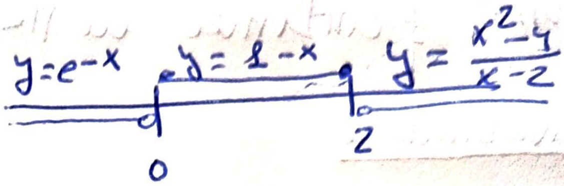
1

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x} & \text{se } x<0 \\ 1-x & 0\leq x\leq 2 \\ \dfrac{x^2-4}{x-2} & x>2 \end{cases}$$



a) Continuidade

- $\boxed{\text{Se } x\neq 0 \text{ e } x\neq 2}$

$(-\infty,0)$ $y=e^{-x}=\frac{1}{e^x}$, $D_y=\mathbb{R}$, $\Rightarrow y=e^{-x}$ cont. em $\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ cont. em $(-\infty,$

$(0,2)$ $y=1-x$ continua em $\mathbb{R}$ por ser polinómica $\Rightarrow f$ cont. em $(0,2$

$(2,+\infty)$ $y=\frac{x^2-4}{x-2}$, $D_y=\mathbb{R}-\{2\}$ $\left.\begin{matrix} y \text{ cont em } \mathbb{R}-\{2\} \\ 2\notin(2,+\infty) \end{matrix}\right\} \Rightarrow f$ cont. em $(2,+\infty)$

- f cont. se $x\neq 0$ e $x\neq 2$

- Continuidade em $x=0$

① $\exists f(0)=1-0=1$

② $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

Dta $\to \lim\limits_{x\to 0^+}(1-x)=1$

ESDA $\to \lim\limits_{x\to 0^-} e^{-x}=e^{-0}=e^0=1$ $\Big\}$ $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$

③ Como $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x) \Rightarrow f$ cont. em $x=0$

- Continuidade em $x=2$

① $\exists f(2)=1-2=-1$

② $\exists \lim\limits_{x\to 2} f(x)$? $\left\{\begin{matrix} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(1-x)=1-2=-1 \\ \lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{x-2}=\left[\frac{0}{0}\right] \underset{\text{ind.}}{\overset{\text{L'Hôp}}{=}} \lim\limits_{x\to 2^+}\frac{2x}{1}=4 \end{matrix}\right\}$

$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 2} f(x) \Rightarrow f$ não é cont. em $x=2$

Entón f continua en $\mathbb{R}-\{2\}$

Derivabilidade

- En $x=2$ f non é derivable ($\nexists f'(2)$) xa que f non é continua en $x=2$

- $x\neq 0$ e $x\neq 2$

$$\begin{array}{c|c|c}
y=e^{-x} & y=1-x & y=\frac{x^2-4}{x-2} \\
\hline
y'=-e^{-x} \quad 0 & y'=-1 \quad 2 & y'=1 \longrightarrow
\end{array}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y&=\frac{x^2-4}{x-2} \\ y'&=\frac{2x(x-2)-(x^2-4)\cdot 1}{(x-2)^2}= \\ &=\frac{2x^2-4x-x^2+4}{(x-2)^2} \\ &=\frac{x^2-4x+4}{(x-2)^2}= \\ &=\frac{\cancel{x^2-4x+4}}{\cancel{x^2-4x+4}}=1 \end{aligned}}$$

$(-\infty,0)$ $\left.\begin{array}{l} y=e^{-x} \\ y'=-e^{-x} \end{array}\right\}$ f derivable en $(-\infty,0)$

$(0,2)$ $\left.\begin{array}{l} y=1-x \\ y'=-1 \end{array}\right\}$ f derivable en $(0,2)$

$(2,+\infty)$ $\left.\begin{array}{l} y=\frac{x^2-4}{x-2} \\ y'=1 \end{array}\right\}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{2\} \Rightarrow f$ derivable en $(2,+\infty)$

- Derivabilidade en $x=0$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}(-e^{-x})=-e^{-0}=-1 \\ f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}(-1)=-1 \end{array}\right\} \begin{array}{c} f'(0^-)=f'(0^+) \\ \Downarrow \\ \exists f'(0)=-1 \end{array}$$

Entón f derivable en $\mathbb{R}-\{2\}$ e

$$f'(x)=\begin{cases} -e^{-x} & x<0 \\ -1 & 0\leq x<2 \\ 1 & x>2 \end{cases}$$

(b) $\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty} e^{-x}=e^{-(-\infty)}=e^{+\infty}=+\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-4}{x-2}=\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]\overset{\text{L'Hôp}}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{2x}{1}=+\infty$$

2.b

2

$f(x) = x^2 - x\,\text{sen}\,x - \cos x$ Anúlase no intervalo $(0,\pi)$

- f continua en $[0,\pi]$?

