b) Sabendo que $\int_0^x f(t)\,dt = \frac{x}{x^2+1}$ e f é continua en $\mathbb{R}$ calcular $f(1)$.

(Similar Xuño 2010 PAU)

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Se $f(x)$ é unha función continua en $[a,b]$ e definimos $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ entón $F(x)$ é derivábel en (a,b) e ademais $F'(x) = f(x)$.

4pts

imprescindíbel, explicar onde, como e porque aplicamos o teorema.

(5) Sexa $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \frac{x}{x^2+1}$

Como f é continua en $\mathbb{R}$ será continua en calquera intervalo da forma $[0,b]$ con $b \in \mathbb{R}$, $b>0$.

(3pts)

Aplicando o Teorema fundamental do calculo sabemos que $F(x)$ é derivábel en calquera intervalo $(0,b)$ e tamén que $F'(x) = f(x)$

Como $F'(x) = \frac{1\cdot(x^2+1) - x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ (2pts)

$F(x) = \frac{x}{x^2+1}$

e $F'(x) = f(x)$ entón $f(1) = F'(1) = \frac{1-1^2}{(1^2+1)^2} = \frac{0}{4} = 0$ (1pt)

PASOS

- Aplicar o Teorema a $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \frac{x}{x^2+1}$
  - Razonar que F é derivabel e $F'(x) = f(x)$ en $(0,b)$
  - Calcular $F'(x)$ ($F'(x) = f(x)$)
  - Calcula $F'(1) = f(1) = 0$