bar{C})=P(I)-P(I \cap C)=0,4-0,2=0,2$

P(C – I) = $P(C \cap \bar{I}) \; = \; P(C)-P(I \cap C)=0,33-0,2=0,13$

P(I – C) + P(C - I) = 0,2 + 0,13 = 0,33

El 33% de los hogares tiene conexión a Internet o TV por cable pero no ambos.

Dos herramientas muy útiles a la hora de resolver problemas son los **diagramas de árbol** y las **tablas de contingencia**.

Este problema también lo podemos resolver por **tablas de contingencia**:

	Conexión a Internet	No conexión a Internet	
Televisión por cable	$P(I \cap C)=0,2$	$P(\bar{I} \cap C)$	$P(C)=0,33$
No televisión por cable	$P(I \cap \bar{C})$	$P(\bar{I} \cap \bar{C})$	$P(\bar{C})$
	$P(I)=0,4$	$P(\bar{I})$	1

Completamos la tabla:

	Conexión a Internet	No conexión a Internet	
Televisión por cable	$P(I \cap C)=0,2$	0,13	$P(C)=0,33$
No televisión por cable	0,2	0,47	0,67
	$P(I)=0,4$	0,6	1

$P(I \cap \bar{C})+P(\bar{I} \cap C)$ =0,2 + 0,13 = 0,33 es decir, el 33% de los hogares tienen Internet o TV por cable pero no ambos.

PROBABILIDAD

JUNIO 2012

EJERCICIO 4: El 40% de los aspirantes a un puesto de trabajo superó una determinada prueba de selección. Terminan siendo contratados el 80% de los aspirantes que superan esa prueba y el 5% de los que no la superan.

(a) Calcula el porcentaje de aspirantes al puesto de trabajo que terminan siendo contratados.

(b) Si un aspirante no es contratado, ¿cuál es la probabilidad de que superase la prueba de selección?

SOLUCIÓN:

Se definenlos sucesos que intervienen en el problema:

S= "Superar la prueba de selección" C= "Ser contratado"

Anotamos las probabilidades dadas en el enunciado: P(S) = 0,4 P (C/S) = 0,8 $P(C/\bar{S})=0{,}05$

(Ten en cuenta las probabilidades de los sucesos contrarios:

$P(\bar{S})=0{,}6$ $P(\bar{C}/S)=0{,}2$ $P(\bar{C}/\bar{S})=0{,}95$)

a)

Formulamos la probabilidad pedida: P (C) = ?

Utilizamos el **teorema de la probabilidad total**: $P(C)=P(C\cap S)+p(C\cap\bar{S})$

Utilizando la **regla del producto**: $P(C)=P(C/S)P(S)+P(C/\bar{S})P(\bar{S})=0{,}8\cdot 0{,}4+0{,}05\cdot 0{,}6=0{,}35$

El 35% de los aspirantes terminan siendo contratados (Fíjate que expresar la solución son **0,25 p**)

b)

$P(S/\bar{C})=?$ es una **probabilidad a posteriori** :

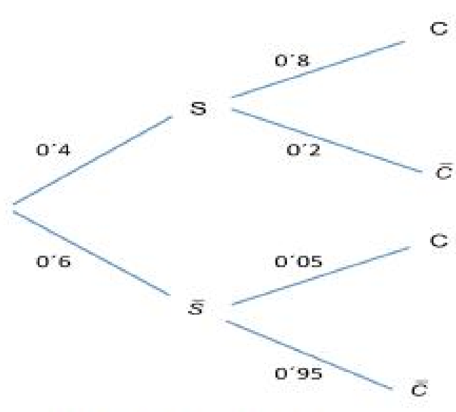
$$P(S/\bar{C})=\frac{P(S\cap\bar{C})}{P(\bar{C})}=\frac{P(\bar{C}/S)\cdot P(S)}{1-P(C)} \quad\Rightarrow\quad P(S/\bar{C})=\frac{(1-0{,}8)\cdot 0{,}4}{1-0{,}35}=0{,}123$$

También podríamos usar el **Teorema de Bayes**:

$$P(S/\bar{C})=\frac{P(S\cap\bar{C})}{P(\bar{C})}=\frac{P(\bar{C}/S)\cdot P(S)}{P(\bar{C})}=\frac{P(\bar{C}/S)\cdot P(S)}{P(\bar{C}/S)\cdot P(S)+P(\bar{C}/\bar{S})\cdot P(\bar{S})}=\frac{0{,}2\cdot 0{,}4}{0{,}2\cdot 0{,}4+0{,}95\cdot 0{,}6}=\frac{0{,}08}{0{,}65}=0{,}123$$

Otra alternativa es usar una **tabla de contingencia** o un **diagrama de árbol**:

	C	$\bar{C}$	
S	32	8	40
$\bar{S}$	3	57	60
	35	65	100



Siempre escribiendo con probabilidades las explicaciones y los resultados.