$f(x)$ é a resta das funcións:

$y=x^2$ continua en $\mathbb{R}$, por ser polinómica $\Rightarrow$ continua en $[0,\pi]$

$y = x\,\text{sen}\,x$ " " por ser o produto dunha polinómica e de $y=\text{sen}\,x$ que son continuas en $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $y=x\,\text{sen}\,x$ cont. en $[0,\pi]$

$y=\cos x$ cont. en $\mathbb{R}$ por ser ~~unha~~ funcición coseno $\Rightarrow$ $y=\cos x$ cont. en $[0,\pi]$

Entón $f(x)$ continua en $[0,\pi]$

- $f(0) = 0^2 - 0\cdot\text{sen}\,0 - \cos 0 = -1 < 0$
$f(\pi) = \pi^2 - \pi\,\text{sen}\,\pi - \cos\pi = \pi^2+1 > 0$ } $f(0)\cdot f(\pi) < 0$

~~Entón~~, como:

~~Como~~ f é continua en $[0,\pi]$
$f(0)\cdot f(\pi) < 0$ } polo Teorema de Bolzano

podemos afirmar que $\exists\, c \in (0,\pi) \,/\, f(c) = 0$

é dicir f anúlase en $(0,\pi)$

2.c $f(x) = x\,\text{sen}\,x$ $g(x) = \ln x$ córtanse en $(2,3)$

f e g córtanse $\Leftrightarrow$ $f(x) = g(x)$ en algún punto ~~AAx~~

f e g cortaranse cando a ecuación $x\,\text{sen}\,x = \ln x$ teña solución.

Sexa a función $h(x) = x\,\text{sen}\,x - \ln x$, imos ver se lle podemos aplicar o Teorema de Bolzano no intervalo $[2,3]$

→ h cont. en $[2,3]$?

$y = x\,\text{sen}\,x$ continua en $\mathbb{R}$, produto de continuas, entón é cont. en $[2,3]$

$y = \ln x$ continua en $(0,+\infty)$ $\overset{\text{entón}}{\Longrightarrow}$ continua en $[2,3]$

$h(x) = x\,\text{sen}\,x - \ln x$ continua en $[2,3]$, por ser ~~continu~~ resta de func. continuas en $[2,3]$

→ $h(2) = 2\,\text{sen}\,2 - \ln 2$
$h(3) = 3\,\text{sen}\,3 - \ln 3$ } $h(2) \cdot h(3) < 0$

Como h continua en $[2,3]$ e $h(2) \cdot h(3) < 0$, entón polo teorema de Bolzano, $\exists\, c \in (2,3) \,/\, h(c) = 0$

$\Updownarrow$ $(h(x) = f(x) - g(x))$

$\exists\, c \in (2,3) \,/\, c\,\text{sen}\,c - \ln c = 0$

$\Updownarrow$

$\exists\, c \in (2,3) \,/\, c\,\text{sen}\,c = \ln c$ (é dicir nese punto $f(x)$ e $g(x)$ córtanse)

③ Calcular k para que sexa continua.

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} 3x & x \le \pi/2 \\ 2k + \cos 2x & x > \pi/2 \end{cases}$$

$y = \operatorname{sen} 3x \quad | \quad y = 2k + \cos 2x$

$\pi/2$

- **Continuidade $x \neq \frac{\pi}{2}$**

$(-\infty, \pi/2)$ $y = \operatorname{sen} 3x$ continua ($\operatorname{Dom} y = \mathbb{R}$) en $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f continua en $(-\infty, \pi/2)$

$(\frac{\pi}{2}, +\infty)$ $y = 2k + \cos 2x$ ($\operatorname{Dom} y = \mathbb{R}$), continua en $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f cont. en $(\frac{\pi}{2}, +\infty)$

Se $x \neq \frac{\pi}{2}$ f é continua.

- **Continuidade $x = \frac{\pi}{2}$**

① $f(\pi/2) = \operatorname{sen}\left(3\frac{\pi}{2}\right) = -1$

② $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x)$ $\begin{cases} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{sen} 3x) = \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = -1 \\ \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (2k + \cos 2x) = 2k + \cos \frac{2\pi}{2} = 2k - 1 \end{cases}$

③ f cont. en $x = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow f(\pi/2) = \lim_{x \to \pi/2^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2k - 1 = -1 \Rightarrow 2k = 0 \Rightarrow \boxed{k = 0}$

Entón

f continua en $\mathbb{R} \Leftrightarrow k = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} 3x & x \le \pi/2 \\ \cancel{2k} + \cos 2x & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Derivabilidade

(4) $f(x) = \dfrac{3x^2+1}{x^2-x}$

a) Calcular asíntotas. $\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

Asíntotas verticais (A.V.)

Posibles A.V. en $x=0$ e $x=1$

$x=0$ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{3x^2+1}{x^2-x} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3x^2+1}{x^2-x} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty \end{cases}$ $\boxed{f \text{ ten en } x=1 \text{ unha A.V}}$

$x=1$ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{3x^2+1}{x^2-x} = \dfrac{4}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{3x^2+1}{x^2-x} = \dfrac{4}{0^+} = +\infty \end{cases}$ $\boxed{f \text{ ten en } x=1 \text{ unha A.V.}}$

b) Asíntota horizontal

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2+1}{x^2-x} = \left[\dfrac{+\infty}{+\infty}\right]_{\text{Indet}} \underset{\text{L'Hôp}}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{6x}{2x-1} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{6}{2} = 3$

$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^2+1}{x^2-x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] \underset{\text{L'Hôp}}{=} \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{6x}{2x-1} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] \underset{\text{L'Hôp}}{=} \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{6}{2} = 3$

f ten unha A.H. en $y=3$ cando $x\to +\infty$ e $x\to -\infty$

Asíntotas oblicuas

Como hai Asíntota horizontal non hai asíntotas oblicuas

Repres